1 Rownania rozniczkowe

1.1 Zagadnienie poczatkowe Cauchy'ego

Zajmijmy sie rozwiazaniem metod numerycznych rozwiazania rownan rozniczkowych zwyczajnych pierwszego rzedu, tj. rownan postaci

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

gdzie f jest dana funkcja dwu zmiennych. Funkcje $y = y(x)$ okreslona i rozniczkowalna dla x nalezacych do ustalonego przedzialu $[a, b]$ nazywamy rozwiazaniem rownania (1.1), jesli

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad dla \quad x \in [a, b] \tag{2}$$

Rownanie () moze miec wiele rozwiazan, np. rozwiazaniem rownania $y' = y$ jest kazda funkcja postaci $y(x) = Ce^x$, gdzie C jest dowolna liczba rzeczywista. Narzucenie odpowiedniego dodatkowego warunku na szukane rozwiazanie zapewnia jego jednoznacznosc. My zajmiemy sie wylacznie rownaniami pierwszego rzedu z warunkiem poczatkowym

$$y(a) = y_a \tag{3}$$

Tego typu zagadnienie poczatkowe

$$\begin{aligned} y' = f(x, y) \qquad dla \quad x = [a, b] \\ y(a) = y_a \end{aligned} \tag{4}$$

zwane jest *zagadnieniem Cauchy'ego*. Moze ono miec jedno lub wiele rozwiazan badz byc sprzeczne. Ponizsze twierdzenie okresla warunek wystarczajacy istnienia i jednoznacznosci rozwiazania zagadnienia (4).

Twierdzenie

Jezeli $f(x, y)$ jest funkcja ciagla zmiennej x dla $x \in [a, b]$ i spelnia warunek Lipschitza ze wzgledu na y, tzn. istnieje taka stala L, ze dla dowolnych rzeczywistych y_1, y_2 i dla kazdego $x \in [a, b]$ jest spelniaja nierownosc

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y - 1 - y_2| \tag{5}$$

to dla kazdego skonczonego y_a istnieje dokladnie jedna funkcja $y(x)$ ciagla i rozniczkowalna na $[a, b]$ taka, ze

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad oraz \quad y(a) = y_a \tag{6}$$

1.2 Metody roznicowe

Metody przyblizonego calkowania zagadnien poczatkowych (4) mozna podzielic na dwie istotnie rozne klasy. Pierwsza, rzadziej uzywana w rachunku numerycznym, jest klasa metod zmierzajacych do wyznaczenia jakiejs analitycznej postaci rozwiazania, np. rozwiniecia w szereg potegowy czy w szereg Fouriera. Metody tego rodzaju maja dwie istotne wady. Stosuja sie do bardzo waskiej klasy zadan, a otrzymane szeregi bywaja bardzo wolno zbiezne. Ponadto latwo zauwazyc, ze rachunek numeryczny przy wyznaczaniu przyblizen takich analitycznych postaci spelnia w gruncie rzeczy mniej istotna , drugorzedna role.

Druga, bardziej uniwersalna klase metod polegajaca na tablicowaniu poszukiwanej funkcji stanowi tzw. klasa *metod roznicowych*. Wyznaczaja one jedynie przyblizenia wartosci rozwiazania $y(x_i)$ w pewnych punktach x_i nalezacych do przedzialu calkowania $[a, b]$. Tutaj bedziemy sie zajmowali przypadkiem, w ktorym $x_i = a + ih$ dla $i = 0, 1, \cdots, N$, gzie wielkosc $h = \frac{b-a}{N}$ nazywamy *krokiem calkowania*.

Glowny postulat jaki musza spelniac metody roznicowe, to zbieznosc wyznaczanych przez nie przyblizen $y_i = y_i(h)$, tzn. $y_i(h) \to y(x)$ przy $h \to 0$ dla kazdego ustalonego $x = a + ih$. Jest to oczywiscie jedynie 'teoretyczna' wlasnosc metody. Realizujac ja numerycznie mozemy uzyskac przyblizenie rozwiazania jedynie z okreslona skonczona dokladnoscia.

Bedziemy rozwazali dwie klasy metos roznicowych. *Metody jednokrokowe* konstruujace ciag przyblizen $y_i \approx y(x_i)(i = 0, 1, \cdots, N)$ zgodnie ze wzorem

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi_f(x_i, y_i; h), \quad i = 0, 1, \cdots, N-1$$
$$y_0 = y_a \tag{7}$$

gdzie funkcja $\Phi = \Phi_f$ moze zalezec od f nieliniowo. Druga klasa beda *liniowe metody wielokrokowe.*

1.3 Metody jednokrokowe

1.3.1 Metoda Eulera i jej modyfikacje

Niech $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \cdots, N$ gdzie $h = \frac{b-a}{N}$. Pochodna $y'(x)$ przyblizamy ilorazem roznicowym opartym na wezlach x i $x+h$. Wowczas jesli funkcja $f \in C^1_{[a,b]}$, rozwiazanie y rownania (1.1) jest klasy $C^2_{[a,b]}$ i ze wzoru Taylora z reszta otrzymamy rownosc

