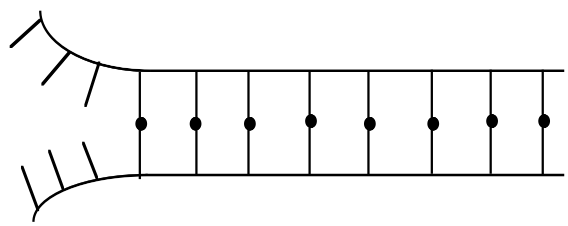
Fizyka statystyczna
IV rok
Zadania domowe – seria 5

1. **Model suwakowy DNA**

   Suwak składa się N par ząbków, z których każda może być połączona lub rozłączona. Energia połączonej pary wynosi 0, a rozłączonej E. Ponadto wymagamy, aby suwak otwierał się tylko z jednej strony (na przykład z lewej) - a zatem para k może być otwarta tylko wtedy, gdy otwarte są pary $1, 2, \ldots, k-1$ (patrz rys.). Znajdź sumę statystyczną dla takiego układu oraz wyznacz średnią liczbę otwartych par ząbków $< N_{otw} >$ w temperaturze T. Pokaż, że dla małych temperatur (tj. $kT \ll E$) średnia liczba otwartych par ząbków $< N_{otw} >$ jest niezależna od N. Jaką wartość przybiera $< N_{otw} >$ w wysokich temperaturach (tj. dla $kT \gg E$)?



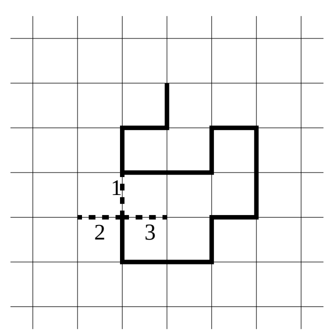
2. **Fluktuacje magnetyzacji**

   Rozważ układ N momentów magnetycznych, które mogą znajdować się w dwóch dozwolonych orientacjach $\pm\mu$ w zewnętrzym polu magnetycznym B (energia każdego z dipoli w polu może zatem przybierać wartości $\pm\mu B$). Korzystając z rozkładu kanonicznego, znajdź względną dyspersję magnetyzacji M takiego układu

$$\sigma = \frac{\sqrt{< M^2 > - < M >^2}}{< M >}$$

3. **Dwuwymiarowy polimer**

   Prostym modelem polimeru w dwóch wymiarach jest układ połączonych punktów na dwuwymiarowej siatce. W każdym punkcie siatki polimer może albo pójść prosto (opcja nr 1 na rysunku) albo wybrać jeden z dwóch kierunków skręcając pod kątem prostym do swojej dotychczasowej drogi (opcje 2 i 3). Jednak każdy zakręt łańcucha wiąże sie z kosztem energetycznym ϵ (czyli polimer, który skręcił k razy ma energię $k\epsilon$). Poza tymi regułami nie ma żadnych ograniczeń na konfiguracje łańcucha (może on np. przecinać sam siebie tworząc pętle). Zakładamy, że początek polimeru znajduje się w jakimś ustalonym punkcie na siatce, a łańcuch złożony jest z $N+1$ segmentów. Korzystając z rozkładu kanonicznego, znajdź sumę statystyczną $Z(T, N)$ dla takiego polimeru oraz jego średnią energię $E(T, N)$.



4. * **Entropia Gibbsa**

Niech p_i będzie prawdopodobieństwem tego, że układ znajduje się w stanie i o energii E_i. Entropią Gibbsa nazywamy wielkość

$$S = -k \sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i$$

Korzystając z metody mnożników Lagrange'a znajdź rozkłady $p_i, i = 1, 2, \ldots,$ które maksymalizują S przy jednoczesnym spełnieniu warunków

(a) $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ (normalizacja rozkładu)

(b) $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$, $\sum_{i=1}^{N} E_i p_i = E$ (normalizacja i warunek stałości średniej energii)

Co to za rozkłady?

Rozwiązania zadań będą zbierane na wykładzie 15 listopada.

Piotr Szymczak