

Rozwiązania zadań domowych z serii I

1. Tenisiści

Ojciec, pragnąc zmobilizować syna do doskonalenia techniki gry w tenisa, obiecuje mu nagrodę, jeśli ten wygra co najmniej dwa mecze z rzędu z ojcem i mistrzem klubu wg. jednego ze schematów: albo ojciec-mistrz klubu-ojciec albo mistrz klubu-ojciec-mistrz klubu. Jaką kolejność meczów powinien wybrać syn, jeśli prawdopodobieństwo zwycięstwa w pojedynku z ojcem wynosi $p_o = 0.8$; a z mistrzem $p_m = 0.4$?

Rozw.

W pierwszym schemacie (omo) prawdopodobieństwo przynajmniej dwóch wygranych pod rząd wynosi $p_1 = p_o p_m p_o + (1 - p_o) p_m p_o + p_o p_m (1 - p_o)$ (odpowiednio: trzy wygrane, przegrana i dwie wygrane oraz dwie wygrane i przegrana). Po zsumowaniu

$$p_1 = p_m p_o (2 - p_o)$$

W schemacie (mom) analogiczne prawdopodobieństwo wynosi:

$$p_2 = p_m p_o (2 - p_m)$$

ale $p_m < p_o$ a zatem $p_2 > p_1$, trzeba więc wybrać schemat mistrz-ojciec-mistrz.

2. Pudełko Bertranda

W pudełku są trzy szufladki, jedna z nich zawiera dwie złote monety, druga - dwie srebrne, a trzecia - jedną złotą i jedną srebrną. Wybieramy przypadkowo jedną z monet z jednej z szufladek. Załóżmy, że wybrana moneta okazała się złotą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga moneta z tej samej szufladki jest złota?

Rozw.

$$P(\text{obie złote} / \text{pierwsza złota}) = \frac{P(\text{obie złote})}{P(\text{pierwsza złota})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

3. Potrójny pojedynek

Trzej rewolwerowcy A , B , C spotykają się na potrójnym pojedynku. Wiadomo, że prawdopodobieństwo, że A trafi do celu wynosi $p_A = 0.3$; C trafia do celu z prawdopodobieństwem $p_C = 0.5$ a B zawsze trafia. Rewolwerowcy po kolei oddają po jednym strzale: najpierw A , potem B a następnie C , potem znowu A itd. dopóki nie zostanie jeden. Jaką strategię powinien przyjąć A , żeby mieć jak największe szanse wygranej?

Rozw.

Powinien strzelić w górę, tj. specjalnie spudłować. Wtedy w następnej rundzie B zabija C (jako bardziej groźnego), a potem A będzie strzelał w B i zabije go (i wygra) z prawdopodobieństwem 0.3. Jak łatwo się przekonać, inne sposoby postępowania dają zdecydowanie mniejsze prawdopodobieństwa przeżycia.

4. (*) **Diagnoza**

Opracowano test wykrywający pewną bakterię, która występuje średnio u co tysięcznego badanego. Test nie jest doskonały i w 5% przypadków daje wynik pozytywny u ludzi, którzy nie są nosicielami tej bakterii. Jednakże w przypadku nosicieli jest nieomylny - wykrywa bakterię ze 100% skutecznością. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba, w przypadku której test dał wynik pozytywny, rzeczywiście jest nosicielem bakterii?

Rozw.

$$P(\text{nosiciel} / +) = \frac{P(\text{nosiciel} \cap +)}{P(+)}$$

ale

$$P(+)=P(\text{nosiciel})+0.05(1-P(\text{nosiciel}))=\frac{5095}{10^5}$$

oraz

$$P(\text{nosiciel} \cap +)=P(\text{nosiciel})=\frac{1}{1000}$$

czyli

$$P(\text{nosiciel} / +)=\frac{100}{5095}\approx 2\%$$

Niektórzy z Państwa komentowali, że test jest kiepski. To nie do końca tak - większość testów tego typu ma podobne charakterystyki. Np. popularny test ELISA (enzyme linked immunosorbent assay) na obecność wirusa HIV polega na obserwacji wskaźnika absorpcji (tzw. MAR - mean absorbance ratio) przeciwciał wirusa HIV. Niestety, niektóre inne, podobne, przeciwciała obecne we krwi (np. z grupy HLA) też powodują wzrost MAR, a zatem ludzie zdrowi mogą mieć podwyższony wskaźnik MAR. Z kolei niektórzy chorzy mają bardzo słaby system odpornościowy, który produkuje mało przeciwciał, co daje stosunkowo niski MAR. Poniższa tabela przedstawia wyniki szczegółowych badań:

poziom MAR	Zdrowi	Chorzy
< 2	202	0
2 – 3	73	2
3 – 4	15	7
4 – 5	3	7
5 – 6	2	15
6 – 12	2	36
> 12	0	21
	297	88

Rzecz jasna, trzeba jakoś określić, kiedy będziemy mówili, że test daje wynik pozytywny, a kiedy - negatywny. Jak widać nie ma rozwiązania idealnego: zbyt wysokie obcięcie zwiększa liczbę zdrowych testujących pozytywnie, a zbyt niskie - powoduje, że część chorych uzyska wynik negatywny. Zwykle przyjmuje się wartość progową MAR=3, co jednak oznacza, że mamy około 7% wyników pozytywnych u ludzi, którzy nie są nosicielami i 2% wyników negatywnych u nosicieli. Warto to skonfrontować z danymi nt. liczby przypadków HIV (2003):

	HIV	Populacja	Pr(HIV)	Pr(HIV/+)
USA	950 tys.	295mln	0.032	0.316
Wielka Brytania	51 tys.	60.4 mln	0.0084	0.10
Polska	14tys	38.6mln	0.0036	0.05

Obliczając prawdopodobieństwo bycia zarażonym HIV w powyższej tabelce, przyjęto że - jak szacują lekarze - zarażonych jest ok. 10 razy więcej niż oficjalnie zarejestrowanych przypadków HIV. A zatem, jeśli np. w Polsce otrzymamy pozytywny wynik testu ELISA, to prawdopodobieństwo, że jesteśmy nosicielami wynosi zaledwie 5%. To argument przeciw masowym testom na AIDS (a pomysły takie były, np., stan Illinois wprowadził w 1988 obowiązkowy test przed wstąpieniem w związek małżeński). Podobne problemy występują np. przy używaniu detektora kłamstw do testowania wypowiedzi ludzi, którzy w przeważającej większości mówią prawdę: znacznie większe jest prawdopodobieństwo tego, że detektor się pomylił niż tego, że faktycznie złapaliśmy mówiącego na kłamstwie...

Piotr Szymczak