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \frac{h}{2}y''(\zeta), \quad \zeta \in [x, x+h] \tag{8}$$

Poniewaz

$$y'(x) = f(x, y(x))$$
$$y(a) = y_a \tag{9}$$

wiec w punktach $x = x_i$ zachodzi

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + g_i$$
$$y(a) = y_a \tag{10}$$

gdzie

$$|g_i| \leq M_2 h^2, \quad M_2 = \max_{x \in [a,b]} \frac{|y''(x)|}{2} \tag{11}$$

Odrzucajac we wzorze (10) nieznane skladniki g_i otrzymujemy metode Eulera konstruujaca ciag przyblizen y_i

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad dla \quad i = 0, 1, \cdots, N-1$$
$$y_0 = y_a \tag{12}$$

Metoda Eulera mimo swej prostoty jest juz rzadko stosowana ze wzgledu na bardzo wolna zbieznosc. Istnieja dwie proste, szybciej zbiezne jej modyfikacje takie, ze $e_i = e_i(h) = O(h^2)$

- 'ulepszona metoda Eulera' (metoda Heuna)
  $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)))$
- zmodyfikowana metoda Eulera
  $y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hf(x_i, y_i))$

Metoda ma prosta interpretacje geometryczna. Rozpoczynajac od punktu (a, y_a) lezacego na krzywej calkowej bedacej rozwiazaniem zagadnienia (4) posuwamy sie tak dlugo po stycznych do wykresow calek rownania (1.1) przechodzacych przez kolejno otrzymywane punkty (x_i, y_i) az osiagniemy punkt odcietej o h wiekszej niz poczatkowy punkt na danej stycznej.

1.3.2 Metody Rungego-Kutty

Klasa metod Rungego-Kutty (RK) jest zdefiniowana przez rodzine funkcji Φ postaci

$$\Phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^{r} c_i k_i \tag{13}$$

$$k_i = k_i(x, y; h) = f(x + h\sum_{j=1}^{r} b_{ij}, y + h\sum_{j=1}^{r} b_{ij}k_j) \quad dla \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

zaleznych parametrycznie od wielkosci $c_i, b_{ij}, i, j = 1, 1, \cdots, r$. Jezeli wszystkie $b_{ij} = 0$ dla $j \geq i, i = 1, 2, \cdots, r$ to rownania definiujace wielkosci k_i (przy ustalonych x i y) redukuja sie do postaci

$$k_i = f(x + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}, y + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}k_j) \quad dla \quad 1, 2, \cdots, r \tag{14}$$

Stanowia wiec uklad zaleznosci rekurencyjnych, liniowych ze wzgledu na kolejne k_i. Ten typ metod RK nosi nazwe *otwartych*. Przy ustalonym r koszt jednego kroku metody (tzn. obliczenia kolejnego y_i) jest rowny kosztowi obliczenia r wartosci funkcji f i nie zalezy od wyboru parametrow c_i, b_{ij}. Wielkosci te dobiera sie tak, aby przy ustalonym r rzad metody byl mozliwie najwyzszy, wtedy bowiem metoda jest najbardziej efektywna. Mozna pokazac, ze maksymalny rzad $(p(r))$ metody RK korzystajacej z r wartosci funkcji jest rowny r dla $r = 1, 2, 3, 4$ oraz, ze dla dowolnych r jest $p(r) \leq r$.

Najczesciej stosowana jest tzw. klasyczna metoda RK, czyli metoda czwartego rzedu okreslona wzorami

$$\begin{aligned}
&\Phi(x, y; h) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\\
&k_1 = f(x, y)\\
&k_2 = f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1\right)\\
&k_3 = f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_2\right)\\
&k_4 = f(x + h, y + hk_3)
\end{aligned} \tag{15}$$

1.4 Liniowe metody wielokrokowe

Omawiane wczesniej metody jednokrokowe maja jedna wspolna ceche. Dla wyznaczenia kolejnego przyblizenia y_{i+1} uzywa sie jedynie wartosci x_i, y_i, f_i z ostatniego punktu. Nie stosuje sie natomiast wartosci $x_{i-j}, y_{i-j}, f_{i-j}$. Podwyzszenie rzedu metody, a zatem i szybkosci jej zbieznosci odbywa sie jedynie poprzez zwiekszenie informacji (np. uzycie wiecej wartosci funkcji lub pochodnych). Jednoczesnie procedura przetworzenia tej informacji dla otrzymania nowego przyblizenia jest bardzo prosta i malo kosztowna. Plynie stad wniosek, ze jesli koszt policzenia informacji o funkcji jest maly (np. tanio obliczamy wartosc funkcji), to moze oplacac sie stosowanie metody jednokrokowej korzystajacej w kazdym kroku z tej wlasnie informacji. Jesli natomiast ten koszt jest duzy, to chcielibysmy mozliwie jak najrzadziej obliczac wartosci funkcji w nowych punktach. Wtedy zastosujemy metode wielokrokowa.

