1 Interpolacja Lagrange'a

1.1 Sformulowanie zadania

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a polega na znalezieniu dla danej funkcji f wielomianu L_n stopnia nie wyzszego niz n, ktorego wartosci w $n+1$ punktach x_i sa takie same jak wartosci interpolowanej funkcji, tzn.

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad dla \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{1}$$

gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Twierdzenie
Zadanie interpolacyjne Lagrange'a ma jednoznaczne rozwiazanie, ktore mozna przedstawic np. w postaci:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \tag{2}$$

gdzie $l_i(x)$ to funkcje pomocnicze zdefiniowane jako

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{3}$$

Wielomian L_n nazywa sie wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a funkcji f opartym na wezlach $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Korzystanie z postaci (2) tego wielomianu np. dla obliczania jego wartosci, pochodnych czy calek lub przy wykonywaniu dzialan arytmetycznych, jest uciazliwe. Mniejszym kosztem i przy mniejszym obciazeniu pamieci mozna realizowac tego typu operacje znajac wspolczynniki a_k postaci naturalnej tego wielomianu

$$L_k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{4}$$

Wspolczynniki te mozna wyznaczyc rozwiazujac uklad rownan liniowych

$$a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_n x_i^n = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n \tag{5}$$

W wielu przypadkach metoda ta zawodzi.
Celowe jest rozwiazywac to zadanie poprzez wyznaczenie najpierw wspolczynnikow b_k postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego

$$L_n(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k (x - x_0) \cdots (x - x_k) \tag{6}$$

Dla ulatwienia zapisu zdefiniujmy wielomiany p_k

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_k(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}) && (7) \\ L_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x) && (8) \end{aligned}$$

Dla wyznaczenia wspolczynnikow b_k mozna zauwazyc, ze jezeli L_{k-1} i L_k sa wielomianami interpolacyjnymi funkcji f, opartymi odpowiednio na wezlach $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ oraz $x_0, x_1, \ldots, x_k$, to spelniaja zaleznosc rekurencyjna

$$L_k(x) = L_{k-1}(x) + b_k p_k(x) \tag{9}$$

Wielomiany p_k maja wspolczynnik 1 przy x^k, a stad wynika, ze b_k jest rowny wspolczynnikowi przy x^k w wielomianie L_k. zapisujac ten wielomian w postaci

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) \prod_{j=0, j\neq i}^{k} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{10}$$

otrzymuje sie

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)} \tag{11}$$

Wspolczynniki b_k nosza nazwe ilorazow roznicowych funkcji f opartych na wezlach $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

1.2 Ilorazy roznicowe (przypadek wezlow jednokrotnych)

Wezlami jednokrotnymi nazywa sie takie wezly, ze $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$.

Definicja

Ilorazem roznicowym rzedu k funkcji f opartym na wezlach jednokrotnych $x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}$ nazywa sie wyrazenie $f[x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}]$ postaci

$$f[x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}] = \sum_{i=l}^{l+k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=l, j\neq i}^{l+k} (x_i - x_j)} \tag{12}$$

Przez iloraz roznicowy rzedu zerowego oparty na wezle x_l rozumie sie wartosc funkcji w tym punkcie, tzn. $f[x_l] = f(x_l)$.

Wlasnosci ilorazu roznicowego

(a) jest to funkcja symetryczna, czyli
$f[x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}] = f[x_{i_l}, x_{i_{l+1}}, \ldots, x_{i_{l+k}}]$
gdzie $i_l, i_{l+1}, \ldots, i_{l+k}$ jest dowolna permutacja liczb $l, l+1, \ldots, l+k$;
(b) jest funkcjonalem liniowym ze wzgledu na funkcje f, tzn, jesli $f(x) = g(x) + h(x)$ to
$f[x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}] = g[x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}] + h[x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}]$

Twierdzenie

Dla dowolnego ukladu parami roznych punktow $x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}$ nalezacych do dziedziny funkcji f, zachodzi zaleznosc rekurencyjna

$$f[x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}] = \frac{f[x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_{l+k}] - f[x_l, x_{l+1}, \ldots, x_{l+k-1}]}{x_{l+k} - x_l} \tag{13}$$

Korzystajac z tego mozemy teraz zapisac algorytm wyznaczania wspolczynnikow b_k postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a. Znajdujemy je obliczajac rekurencyjnie odpowiednie ilorazy roznicowe. Dokladniej, dla danych wezlow x_i i wartosci $f(x_i)$ tworzymy tablice trojkatna

$$\begin{array}{llll}
x_0 & f(x_0) & & \\
x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} & \\
x_2 & f(x_2) & f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} & f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}
\end{array}$$

Szukane wspolczynniki b_k sa rowne elementom z diagonali tej tablicy, tzn. $b_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$. Opisany powyzej algorytm ilorazow roznicowych mozna realizowac kosztem tylko $2n$ miejsc pamieci (niszczac dane wartosci funkcji).

Algorytm

$$\begin{array}{l}
for \quad k = 1 \quad to \quad n \quad do \\
for \quad l = n \quad downto \quad k \quad do \\
f[l] = (f[l] - f[l-1])/(x[l] - x[l-k])
\end{array}$$

Obliczone w tablicy f wielkosci sa rowne kolejnym ilorazom roznicowym

$$f[k] = b_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \quad dla \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{14}$$