

**Zadanie 1** Szukamy  $\langle Y_r^2 \rangle$ , czyli średni kwadrat odległości od punktu startowego po  $r$  skokach.

$$Y_r = X_1 + \dots + X_r \quad (1)$$

gdzie  $X_i$  to zmienna losowa z rozkładem

$$X_i = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Ponieważ

$$\langle X_i \rangle = 0 \quad \langle X_i^2 \rangle = 1 \quad (3)$$

To  $\langle Y_r^2 \rangle = r$ . W otrzymaniu tego wzoru niezbędna jest niezależność zmiennych.

**Zadanie 2**  $p_x(x)$ -rozkład zmiennej  $x$ . Zgodnie ze wskazówką przechodzimy do rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej  $y = f(x) = (x - \langle x \rangle)^2$  korzystając ze wzoru:

$$p_y(y) = \int_X \delta(y - f(x)) p_x(x) \quad (4)$$

co daje

$$p_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} p(x(y)) \quad (5)$$

Zgodnie z poleceniem trzeba udowodnić, że

$$\int_{y>a^2} P_y(y) \leq \frac{\langle y \rangle}{a^2} \quad (6)$$

Liczymy korzystając z postaci  $p_y$

$$\int_{y>a^2} P_y(y) = \int_{y>a^2} \frac{1}{2\sqrt{y}} P_x(x(y)) = \int_{y>a^2} \frac{\sqrt{y}}{2y} P_x(x(y)) \quad (7)$$

dalej szacujemy ( $\frac{1}{y} < \frac{1}{a^2}$ )

$$\int_{y>a^2} \frac{\sqrt{y}}{2y} P_x(x(y)) \leq \int_{y>a^2} \frac{\sqrt{y}}{2a^2} P_x(x(y)) = \quad (8)$$

$$= \frac{\langle y \rangle}{a^2} \quad (9)$$

**Zadanie 3** Niech tarcza porusza się w ujemną stronę osi  $z$ . Całkowita zmiana pędu cząstek uderzających w tarczę w czasie  $dt$  na powierzchni  $dA$  ze strony ujemnej osi  $z$  wynosi

$$p_l = \int_{-U}^{\infty} nd\vec{v}p(\vec{v})2m(v_z + U)^2 dt dA \quad (10)$$

a ze strony dodatniej

$$p_p = \int_{-\infty}^{-U} nd\vec{v}p(\vec{v})2m(v_z + U)^2 dt dA \quad (11)$$

Na ćwiczeniach kilkakrotnie wyprowadzane były podobne wyrażenia. Po scałkowaniu tych wyrażeń, zanedbując wyraz kwadratowe w  $U$  dostajemy

$$F_o = \pi R^2 \frac{8U}{\sqrt{2\pi}} n \sqrt{k_B T m} \quad (12)$$

**Zadanie 4**  $p_N(n)$ -prawdopodobieństwo, że po  $N$  krokach w pojemniku A będzie  $n$  kul. Wszystkie kule mogą być wybrane z równym prawdopodobieństwem. Równanie ewolucji wyznacza się analogicznie jak na ćwiczeniach. Otrzymuje się

$$p_{N+1}(n) = 2\frac{n}{m}(1-\frac{n}{m})p_N(n) + (1-\frac{n-1}{m})^2 p_N(n-1) + (\frac{n+1}{m})^2 p_N(n+1) \quad (13)$$

Przyjmijmy też  $p_N(n) = 0$  dla  $n < 0$  i  $n > m$ .

Rozkład stacjonarny (w granicy  $t \rightarrow \infty$ ) wyznacza się z powyższego równania podstawiając  $p_{N+1} = p_N$ . Z tego zakładając  $p_N(0) = a$  wyznaczamy kolejno  $p_N(1)$  itd. Łatwo zauważyć że

$$p(n) = a \binom{m}{n}^2 \quad (14)$$

Dowodzimy przez rekurencję. Stała normalizacyjna wyznaczana jest dzięki równaniu

$$\sum_n \binom{m}{n}^2 = \binom{2m}{m} \quad (15)$$

Dowód: Ilość sposobów na ile możemy wybrać  $m$  kul spośród  $2m$  wynosi  $\binom{2m}{m}$ . Z drugiej strony jest też równa

$$\sum_n^m \binom{m}{n} \binom{m}{m-n} \quad (16)$$

ponieważ można wybierać kolejno  $n$  białych i  $m - n$  czarnych. Dla rozkładu 14 średnia i dyspersja wynoszą odpowiednio

$$\frac{m}{2} \tag{17}$$

$$\frac{m^2}{8m - 4} \tag{18}$$