1 Zagadnienie wlasne

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{0} \tag{1}$$

czyli

$$(A - \lambda)\vec{x} = 0, \Rightarrow \det(A - \lambda) = 0 \tag{2}$$

1.1 Metoda potegowa

Niech $A \in C^{n\times n}$ bedzie macierza diagonalizowalna. Istnieje wtedy jej n liniowo niezaleznych wektorow wlasnych $v_1, v_2, \cdots v_n$ odpowiadajacych wartosciom wlasnym $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$. Zakladamy, ze λ_1 jest wartoscia dominujaca co do modulu ($|\lambda_1| > |\lambda_i|$) dla kazdego i.

Metoda potegowa wyznaczajaca λ_1 i kierunek wektora v_1, polega na konstrukcji ciagu wektorow x_k, gdzie:
x_0 jest danym wektorem poczatkowym,

$$x_k = Ax_{k-1} = A^k x_0, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

Wektor poczatkowy x_0 mozna przedstawic jako kombinacje liniowa wektorow v_i tworzacych baze C^n, $x_0 = \sum_{i=1}^n c_i v_i$. Dla $k = 1, 2, \cdots$ otrzymujemy wtedy zaleznosc

$$\begin{aligned} x_k &= A^k x_0 = \sum_{i=1}^n c_i A^k v_i = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k v_i \\ &= \lambda_1^k \left(c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k v_n \right) \end{aligned} \tag{4}$$

Poniewaz dla $i \geq 2$ jest $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$, to przy zalozeniu $c_1 \neq 0$ ciag wektorow x_k dazy do kierunku wektora wlasnego v_1. Wielkosci $|\lambda_1^k|$ daza do zera, gdy $|\lambda_1| < 1$ lub do nieskonczonosci, gdy $|\lambda_1| > 1$. Dla unikniecia niedomiaru lub nadmiaru w rachunku numerycznym konieczne jest wiec normowanie wektorow x_k. Jesli robimy to w kazdym kroku, to metoda potegowa ma postac:

- x_0 - dany wektor poczatkowy
- $y_k = Ax_{k-1}$
- $x_k = \frac{y_k}{\sqrt{y_k^T y_k}}$, $k = 1, 2, \cdots$

Tak okreslone wektory x_k spelniaja zaleznosc (4) z odpowiednio przeskalowanymi wspolczynnikami c_i.

Przyblizenia dominujacej wartosci wlasnej λ_1 wyznacza sie z tzw. *ilorazow Rayleigh'a*

$$\sigma_k = \frac{x^{(k)T} A x^{(k)}}{x^{(k)T} x^{(k)}} = \frac{x^{(k)T} y^{(k+1)}}{x^{(k)T} x^{(k)}}, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{5}$$

Co wynika z przemnozenia rownania (1 z lewej strony przez x^T).

Stosujac metode potegowa do macierzy A_1 mozemy wyznaczyc najmniejsza co do modulu wartosc wlasna:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow A^{-1}A\vec{x} = \lambda A^{-1}\vec{x} \Rightarrow A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\lambda}\vec{x} \tag{6}$$

Ogolniej zamiast macierzy A^{-1} mozna wziac $(A - \lambda^*)^{-1}$, gdzie λ^* jest ustalona liczba. Konstruujemy wtedy ciag $\{x_k\}$, gdzie

- x_0 - dany wektor poczatkowy
- $y_k = (A - \lambda)^{-1} x_{k-1}$
- $x_k = \frac{y_k}{\sqrt{y_k^T y_k}}$, $k = 1, 2, \cdots$

Tak okreslona metoda nazywana jest *odwrotna metoda potegowa* lub *metoda Wielandta*. Ciag ilorazow Rayleigh'a dazy do $\frac{1}{\lambda-\lambda^*}$.

W praktyce nie odwraca sie macierzy $A-\lambda$, ale w kazdym kroku metody Wielandta rozwiazujemy uklad rownan o tej macierzy. Dla zmniejszenia kosztow warto metoda eliminacji Gaussa (nastepny podpunkt) wyznaczyc czynniki LU rozkladu trojkatnego macierzy $A-\lambda$.

