1 Algorytm Neville'a

Celem algorytmu Neville'a jest wyznaczenie wartosci wielomianu interpolacyjnego P dla pojedynczej wartosci x. Dla danego zbioru punktow wezlowych (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, wielomian P jest stopnia nie wyzszego niz n, a jego wartosci w punktach wezlowych sa takie same jak wartosci interpolowanej funkcji:

$$P(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad dla \quad i = 0, \ldots, n \; . \tag{1}$$

Zadanie interpolacyjne mozna poczatkowo rozpatrzyc dla mniejszej liczby punktow wezlowych. A nastepnie adoptowac otrzymane rozwiazania dla otrzymania wlasciwego wielomianu interpolacyjnego. Zdefiniujmy kolejne wielomiany interpolacyjne i ich wartosci w ustalonym punkcie x:

p_i - wartosc, w punkcie x, wielomianu stopnia zerowego przechodzacego przez punkt (x_i, y_i)

$$p_i = y_i \equiv P_i(x) \quad dla \quad i = 0, \ldots, n \tag{2}$$

$p_{i(i+1)}$ - wartosc, w punkcie x, wielomianu stopnia pierwszego przechodzacego przez punkty (x_i, y_i) i (x_{i+1}, y_{i+1})

$$p_{i(i+1)} \equiv P_{i(i+1)}(x) \quad dla \quad i = 0, \ldots, n-1 \tag{3}$$

$\vdots$

$p_{0\ldots n}$ - wartosc, w punkcie x, wielomianu stopnia n-tego przechodzacego przez (n+1) punktow (x_i, y_i), $(i = 0, \ldots, n)$

$$p_{0\ldots n} \equiv P_{0\ldots n}(x) \; . \tag{4}$$

Wartosci wielomianow tego typu spelniaja nastepujacy zwiazek rekurencyjny:

$$p_{i(i+1)\ldots(i+k)} = \frac{(x - x_{i+k})p_{i(i+1)\ldots(i+k-1)} + (x_i - x)p_{(i+1)(i+2)\ldots(i+k)}}{x_i - x_{i+k}} \tag{5}$$

gdzie: k odpowiada stopniowi wielomianu, $k = 1, \ldots, n$ oraz $i = 0, \ldots, n$.

Powyzszy zwiazek rekurencyjny konstruuje symetryczna tablice wartosci kolejnych wielomianow interpolacyjnych dla ustalonego x. Np. dla $n = 3$ jest ona postaci:

$$\begin{array}{llccc}
x_0 & y_0 = p_0 & & & \\
 & & p_{01} & & \\
x_1 & y_1 = p_1 & & p_{012} & \\
 & & p_{12} & & p_{0123} \\
x_2 & y_2 = p_2 & & p_{123} & \\
 & & p_{23} & & \\
x_3 & y_3 = p_3 & & &
\end{array} \tag{6}$$

W pierwszej kolumnie tablicy zapisane sa rzedne wezlow. Elementy kolejnych kolumn obliczane sa rekurencyjnie na podstawie dwoch elementow "sasiednich" z poprzedniej kolumny, wg wzoru (5).

Przedstawimy teraz nieco inna wersje algorytmu Neville'a. Wprowadzamy oznaczenia:

$$t_{(i+k)k} \equiv p_{i(i+1)\ldots(i+k)} \; . \tag{7}$$

I otrzymujemy tablice (6) w postaci

$$\begin{array}{llccc}
x_0 & y_0 = t_{00} & & & \\
 & & t_{11} & & \\
x_1 & y_1 = t_{10} & & t_{22} & \\
 & & t_{21} & & t_{33} \\
x_2 & y_2 = t_{20} & & t_{32} & \\
 & & t_{31} & & \\
x_3 & y_3 = t_{30} & & &
\end{array} \tag{8}$$

oraz wzor rekurencyjny (5) w bardziej uzytecznej formie

$$t_{ik} = \frac{(x - x_{i-k})t_{i(k-1)} - (x - x_i)t_{(i-1)(k-1)}}{x_i - x_{i-k}} = t_{i(k-1)} + (t_{i(k-1)} - t_{(i-1)(k-1)})(\frac{x - x_i}{x - x_{i-k}}) \tag{9}$$

gdzie: $1 \leq k \leq i,\ i = 0, 1, \ldots, n$.

Algorytm

$$\begin{aligned}
&for \quad i = 0 \quad to \quad n \quad do \\
&t[i] = f[i] \\
&for \quad j = i - 1 \quad downto \quad 0 \quad do \\
&t[j] = t[j+1] + (t[j+1] - t[j]) * (x - x[i])/(x[i] - x[j])
\end{aligned}$$

Gdzie $f[i]$ odpowiada wartosciom interpolowanej funkcji w punktach x_i (czyli $f[i] = f(x_i)$). Po zakonczeniu wewnetrznej petli otrzymujemy $t[j] = t_{i,i-j},\ 0 \leq j \leq i$. Szukana wartosc wielomianu interpolacyjnego $t_{nm} = p_{01\ldots n}$ uzyskujemy jako $t[0]$.

2 Uogolnienie algorytmu Neville'a

Majac zadane wezly (x_i, f_i) do interpolacji mozna rowniez uzyc funkcji wymiernych:

$$\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^{\mu,\nu}}{Q^{\mu,\nu}} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_\mu x^\mu}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_\nu x^\nu} \tag{10}$$

spelniajacych warunki:

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, \mu + \nu \tag{11}$$

W przypadku interpolacji funkcjami wymiernymi mozna rowniez wyprowadzic uogolniony wzor Neville'a (po strasznej wskazniklogii). Algorytm wyglada wowczas nastepujaco:

$$T_{i0} = f_i, \quad T_{i,-1} = 0, \tag{12}$$

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\frac{x - x_{i-k}}{x - x_i}[1 - \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-2}}] - 1} \tag{13}$$