

# Fizyka Statystyczna

## IV rok

### Zadania domowe - seria III

#### Zad 1

Cząstka znajduje się na sieci, której węzły umieszczone są na prostej w jednostkowej odległości od siebie. Co pewien czas cząstka wykonuje skoki o jeden węzeł w lewo lub w prawo. Prawdopodobieństwo skoku w lewo jest równe prawdopodobieństwu skoku w prawo. Wyznacz średni kwadrat odległości od punktu startowego po  $r$  skokach.

Wsk. Wygodnie jest korzystać z niezależności skoków.

#### Zad 2

Udowodnić nierówność Czebyszewa: dla dowolnej stałej  $a \neq 0$  prawdopodobieństwo, że  $(x - \langle x \rangle)^2 > a^2$  jest nie większe od  $\frac{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}{a^2}$ , gdzie  $x$  oznacza wartość zmiennej losowej o rozkładzie prawdopodobieństwa  $p(x)$ .

Wsk. Posłużyć się rozkładem prawdopodobieństwa dla zmiennej  $(x - \langle x \rangle)^2$  i oszacować  $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ .

#### Zad 3

Tarcza o promieniu  $R$  porusza się z prędkością  $u$  prostopadłą do jej powierzchni w gazie doskonałym, którego cząstki charakteryzuje maxwellowski rozkład prędkości. Przyjmując, że ruch tarczy nie wpływa na rozkład prędkości, znaleźć siłę oporu, jakiej doznaje tarcza z dokładnością do wyrazu liniowego w  $u$ . Cząstki gazu zderzają się z tarczą sprężysto.

#### Zad 4\* (Model dyfuzji Bernoulliego-Laplace'a)

Daniel Bernoulli podał następujący model mieszania dwóch nieściślych cieczy: Wyobraźmy sobie, że mamy  $2m$  kul spośród których połowa jest biała (pierwsza ciecz) a połowa czarna (druga ciecz). Początkowo, umieszczamy białe kule w pojemniku A, zaś czarne - w pojemniku B. Następnie losowo wybieramy po jednej kuli z jednej i drugiej urny i zamieniamy je miejscami. Czynność tę powtarzamy wielokrotnie. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa znalezienia dokładnie  $n$  białych kul w pojemniku A,  $p(n, t)$ , w granicy  $t \rightarrow \infty$ . Wyznaczyć  $\langle n \rangle$  oraz  $\sigma_n$  dla tego rozkładu.

Rozwiązania zadań będą zbierane na wykładzie we wtorek 25 października.

Karol Makuch