Fizyka Statystyczna

IV rok

Odpowiedzi - seria XI

Zadanie 1 Zgodnie z treścią zadania zakładam, że wektor natężenia elektrycznego jest dwuwymiarowy. A zatem, tak jak na ćwiczeniach

$$div\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{k}, t) = 0 \quad ,$$

czyli $\vec{E}$ jest jednowymiarowym wektorem; jest jedna polaryzacja.
Z periodycznych warunków brzegowych dla kwadratu o długości L otrzymuję

$$\omega = \frac{2\pi c}{L} n \qquad n \in Z \quad .$$

W granicy dużych Ω liczba stanów $N(\Omega)$ o częsctościach $\omega \le \Omega$ wyraża się przez stosunek objętości dwuwymiarowej kuli (polu koła) do objętości jednej komórki, czyli $(2\pi c/L)^2$. Zatem

$$N(\Omega) = \pi\Omega^2 / \left(\frac{2\pi c}{L}\right)^2 = \frac{\Omega^2 L^2}{4\pi c^2} \quad .$$

Gęstość stanów jest pochodną tego wyrażenia po częstości, więc

$$g(\omega) = \frac{\mathrm{d}N(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{L^2}{2\pi c^2}\omega \quad .$$

Dwuwymiarowy odpowiednik prawa Plancka ma więc postać

$$e(\omega) = \frac{\omega}{2\pi c^2} \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad .$$

Aby otrzymać gęstość energii pola, należy przecałkować $e(\omega)$ po wszystkich częstościach, czyli

$$u = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \frac{\omega}{2\pi c^2} \omega \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} = \frac{1}{2\pi c^2 \beta^3 \hbar^2} \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^2}{e^x - 1}$$

i zamieniając całkę na szereg (jak na ćwiczeniach) otrzymuję

$$u = \frac{1}{2\pi c^2 \beta^3 \hbar^2} 2\zeta(3) = \frac{k^3 T^3 \zeta(3)}{\pi c^2 \hbar^2} \quad .$$

Jest to dwuwymiarowe prawo Stefana-Boltzmanna.

Zadanie 2 Częstość dla magnonów dana jest wzorem $\omega = Ak^2$, więc nakładając periodyczne warunki brzegowe dla sześcianu o długości L otrzymuję

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n} \quad ,$$

czyli

$$\sqrt{\omega} = \frac{2\pi A}{L} n \quad .$$

Analogicznie jak w zadaniu wyżej, liczę liczbę stanów o częstościach $\omega \leq \Omega$ oraz gęstość stanów

$$\begin{aligned} N(\Omega) &= \frac{\frac{4}{3}\pi\Omega^{3/2}}{\left(\frac{2\pi A}{L}\right)^3} = \frac{V}{3\cdot 2\pi^2 A^3}\Omega^{3/2} \\ g(\omega) &= \frac{\mathrm{d}N(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{V}{4\pi^2 A^3}\sqrt{\omega} \quad , \end{aligned}$$

gdzie $V = L^3$ jest objętością układu.
Analogicznie jak w modelu Debye'a zakładam, że rozchodzą się fale jedynie o częstościach $\omega < \omega_0 = Ak_0^2$. Zatem gęstość energii promieniowania wyraża się następującym wzorem

$$\begin{aligned} u &= \frac{U}{V} = \int_0^{\omega_0} \mathrm{d}\omega g(\omega)\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = \frac{\hbar}{4\pi^2 A^3}\int_0^{\omega_0}\mathrm{d}\omega\frac{\omega^{3/2}}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \\ &= \frac{\hbar}{4\pi^2 A^3}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^{\frac{5}{2}}\int_0^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}}\mathrm{d}x\frac{x^{3/2}}{e^x-1} \quad . \end{aligned}$$

Dla niskich temperatur $kT \ll \hbar\omega_0$ i górna granica całkowania dąży do nieskończoności, tym samym całka jest niezależna od temperatury. Zatem

$$u \propto T^{\frac{5}{2}} \quad ,$$

czyli

$$C_V = V\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V \propto T^{3/2} \quad .$$

Zadanie 3 Zakładam że sześcian wypełniony jest równomiernie promieniowaniem o gęstości, która dla danej częstości ω dana jest przez rozkład Plancka

$$e_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \quad .$$

W małym odstępie czasu dt przez otwór w kierunku θ wypromieniowane zostaną fotony, które znajdują się w walcu o podstawie A i wysokości $cdt\cos\theta$, gdzie c jest prędkością fotonów. Ale uciekną tylko te fotony, których kierunek prędkości będzie taki, że wydostaną się z wnęki do kąta bryłowego $d\Omega$, czyli $d\Omega/4\pi$ fotonów znajdujących się w objętości V. A zatem widmowa gęstość energii wypromieniowana przez otwór jest równa

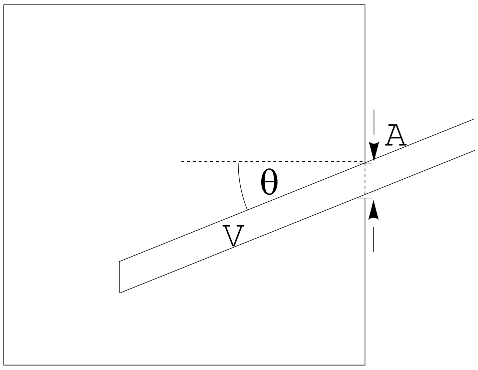
$$e'_\omega = (Acdt\cos\theta)\frac{d\Omega}{4\pi}e_\omega \quad .$$

Aby obliczyć promieniowanie wydobywające się w odstępie czasu dt z otworu we wnęce, należy policzyć całkę

$$du = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int d\omega \; e'_\omega = Acdt\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta\cos\theta \int d\omega e_\omega$$

Korzystając z policzonej na ćwiczeniach całki $\int d\omega e_\omega$ moc promieniowania na jednostkę powierzchni wyraża się przez

$$\frac{1}{A}\frac{du}{dt} = \frac{c}{4}\frac{k^4\pi^2}{15c^3\hbar^3}T^4 = \frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3}T^4 \quad .$$



Zatem moc promieniowania na jednostkową powierzchnię wynosi $\sigma_S T^4$, gdzie $\sigma_S = \frac{2k^4\pi^5}{15c^2h^3}$ jest stałą Stefana.

Zadanie 4 Korzystając z przedstawionego na ćwiczeniach modelu promieniowania ciała doskonale czarnego, energia wewnętrzna oraz energia swobodna Helmholtza mają następującą postać

$$\begin{aligned} F &= \beta^{-1}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega g(\omega)\log\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right) \\ U &= \int_0^\infty \mathrm{d}\omega g(\omega)\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \quad , \end{aligned}$$

gdzie

$$g(\omega) = \frac{\omega^2 V}{\pi^2 c^3}$$

jest gęstością stanów.
Ciśnienie promieniowania można wyznaczyć jako pochodną energii swobodnej po objętości przy ustalonej temperaturze. A zatem

$$\begin{aligned} p &= -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -\beta^{-1}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}\log\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right) \\ &= -\beta^{-1}\left[\frac{\omega^3}{3\pi^2c^3}\log\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)\right]_0^\infty + \beta^{-1}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\frac{\omega^3}{3\pi^2c^3}\frac{\beta\hbar e^{-\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} \\ &= \frac{1}{3}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = \frac{1}{3V}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega g(\omega)\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} = \frac{U}{3V} \end{aligned}$$

A zatem

$$pV = \frac{1}{3}U$$

co jest równaniem stanu dla promieniowania.

Filip Dutka