1.2 Eliminacja Gaussa

Chcemy rozwiazac uklad rownan

$$Ax = b \tag{7}$$

Metoda eliminacji Gaussa polega na przeksztalcaniu ukladu rownan $Ax = b$ do rownowaznego ukladu o macierzy gornej trojkatnej. Pokazemy, ze jest to rownowazne rozkladowi macierzy A na iloczyn macierzy dolnej i gornej trojkatnej ($A = UL$). Proces eliminacyjny przebiega w $n-1$ etapach. Oznaczmy $A^{(1)} = A$, $b^{(1)} = b$, a $A^{(k)}$ i $b^{(k)}$ niech beda macierza ukladu i wektorem prawej strony konstruowanymi w k-tym kroku metody ($k = 2, 3, \cdots, n$). Zalozmy, ze element $a_{11}^{(1)}$ i kolejno obliczane $a_{kk}^{(k)}$ nie sa zerami. W pierwszym kroku metody, za pomoca pierwszego rownania ukladu wyjsciowego

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \qquad (8)\\ a_{21}^{(1)}x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \qquad (9)\\ a_{n1}^{(1)}x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \end{aligned}$$

eliminuje sie niewiadoma x_1 z pozostalych rownan. W tym celu pierwsze rownanie pomnozone przez $l_{i1} = a_{i1}^{(1)/a_{11}^{(1)}}$ nalezy odjac stronami od dlaszych ($i = 2, 3, \cdots, n$). Przechodzimy w ten sposob od ukladu $A^{(1)}x = b^{(1)}$ do rownowaznego ukladu $A^{(2)}x = b^{(2)}$ postaci

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1^{(1)} \qquad (10)\\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_1^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \qquad (11)\\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_1^{(2)} \end{aligned}$$

W nastepnym kroku drugie rownanie ukladu $A^{(2)}x = b^{(2)}$ sluzy do wyeliminowania z dalszych rownan niewiadomej x_2, itd. W kolejnym k-tym kroku metody eliminujemy niewiadoma x_k z rownan $k+1, k+1, \cdots, n$ odejmujac od nich stronami rownanie k-te pomnozone przez l_{ik},

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}. \tag{12}$$

Tak wiec dla $i = k+1, k+2, \cdots, n$ mamy

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - l_{ik}a_{kj}^{(k)}, \cdots j = k+1, k+2, \cdots, n \qquad (13)\\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - l_{ik}b_k^{(k)}. \end{aligned}$$

Mozna to zapisac krocej

$$A^{k+1} = L^{(k)}A^{(k)}, \quad b^{(k+1)} = L^{(k)}b^{(k)} \tag{14}$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \cdot &&&&&& \\ && \cdot &&&&& \\ &&& \cdot &&&& \\ &&&& 1 &&& \\ &&&& -l_{k+1,k} & 1 && \\ &&&& -l_{k+1,k} && & \\ &&&& \cdot & \cdot && \\ &&&& \cdot && \cdot & \\ &&&& \cdot &&& \cdot \\ &&&& -l_{n,k} &&& 1 \end{bmatrix}$$

Po wykonaniu $n-1$ krokow eliminacyjnych otrzymujemy uklad o macierzy gornej trojkatnej $A^{(n)}$

$$a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \tag{15}$$

$$a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_1^{(2)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{16}$$

$$a_{nn}^{(n)}x_n = b_1^{(n)}$$

Jego rozwiazanie jest juz bardzo proste.
Zauwazmy, ze

$$A^{(n)} = L^{(n-1)}L^{(n-2)}\cdots L^{(1)}A^{(1)} \tag{17}$$

a stad

$$A = A^{(1)} = (L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}\cdots(L^{(1)})^{-1}A^{(n)} \tag{18}$$

Mozna pokazac, ze iloczyn $(L^{(1)})^{-1}(L^{(2)})^{-1}\cdots(L^{(1)})^{-1}$ jest macierza dolna trojkatna rowna

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \ldots\ldots & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Oznaczmy ja jako L, a macierz $A^{(n)}$ przez U. Widzimy zatem, ze eliminacja Gaussa jest rownowazna rozkladowi macierzy A na iloczyn LU macierzy dolnej i gornej trojkatnej.

Przy rozwiazywaniu ukladow rownan czesto wygodnie jest nie przeksztalcac prawej strony ukladu ale wyznaczyc macierze L oraz U i rozwiazac po kolei uklady trojkatne

$$Ly = b \qquad Ux = y \tag{19}$$