Niech tak jak w poprzednio przedzial $[a, b]$ bedzie podzielony na N rownych co do dlugosci podprzedzialow punktami $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \cdots, N$, $h = \frac{b-a}{N}$. Liniowa metoda k-krokowa (stopniowa) (gdzie k jest dana liczba naturalna) konstruuje ciag przyblizen wartosci $y(x_i)$ rozwiazania zagadnienia (4) spelniajacy zaleznosci

$$\alpha_k y_{i+k} + \cdots + \alpha_1 y_{i+1} + \alpha_0 y_i = h(\beta_k f_{i+k} + \cdots + \beta_1 f_{i+1} + \beta_0 f_i) \tag{16}$$

gdzie

$$f_j = f(x_j, y_j), \quad \alpha_k \neq 0, \quad |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0 \tag{17}$$

A zatem korzysta w kazdym kroku z k starych, poprzednio obliczonych wartosci f_{i+j} dla $j = 0, 1, \cdots, k-1$ oraz jednej nowej wartosci funkcji f_i. Liniowosc metody oznacza jej liniowa zaleznosc od wartosci funkcji f.

Wyroznia sie dwa typy liniowych metod wielokrokowych:

1. Niejawne (zamkniete) : $y_{i+1} = \cos + f_{i+1}$ - po prawej stronie wystepuje zaleznosc od y_{i+1}.
2. Jawne (otwarte) : po prawej stronie nigdzie nie pojawia sie y_{i+1}.

Przykladami metod sa:

Jawne:

1. $y_{i+1} = y_i + hf_i$
2. $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$
3. $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$
4. $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1}) + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}$
5. $y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2})$

Niejawne:

1. $y_{i+1} = y_i + hf_{i+1}$
2. $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i)$
3. $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})$
4. $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i) - 5f_{i-1} + f_{i-2}$
5. $y_{i+1} = \frac{1}{8}(9y_i - y_{i-2}) + \frac{3}{8}h(f_{i+1} + 2f_i - f_{i-1})$

Metody 1-4 sa to metody Adamsa-Bashfortha, 6-9 Adamsa-Moultona, 5 to wzor Milne'a a 10 wzor Hemminga.

Pojawia sie problem: skad wziac startowe wartosci y_i potrzebne przy obliczaniu f_i dla $i = 0, 1, \cdots, k-1$? (inaczej - jest to pytanie o procedure startowa) Okazuje sie, ze wystarczy obliczac te y_i dowolna zbiezna metoda jednokrokowa, przyjmujac $y_0 = y_a$. Najczesciej stosuje sie jakis wariant metody RK.

Wiekszy problem stanowia metody niejawne (zamkniete) - po prawej stronie wystepuje przeciez obliczane y_{i+1}. Maja one za to lepsze wlasnosci numeryczne. Laczy sie je z metodami jawnymi w jedna metode typu predyktor-korektor.

1.5 Metody typu predyktor-korektor

Z kazda $k-$krokowa metoda wiaza sie dwa wielomiany

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \alpha_k z^k + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0 \\ \sigma(z) &= \beta_k z^k + \cdots + \beta_1 z + \beta_0 \end{aligned} \tag{18}$$

Czesto dana metode nazywa sie wobec tego metoda (ρ, σ). Aby dowiedziec sie wiecej o zwiazkach wielomianow ρ i σ z wlasciwosciami metod wielokrokowych radzimy siegnac do literatury dotyczacej metod numerycznych.

Przypomnijmy, ze metoda wielokrokowa (ρ, σ) jest metoda otwarta gdy $\beta_k = 0$, a zamknieta jesli $\beta_k \neq 0$. Niewatpliwa zaleta metod otwartch jest niewielki koszt wyznaczenia nowego przyblizenia y_{i+k}, rowny w przyblizeniu kosztowi obliczenia wartosci funkcji f. Natomiast w metodach zamknietych do kosztu tego musimy doliczyc koszt rozwiazania rownania nieliniowego ze wzgledu na y_{i+k}.

Na czym polegaja metody *predyktor-korektor*? Zalozmy, ze znamy $y_j (j = 0, 1, \cdots, i+k-1)$ to kolejne y_{i+k} jest w metodzie niejawnej rozwiazaniem rownania nieliniowego

$$y = F_i(y) \tag{19}$$

gdzie funkcja F_i ma postac

$$F_i(y) = h\frac{\alpha_k}{\beta_k} f(x_{i+k}, y) + c_i \tag{20}$$

a c_i nie zalezy od y. Przy $h \to 0$ rownanie (19) rozwiazuje sie metoda iteracji prostej. Metoda ta dla danego $y^{(0)}$ konstruuje ciag $\{y^{(l)}\}_{l=0}^{\inf}$ zdefiniowany rownoscia

$$y^{(l+1)} = F_i(y^{(l)}) \tag{21}$$

Na ogol za $y^{(0)}$ przyjmuje sie rozwiazanie rownania

$$\alpha_k y^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{i+j} = h \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{\beta}_j f(x_{i+j}, y_{i+j}) \tag{22}$$

w ktorym $(\rho, \tilde{\sigma})$ znajdujemy.