Fizyka Statystyczna
seria VI - Odpowiedzi

Zad 1 Niech V_1 i V_2 oznaczają objętości zajmowane przez gaz odpowiednio w lewej i prawej przegrodzie. Podczas procesu nie ma wymiany cząstek ($\mathrm{d}N = 0$), ani ciepła ($\mathrm{d}Q = T\mathrm{d}S = 0$) z otoczeniem. Różniczka całkowitej energii wewnętrznej układu ma postać

$$dU = -pdV_1 - pdV_2 \quad .$$

Zatem różniczka entalpii całego układu ($H = U + p_1V_1 + pV_2$) przy stałych ciśnieniach p_1 oraz p_2 ($dp_1 = dp_2 = 0$) wynosi

$$dH = dU + dp_1V_1 + dp_2V_2 + p_1dV_1 + p_2dV_2 = -pdV_1 - pdV_2 + p_1dV_1 + p_2dV_2 = 0 \quad .$$

Różniczka entalpii wynosi 0, zatem entalpia całego układu jest stała podczas trwania procesu.

Komentarz do rozwiązań
Często pojawiały się rozwiązania pokazujące równość entalpii lewego i prawego podukładu. Równość obu wielkości nie oznacza jednak stałości. Ponadto zdarzały się pracę pokazujące identyczność wartości początkowej i końcowej entalpii, a nie jej niezmienniczość podczas trwania procesu, jak wyraźnie było napisane w treści zadania.

Zad 2 Całkowita masa gazu o masie molowej μ wynosi m zatem jest $N = m/\mu$ moli tego gazu. Gaz wykonuje pracę jedynie podczas przemiany izobarycznej, gdzie ciśnienie wynosi $p_2 = p_1/n$. Zatem

$$W = \frac{p_1}{n}\Delta V = p_2\left(\frac{NRT_1}{p_2} - \frac{NRT_2}{p_1}\right) = \frac{m}{\mu}RT_1\frac{n-1}{n} \quad .$$

Zad 3 Po puszczeniu tłoka zostanie on przesunięty do pozycji h (wysokość tłoka $H = 1m$, pole podstawy A), w której ciśnienia obu części się wyrównają i będą wynosiły p. Niech p_1 i p_2 oznaczają odpowiednio ciśnienia w dolnej i górnej części przed puszczeniem tłoka. Natomiast N_1 oraz N_2 opisują liczbę moli. Hel traktujemy jako gaz doskonały, a zatem dla sytuacji początkowej mamy

$$\begin{aligned} p_1A\frac{H}{2} &= N_1RT \\ p_2A\frac{H}{2} &= N_2RT \quad , \end{aligned}$$

a dla końcowej

$$\begin{aligned} pAh &= N_1RT \\ pA(H-h) &= N_2RT \quad . \end{aligned}$$

A zatem

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{h}{H-h} \quad ,$$

a stąd

$$h = H\left(\frac{p_2}{p_1} + 1\right)^{-1} = 20\mathrm{cm} \quad .$$

Temperatura cylindra się nie zmienia, więc energia wewnętrzna się nie zmienia i zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki ciepło oddane otoczeniu jest równe pracy wykonanej przez gaz, czyli korzystając z równania stanu gazu doskonałego

$$\begin{aligned} Q = \int_{H/2}^{h}\frac{N_1RT}{x}dx + \int_{H/2}^{H-h}\mathrm{d}x\frac{N_2RT_2}{x}\mathrm{d}x &= N_1RT\log\frac{h}{H/2} + N_2RT\log\frac{H-h}{H/2} \\ &= RTN_1\left(\log\frac{h}{H/2} + \frac{p_2}{p_1}\log\frac{H-h}{H/2}\right) \quad . \end{aligned}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymuje się $Q = 2,4kJ$.

Zad 4 * Rozpatrując energię wewnętrzną jako funkcję temperatury i objętości $u(T,v) = 3p(T)v$ jej różniczka ma postać

$$du = 3\frac{dp}{dT}\, dT + 3p\, dv \quad .$$

Zatem różniczka entropii na jedną cząstkę jest postaci

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{p}{T}dv = \frac{3v}{T}\frac{dp}{dT}\, dT + \frac{4p}{T}\, dv \quad .$$

Z równości drugich pochodnych

$$\frac{4}{T}\frac{dp}{dT} - \frac{4p}{T^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial v} = \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial T} == \frac{3}{T}\frac{dp}{dT}$$

wynika

$$\frac{dp}{dT} = \frac{4p}{T} \quad \text{czyli} \quad p = CT^4 \quad ,$$

gdzie C jest stałą całkowania. Z różniczki entropii mamy

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \frac{4p}{T} = 4CT^3 \quad ,$$

więc

$$s = 4CT^3 v + f(T) \quad ,$$

gdzie $f(T)$ oznacza funkcję tylko temperatury. By ją wyznaczyć korzystamy z pochodnej entropii po temperaturze

$$12CvT^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = 12CT^2 v + \frac{df}{dT} \quad .$$

Zatem funkcja $f(T)$ jest stała, niezależna od T. Niech będzie równa D.
Entropia ma więc postać

$$s = 4CT^3 v + D \quad ,$$

gdzie C oraz D oznaczają dowolne stałe.

Komentarz do rozwiązań
Niektóre rozwiązania przedstawiały entropię jako funkcję trzech zmiennych $s(T,v,p)$, nie podając zależności ciśnienia od temperatury T i objętości v. Z powyższego rozwiązania widać, że można było (a nawet trzeba było zgodnie z treścią zadania) to zrobić. Zatem takie rozwiązania nie mogły być nagradzane maksymalną liczbą punktów.

Filip Dutka