

Fizyka statystyczna

IV Rok

Zadania domowe - seria 10

Zad. 1. Pokaż, że entropia kwantowego gazu doskonałego wyraża się wzorem:

$$S = -k_B \sum_k [\langle n_k \rangle \ln \langle n_k \rangle \mp (1 \pm \langle n_k \rangle) \ln(1 \pm \langle n_k \rangle)] \quad ,$$

(górny znak - bozony, dolny - fermiony). Wskazówka: wyraż najpierw $e^{-\beta \epsilon_k}$ przez $\langle n_k \rangle$.

Zad. 2. Wyznaczyć stosunek temperatur Fermiego gazu doskonałego elektronów i protonów wewnątrz gwiazdy składającej się z całkowicie zjonizowanego wodoru.

Zad. 3. Rozważ dwuwymiarowy gaz złożony z N nieoddziałujących nierelatywistycznych fermionów o spinie $1/2$ w temperaturze $T = 0$. Gaz wypełnia powierzchnię o polu A .

a) znajdź energię Fermiego E_F dla tego gazu

b) znajdź energię wewnętrzną $u = U/N$ tego gazu jako funkcję E_F .

Zad. 4. (*) Rozważmy białego karła w kształcie kuli o masie M i promieniu R oraz jednorodnej gęstości. Załóżmy, że na każdy elektron w karle przypada jeden proton i jeden neutron o masach $m_p = m_n$.

a) Korzystając z faktu, że gwiazda jako całość jest obojętna elektrycznie, oceń ile zawiera elektronów i wypisz wyrażenie na ich koncentrację $\rho = N/V$.

b) Zakładając, że karzeł ma temperaturę $T = 0$, pokaż, że całkowita energia kinetyczna E_e zdegenerowanego gazu elektronów w gwieździe jest równa

$$E_e = \frac{3\hbar^2}{10m_e R^2} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \left(\frac{M}{2m_p}\right)^{5/3}$$

gdzie m_e jest masą elektronu.

c) Pokaż, że energia grawitacyjna gwiazdy jest równa (przy założeniu jednorodnego rozkładu masy w jej wnętrzu)

$$E_g = -\frac{3GM^2}{5R}$$

gdzie G jest stałą grawitacyjną. Minimalizując całkowitą energię $E = E_e + E_g$ karła pokaż, że jego promień jest związany z masą zależnością

$$R = \frac{\hbar^2}{Gm_e} \left(\frac{81\pi^2}{512m_p^5}\right)^{1/3} M^{-1/3}$$

d) Gdy Słońce zamieni się w białego karła ile razy jego promień zmieni się w stosunku do dzisiejszego?

Rozwiązania zadań będą zbierane na wykładzie we wtorek 24 stycznia.

Karol Makuch