

Fizyka statystyczna

Odpowiedzi do serii zadań nr 4

zadanie 1

Niech n_+ będzie liczbą spinów o energii ϵ , natomiast przez n_- oznaczmy liczbą spinów o energii $-\epsilon$. Energia układu jest równa: $E = (n_+ - n_-)\epsilon$. Pytanie brzmi: na ile sposobów (Ω) możemy zrealizować taki makrostan o energii E ? Jako że cząstki są nierozróżnialne to Ω jest równa po prostu liczbie różnych konfiguracji n_+, n_- , które dają energię E . Napiszmy, że $E = c\epsilon$ i przyjmijmy, że $c \geq 0$. Zauważymy następnie, że ilość stanów realizujących energię ujemną E jest równa (z symetrii) ilości stanów dla energii $|E|$ – wystarczy więc rozważyć przypadek $c \geq 0$.

Odpowiednie stany możemy uszeregować następująco (używając zapisu (n_+, n_-)): $(c, 0), (c+1, 1), \dots, (c+k, k)$, gdzie k spełnia warunek $[c+2k] = N$, $[x]$ to całkowita część x , a N to liczba spinów. Licząc te stany otrzymujemy wynik:

$$\Omega = \left[\frac{N-c}{2} \right] + 1. \quad (1)$$

Stąd mamy entropię układu:

$$S = k \ln \left(\left[\frac{N-c}{2} \right] + 1 \right), \quad (2)$$

a skoro $E = 0$, to $c = 0$ i:

$$S(E=0) = k \ln \left(\left[\frac{N}{2} \right] + 1 \right) \cong k \ln \left(\left[\frac{N}{2} \right] \right). \quad (3)$$

zadanie 2

Oznaczmy przez n_+ liczbę odcinków łańcucha DNA, które są skierowane na prawo oraz przez n_- liczbę odcinków skierowanych na lewo. Przy tym oś „ x ” jest skierowana standardowo na prawo. Jeśli N jest liczbą odcinków tworzących łańcuch, wielkość a oznacza długość pojedynczego odcinka, a X jest położeniem ruchomego końca łańcucha (gdy drugi koniec jest zamocowany w $x = 0$) to możemy napisać równania:

$$n_+ - n_- = \frac{X}{a}, \quad (4)$$

$$n_+ + n_- = N. \quad (5)$$

Dla danego X liczba stanów jest równa liczbie wyborów n_+ odcinków spośród wszystkich N , pamiętając jednak, że energia zależy tylko od $|X|$, czyli nie zależy od znaku X , mnożymy ten wynik przez dwa, aby uwzględnić drugą połowę stanów. Mamy więc wynik:

$$S(E) = k \ln \left(2 \frac{N!}{n_+! n_-!} \right), \quad (6)$$

gdzie:

$$n_+ = \frac{X}{2a} + \frac{N}{2}, \quad (7)$$

$$n_- = \frac{N}{2} - \frac{X}{2a}. \quad (8)$$

Wprowadźmy oznaczenie $x = \frac{|X|}{Na}$, wówczas entropia po zastosowaniu przybliżenia Stirlinga przyjmie postać:

$$S = -Nk \left(\frac{1+x}{2} \ln \frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} \ln \frac{1-x}{2} \right). \quad (9)$$

Temperatura jest równa:

$$T = \left[\frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial E} \right]^{-1} = \frac{Fa}{k} \left(\frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+x}{1-x} \right] \right)^{-1}, \quad (10)$$

gdzie F jest siłą rozciągającą łańcuch. Po rozwiązaniu tego równania ze względu na x otrzymamy wzór:

$$|X| = Na \tanh \left(\frac{Na}{kT} \right). \quad (11)$$

zadanie 3

Niech n_+ będzie liczbą spinów o energii ϵ , natomiast przez n_- oznaczmy liczbą spinów o energii $-\epsilon$. Energia układu jest równa: $E = (n_+ - n_-)\epsilon$. Pierwsze pytanie brzmi: na ile sposobów (Ω) możemy zrealizować taki makrostan o energii E ? Liczba sposobów jest równa liczbie możliwych wyborów n_+ spinów spośród wszystkich N . Zatem entropia jest równa:

$$S(E) = k \ln \left(\frac{N!}{n_+! n_-!} \right). \quad (12)$$

Po wykorzystaniu wzoru Stirlinga ($\ln n! \cong n \ln n - n$) otrzymujemy:

$$S(E) = k (N \ln N - n_+ \ln n_+ + n_- \ln n_-). \quad (13)$$

Temperatura natomiast jest równa:

$$T = \left[\frac{k}{2\epsilon} \ln \left(\frac{1 - N/E\epsilon}{1 + N/E\epsilon} \right) \right]^{-1}. \quad (14)$$

zadanie 4

Zacznijmy od obliczenia prawdopodobieństwa wygranej gracza A (czyli tego który czeka na serię OOR). W tym celu zauważmy, że gracz A wygra wtedy i tylko wtedy, jeśli w dwóch pierwszych rzutach wypadną dwa orły. Inna sytuacja zawsze doprowadzi do wygranej gracza B. Zatem: $P(A) = 1/4$.

Obliczmy teraz średni czas oczekiwania na serię OOR (niezależnie od gry). Przyjmijmy oznaczenia: $t(R)$ – oczekiwania na serię, jeśli mamy już orła i podobnie z $t(O)$ i $t(OO)$. Możemy teraz napisać równania łączące te trzy czasy, mianowicie:

$$t(R) = 1/2 (1 + t(O)) + 1/2 (1 + t(R)), \quad (15)$$

$$t(O) = 1/2 (1 + t(OO)) + 1/2 (1 + t(R)), \quad (16)$$

$$t(OO) = 1/2 \cdot 1 + 1/2 (1 + t(OO)). \quad (17)$$

Przykładowo, pierwszy nawias w równaniu (15) zawiera liczbę 1, gdyż losując wykonujemy jeden ruch oraz $t(O)$, gdyż jeśli wylosujemy orła to szanse wygranej gracza A wyglądają dokładnie tak, jakgdybyśmy mieli jednego orła. Przed nawiasem stoi czynnik $1/2$, gdyż z takim prawdopodobieństwem wylosujemy orła. Rozwiązując układ tych równań otrzymujemy liczby: $t(R) = 8$, $t(O) = 6$ oraz $t(OO) = 2$. Zauważmy teraz, że czas oczekiwania na serię OOR spełnia równanie:

$$t_A = 1/2 (1 + t(O)) + 1/2 (1 + t(R)) = 8. \quad (18)$$

Równanie to otrzymujemy „startując“ w chwili, gdy nie wykonaliśmy jeszcze żadnego rzutu.

W podobny sposób konstruujemy równania na kolejne szukany czasy. Zaczynając od czasu dla serii ROO:

$$t(O) = 1/2 (1 + t(O)) + 1/2 (1 + t(R)), \quad (19)$$

$$t(R) = 1/2 (1 + t(R)) + 1/2 (1 + t(RO)), \quad (20)$$

$$t(RO) = 1/2 \cdot 1 + 1/2 (1 + t(R)). \quad (21)$$

oraz równanie na szukany czas t_B :

$$t_B = 1/2 (1 + t(O)) + 1/2 (1 + t(R)). \quad (22)$$

Po rozwiązaniu dostajemy ponownie: $t_B = 8$, pomimo że prawdopodobieństwo wygranej gracza B jest większe niż $P(A)$.

Odpowiednie równania na czas trwania gry mają postać:

$$t(O) = 1/2 (1 + t(OO)) + 1/2 (1 + t(R)), \quad (23)$$

$$t(R) = 1/2 (1 + t(R)) + 1/2 (1 + t(RO)), \quad (24)$$

$$t(RO) = 1/2 \cdot 1 + 1/2 (1 + t(R)). \quad (25)$$

$$t(OO) = 1/2 \cdot 1 + 1/2 (1 + t(OO)). \quad (26)$$

oraz równanie na szukany czas t_{gry} :

$$t_{gry} = 1/2 (1 + t(O)) + 1/2 (1 + t(R)) = \frac{13}{2}. \quad (27)$$