Fizyka Statystyczna

IV rok

Rozwiązania zadań domowych - seria II

Przypomnienie z ćwiczeń

Rozkład Maxwella:

$$\rho(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2kT}} \ . \tag{1}$$

Średnia wartość prędkości dla rozkładu Maxwella:

$$<|\vec{v}|>= \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}} \ . \tag{2}$$

Odpowiedź do zadania 1

W gazie doskonałym cząsteczki są niezależne, więc

$$\rho(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \rho(\vec{v}_1)\rho(\vec{v}_2) \ , \tag{3}$$

a rozkład ich prędkości dany jest rozkładem Maxwella. Zatem z (3) i (1) mamy

$$<|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|> \ = \ \int d\vec{v}_1 \int d\vec{v}_2 \ |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\rho(\vec{v}_1)\rho(\vec{v}_2) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3 \int d\vec{v}_1 \int d\vec{v}_2 \ |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| e^{-\frac{m(\vec{v}_1^2+\vec{v}_2^2)}{2kT}} \ ,$$

gdzie całkowanie przebiega wszystkie możliwe prędkości. Dokonując podstawienia

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{\sqrt{2}} \qquad \vec{V} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{\sqrt{2}}$$

otrzymujemy

$$<|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|> \ = \ \sqrt{2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3 \int d\vec{v} \int d\vec{V} \ |\vec{v}| e^{-\frac{m(\vec{v}^2+\vec{V}^2)}{2kT}} \ .$$

Dokonując całkowania po zmiennej $\vec{V}$, a później po $\vec{v}$ oraz korzystając z (2) mamy

$$\begin{aligned}
<|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|> \ &= \ \sqrt{2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3 \int d\vec{v} \int d\vec{V} \ |\vec{v}| e^{-\frac{m(\vec{v}^2+\vec{V}^2)}{2kT}} \\
&= \ \sqrt{2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int d\vec{v} \ |\vec{v}| e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2kT}} = \sqrt{2} <|\vec{v}|>= 4\sqrt{\frac{kT}{m\pi}} \ .
\end{aligned}$$

Odpowiedź do zadania 2

Jest to gaz doskonały, więc korzystając z (1) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
< v_x v_y > \ &= \ \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int d\vec{v} \ v_x v_y \ e^{-\frac{m\vec{v}^2}{2kT}} \\
&= \ \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int dv_x \ v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int dv_y \ v_y e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} \\
&= \ < v_x >< v_y > \ .
\end{aligned}$$

A zatem

$$C(v_x, v_y) =< v_x v_y > - < v_x >< v_y >= 0 \ .$$

Odpowiedź do zadania 3

Korzystając z faktu, że
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ p(x) = 1$$
mamy
$$1 = N\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\kappa}{(x-a)^2+\kappa^2} = N\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\kappa}{x^2+\kappa^2} = N\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2+1} = N[\arctan x]|_{-\infty}^{\infty} = N\pi\ .$$
A zatem
$$N = \frac{1}{\pi}\ .$$
Aby obliczyć średnią wykonujemy następujące całkowania
$$\begin{aligned} < x > &= N\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x\kappa}{(x-a)^2+\kappa^2} = N\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x\kappa}{x^2+\kappa^2} \\ &= N\int_{0}^{\infty} dx \frac{x\kappa}{x^2+\kappa^2} + N\int_{-\infty}^{0} dx \frac{x\kappa}{x^2+\kappa^2} = \frac{N\kappa}{2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x} + \frac{N\kappa}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x}\ . \end{aligned}$$
Oba składniki sumy są nieokreślone, więc wartość średnia nie istnieje.

Odpowiedź do zadania 4*

Rozkład prędkości cząsteczki dany jest rozkładem Maxwella (1), więc dokonując zamiany zmiennych na biegunowe otrzymujemy
$$\rho(v_r, v_\varphi) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right) e^{-\frac{mv_r^2}{2kT}}\ .$$
Jak widać rozkład prędkości nie zależy od prędkości kątowej v_φ, jest jednorodny dla tej zmiennej. Zatem prawdopodobieństwo, iż cząstka poleci w kierunku łuku długości α wynosi
$$P(\alpha) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\alpha} dv_\varphi \int_0^{\infty} v_r\ dv_r\ \rho(v_r, v_\varphi) = \frac{\alpha}{2\pi}\ . \tag{4}$$
Z symetrii zagadnienia widać, że prawdopodobieństwa dotarcia do kanałów I, III oraz II, IV bedą odpowiednio sobie równe.

A zatem, korzystając z symetrii i z (4) mamy
$$\begin{aligned} P(I) = P(III) &= 2\left(\arctan\frac{a/2}{a}\right)/(2\pi) = \frac{\arctan(1/2)}{\pi} \\ P(II) = P(IV) &= 2\left(\arctan\frac{2a}{a}\right)/(2\pi) = \frac{\arctan(2)}{\pi}\ . \end{aligned}$$

Komentarz do oceniania rozwiązań

Za każde zadanie można było zdobyć maksymalnie 5*pkt*. Za brak stwierdzeń (3) lub (4) odejmowałem 2*pkt*. W przypadku oddania dwóch zadań punktowałem to lepiej zrobione. Następnym razem będzie odwrotnie, by nie było sensu oddawania dwóch zadań.

Filip Dutka