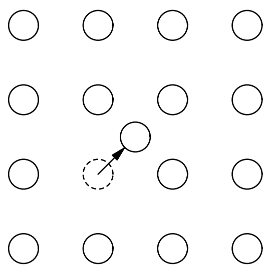
Fizyka statystyczna
IV rok
Zadania domowe – seria 8

zadanie 1
Pokaż, że w wielkim rozkładzie kanonicznym zachodzą poniższe relacje:
(a) $\sigma_N^2 = \left\langle (N - \langle N \rangle)^2 \right\rangle = kT \left(\frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu} \right)_{T,V}$,
(b) $\sigma_N^2 = \frac{kT}{V} (\langle N \rangle)^2 \kappa_T$, gdzie κ_T jest ściśliwością izotermiczną, tzn.: $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ (wskazówka: skorzystaj z relacji Gibbsa-Duhema: $N d\mu = -S dT + V dp$),
(c) znajdź σ_N^2 dla gazu doskonałego.

zadanie 2
Rozważamy gaz doskonały złożony z dużej liczby cząstek N, zamkniętych w objętości V. **Posługując się wielkim rozkładem kanonicznym**, pokaż że rozkład prawdopodobieństwa znalezienia n cząstek ($n \ll N$) w objętości $V_o \ll V$ wydzielonej myślowo z naczynia, jest rozkładem Poissona: $P(n) = \frac{e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle^n}{n!}$.

zadanie 3
Rozważamy gaz elektronów (nierozróżnialnych), będących w wysokiej temperaturze (tak że możemy pominąć kwantowe efekty w statystyce cząstek). Układ znajduje się w kontakcie ze zbiornikiem energii i cząstek, scharakteryzowanym temperaturą T oraz potencjałem chemicznym μ. Elektrony oddziałują z zewnętrznym polem magnetycznym (w kierunku „z"), tak że cząstki o dodatnim rzucie spinu na oś „z" mają w związku z tym energię $-\epsilon$, natomiast dla sytuacji przeciwnej: $+\epsilon$. Dodatkowo elektrony mają, jak zwykle, energię kinetyczną.
(a) Korzystając ze wzoru: $S = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V,\mu}$, gdzie Ω jest wielkim potencjałem termodynamicznym, a T temperaturą układu, znajdź entropię układu (S) w funkcji T, μ, V.
(b) Znajdź potencjał chemiczny μ dla tego układu (np. korzystając ze wzoru: $\Omega = -pV$) w funkcji ciśnienia i temperatury.

zadanie 4^*
N atomów tworzy idealną siatkę krystaliczną. Jeśli teraz przesuniemy n spośród nich ($1 \ll n \ll N$) z węzłów sieci w położenia międzywęzłowe (patrz rys.1), to taki układ będzie niedoskonałym kryształem z n defektami typu Frenkela. Przyjmij, że liczba $\overline{N}$ położeń międzywęzłowych jest zbliżona do N, zaś energia potrzebna aby przesunąć atom z węzła sieci do położenia międzywęzłowego wynosi ϵ. Przyjmując, że układ znajduje się w równowadze z termostatem o temperaturze T i że $\epsilon \gg kT$, pokaż, że zachodzi relacja: $\frac{n^2}{(N-n)(\overline{N}-n)} = e^{-\beta\epsilon}$ a zatem $n \approx \sqrt{N\overline{N}} e^{-\frac{\beta\epsilon}{2}}$.



Rozwiązania zadań będą zbierane na wykładzie 13 grudnia.

Jacek Zatorski