1 Poszukiwanie miejsc zerowych

Niech ϵ oznacza przedzial, w ktorym wiemy, ze znajduje sie miejsce zerowe funkcji. Metody poszukiwania miejsc zerowych daja pewna zbieznosc:

$$\epsilon_{k+1} = A\epsilon_k^p \tag{1}$$

Jezeli $p < 1$ to mowimy, ze metoda jest *zbiezna liniowo*. Natomiast gdy $p > 1$ metoda jest *zbiezna ponad-liniowo*.

1.1 Metoda bisekcji

Pomysl jest prosty. Wiemy, ze w jakims przedziale $[a, b]$ funkcja zmienia znak $(f(a)f(b) < 0)$. Wykonujemy kolejne kroki w kazdym dzielac przedzial $[a, b]$ na pol $(c = (b - a)/2)$. Za kazdym razem badamy znak srodka przedzialu. Jezeli $f(a)f(c) < 0$ punkt c zajmuje miejsce b natomiast gdy $f(c)f(b) < 0$ punkt c zajmuje miejsce a. Wykonujemy kolejny krok dzielac nowy przedzial $[a, b]$... Metoda ta jest zbiezna liniowo - $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/2$.

1.2 Metoda stycznych (Newtona)

Kolejne przyblizenie miejsca zerowego x_{k+1} jest okreslone wzorem

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{2}$$

Geometrycznie wzor ten odpowiada poprowadzeniu stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_k i przyjecie za x_{k+1} punktu przeciecia sie z osia x. Wykladnik zbieznosci tej metody wynosi 2 - $\epsilon_{k+1} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\epsilon_k^2(1 + O(\epsilon_k))$ gdzie α oznacza rzeczywiste miejsce zerowe.

1.3 Metoda siecznych

Zamiana pochodnej $f'(x_k)$ na iloraz roznicowy $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ prowadzi do metody siecznych:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k). \tag{3}$$

Geometrycznieoznacza to, ze w k-tym kroku prowadzimy sieczna do wykresu funkcji f w punktach x_{k-1} i x_k, a jako x_{k+1} przyjmujemy jej punkt przeciecia z osia x.
Metody siecznych wymaga pamietania starej wartosci x_k jako x_{k-1}. Dlatego mowi sie, ze jest metoda *z pamiecia*. Istnieja jej modyfikacje nie kozystajace z pamieci. Jedna z nich jest metoda Steffensena.

1.4 Metoda Steffensena

Jest to modyfikacja metody siecznych nie wymagajaca pamietania z pamieci. Okresla ja wzor:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)} f(x_k) \tag{4}$$

gdzie punkt $x_k + f(x_k)$ zastapil punkt x_{k-1}.
Metoda ta ma wspolczynnik zbieznosci rowny 2.

1.5 Metody secant a metody falszywej pozycji (regula falsi)

Na przykladzie omowionej wczesniej metody siecznych przyjrzyjmy sie dwom sposobom jej zastosowania - jako metody secant i metody falszywej pozycji (sa to ogolne nazwy dwoch roznych podejsc do problemu).

Jedyna roznica miedzy metodami polega na tym, ze secant zawsze dokonuje zamiany

- nowe x_{k+1} -¿ nowe x_k
- stare x_k -¿ nowe x_{k-1}
- stare x_{k-1} - zapomina sie

natomiast regula falsi zawsze utrzymuje $f(x_k)f(x_{k-1}) < 0$, czyli

- nowe x_{k+1} -¿ nowe x_k
- stare x_k -¿ nowe x_{k-1} o ile spelni $f(x_k)f(x_{k-1}) < 0$
- stare x_k - zapomina sie o ile nie spelni $f(x_k)f(x_{k-1}) < 0$
- stare x_{k-1} - pozostaje bez zmian jezeli zapomina sie stare x_k

Poza tym wzor siecznych pozostaje bez zmian.
Metoda falszywej pozycji jest wolnie zbiezna, ale pewniejsza.

1.6 Metoda Riddersa

Jest to jeden z wariantow metody falszywego punktu. Niech miejsce zerowe znajduje sie miedzy punktami x_1 i x_2. Metoda Riddersa wpierw oblicza funkcje w srodku przedzialu $x_3 = (x_1 + x_2)/2$.

Nastepnie szuka e^Q spelniajacego:

$$f(x_1) - 2f(x_3)e^Q + f(x_3)e^{2Q} = 0 \tag{5}$$

Rozwiazujac to rownanie otrzymuje sie:

$$e^Q = \frac{f(x_3) + sign[f(x_2)]\sqrt{f(x_3)^2 - f(x_1)f(x_2)}}{f(x_2)} \tag{6}$$

Nastepnie stosuje sie metode falszywej pozycji, lecz nie do wartosci $f(x_1)$, $f(x_3)$ i $f(x_2)$, ale $f(x_1)$, $f(x_3)e^Q$ i $f(x_2)e^{2Q}$ znajduja przy ich pomocy nowe x_4. Obliczmy je poprzez wzor:

$$x_4 = x_3 + (x_3 - x_1)\frac{sign[f(x_1) - f(x_2)]f(x_3)}{\sqrt{f(x_3)^2 - f(x_1)f(x_2)}} \tag{7}$$

Ostatnie rownanie posiada kilka milych wlasnosci. Po pierwsze gwarantuje, ze x_4 lezy w przedziale $[x_1, x_2]$. Po drugie wykladnik zbieznosci wynosi $\sqrt{2}$.