

Fizyka statystyczna

IV rok

Zadania domowe – seria 4

zadanie 1

Pewien układ zbudowany jest z N cząsteczek, z których każda może znajdować się w trzech stanach kwantowych o energiach $0, -\epsilon, \epsilon$. Całkowita energia układu jest ustalona i wynosi zero. Policz entropię przyjmując, że cząstki są nierozróżnialne

zadanie 2

Współczesne techniki eksperymentalne pozwalają na rozciąganie pojedynczych łańcuchów biopolimerów (białka, DNA) przez precyzyjne przyłożenie siły do końców łańcucha. Wyobraźmy sobie taki eksperyment, w którym jeden z końców łańcucha polimeru jest umocowany na stałe, a drugi - rozciągnięty stałą siłą F . Dla uproszczenia przyjmij, że łańcuch polimera składa się z N połączonych ogniw, każde długości a . Kąty między poszczególnymi ogniwami wynoszą 0° lub 180° (a więc cały łańcuch jest tworem jednowymiarowym). Wiedząc, że energia takiego układu jest dana przez

$$E = -F|X|$$

gdzie X jest odległością między końcami, oblicz entropię polimeru o danej energii E . Następnie pokaż, że dla dużych N entropia przyjmuje postać

$$S = -Nk\left(\frac{1+x}{2}\log\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2}\log\frac{1-x}{2}\right)$$

gdzie $x = \frac{|X|}{Na}$.

Znajdź temperaturę statystyczną tego układu $T^{-1} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N$ w funkcji x , a następnie pokaż, że (wciąż w granicy dużych N) rozciągnięcie X związane jest z siłą relacją

$$X = Na \tanh \frac{Fa}{kT}$$

zadanie 3

Dany jest układ N rozróżnialnych spinów $1/2$ znajdujących się w zewnętrznym polu magnetycznym. Pojedynczy spin zwrócony zgodnie z polem magnetycznym ma energię $-\epsilon$, natomiast spin zwrócony przeciwnie do pola ϵ . Wykorzystując rozkład mikrokanoniczny znajdź entropię takiego układu o danej energii E , a następnie jego temperaturę statystyczną $T^{-1} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N$.

zadanie 4 *

Dwóch graczy, A i B, gra w następującą grę. Rzucają wiele razy monetą i notują wyniki rzutów. Gra kończy się zwycięstwem gracza A, jeśli wyrzucony zostanie pod rząd układ OOR , a B wygrywa - jeśli wyrzucone zostanie ROO (zwycięża ten z graczy, którego serii doczekano się najwcześniej). Ile średnio trzeba czekać na wyrzucenie serii OOR a ile na ROO ? Ile średnio trzeba czekać na zakończenie gry? Jakie jest prawdopodobieństwo zwycięstwa gracza A?

Rozwiązania zadań będą zbierane na wykładzie 8 listopada.

Jacek Zatorski