1 Interpolacja funkcjami sklejanymi

1.1 Sformulowanie zadania

Przy interpolacji Lagrange'a lub wymiernej zaklada sie, ze dana funkcja f przyblizana jest jednym wielomianem (funkcja wymierna) na calym odcinku $[a, b]$. Przy tym zalozeniu jedyna mozliwoscia uzyskania lepszego przyblizenia jest zwiekszenie stopnia wielomianu. Nie zawsze musi to jednak dzialac. W tej sytuacji naturalne jest inne sformulowanie zadania.

Niech (Δ) bedzie ukladem punktow $x_0, x_1, \ldots, x_N$ dzielacych przedzial $[a, b]$ na N czesci, tzn.

$$(\Delta) \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b \tag{1}$$

W kazdym z podprzedzialow $[x_i, x_{i+1}]$ przyblizamy f wielomianem ustalonego (raczej niskiego) stopnia. Czesto istotne jest, aby tak skonstruowane przyblizenie, ktore jest wielomianem (na ogol roznym) w kazdym z podprzedzialow bylo ciagle wraz z odpowiednimi pochodnymi na calym odcinku $[a, b]$. Funkcjami o tych wlasnosciach sa *funkcje sklejane* (ang. spline). Omowimy tu wlasnosci interpolacyjnych funkcji sklejanch i przedstawimy algorytm ich wyznaczania dla przypadku funkcji stopnia 3.

1.2 Funkcje sklejane

Definicja

Funkcje rzeczywista S nazywamy *funkcja sklejana* stopnia m z wezlami

$$(\Delta) \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b \tag{2}$$

jesli

- w kazdym przedziale (x_{i-1}, x_i) dla $i = 0, 1, \ldots, N + 1$ $(x_{-1} = -\inf, x_{N+1} = +\inf)$ S jest wielomianem stopnia nie wyszego niz m,
- S i jej pochodne rzedu $1, 2, \ldots, m - 1$ sa ciagle na calej osi rzeczywistej, $S \in C^{m-1}$.

W najprostszym przypadku, dla $m = 1$, funkcja sklejana jest po prostu lamana. Z definicji tej wynika rowniez, ze wielomiany sa szczegolnym przypadkiem funkcji sklejanych.

Definicja

Fukcje sklejana stopnia $2m-1$ z wezlami (Δ) nazywamy *naturalna* funkcja sklejana, jesli w przedzialach $(-\inf, x_0)$ i $(x_N, +\inf)$ dana jest wielomianami $m - 1$ (a nie $2m - 1$).

Dalej bedziemy sie zajmowali funkcjami sklejanymi interpolujacymi dane punkty (x_i, y_i), tzn. takimi, ze

$$S(x_i) = y_i \quad dla\, wezlow\, (\Delta) \tag{3}$$

W calej klasie funkcji sklejanych zadanie to nie jest wyznaczone jednoznacznie. Wystarczy jednak ograniczyc sie do naturalnych funkcji sklejanych, dla ktorych jest prawdziwe ponizsze twierdzenie.

Twierdzenie

Jezeli wezly x_i sa rozne dla $i = 0, 1, \ldots, N$ oraz $1 \leq m \leq N + 1$, to dla dowolnych wartosci y_i istnieje dokladnie jedna naturalna funkcja sklejana S interpolujaca punkty (x_i, y_i), tzn. taka, ze $S(x_i) = y_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, N$.

Zajmijmy sie algorytmem wyznaczania naturalnej interpolacyjnej funkci sklejanej S stopnia 3.
Szukana funkcje mozemy przedstawic w kazdym z podprzedzialow w postaci

$$S(x) = a_i + b_i t + c_i t^2 + d_i t^3 \tag{4}$$

gdzie

$$t = x - x_i \quad dla\, x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{5}$$

Oczywiscie $a_i = S(x_i) = y_i$. Do wyznaczenia pozostaje zatem jeszcze $3N$ wspolczynnikow. Poniewaz S, S', S'' maja byc ciagle w wezlach $x_i (i = 1, 2, \ldots, N - 1)$, otrzymamy stad $3N - 3$ rownania. Brakujace warunki uzyskamy z zalozenia, ze S jest funkcja sklejana naturalna.
Z ciaglosci S'' w wezlach $x_i (i = 1, 2, \ldots, N - 1)$ wynikaja rownosci

$$2c_{i+1} = 2c_i + 6d_i h_i, \quad i = 0, 1, \ldots, N - 1 \tag{6}$$

gdzie

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad a \quad 2c_N = S''(x_N - 0) \tag{7}$$

A wiec

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{8}$$

Dalej, z ciaglosci S w punktach $x_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ i warunku interpolacyjnego $S(x_N) = y_N$ dostajemy dla $i = 0, 1, \ldots, N-1$

$$y_{i+1} = y_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \tag{9}$$

a stad i ze wzoru (8)

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{10}$$

Wreszcie z ciaglosci S' w wezlach $x_i (i = 1, 2, \ldots, N-1)$ otrzymujemy

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \quad i = 0, 1, \ldots, N-2 \tag{11}$$

Podstawiajac w miejsce b_i oraz d_i (11) i (8) dostajemy po przeksztalceniach

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} c_i^* + 2c_{i+1}^* + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} c_{i+2}^* = \left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right)/(h_i + h_{i+1}) \tag{12}$$

dla $i = 0, 1, \ldots, N-2$, gdzie $c_i^* = \frac{c_i}{3}$.

Jesli szukana funkcja jest naturalna funkcja sklejana, to $S''(x_0) = S''(x_N) = 0$ i stad $c_0^* = c_N^* = 0$. A zatem znalezienie wspolczynnikow (4) sprowadza sie w tym przypadku do rozwiazania ukladu rownan liniowych

$$\begin{bmatrix} 2 & w_1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ u_2 & 2 & w_2 & . & . & . & . & . \\ 0 & u_3 & 2 & w_3 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & u_{N-2} & 2 & w_{N-2} \\ 0 & . & . & . & . & 0 & u_{N-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ c_3^* \\ . \\ . \\ . \\ c_{N-2}^* \\ c_{N-1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ . \\ . \\ . \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$u_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad w_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i},$$
$$v_i = \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)/(h_{i-1} + h_i) \tag{13}$$

a nastepnie wyznaczenie pozostalych wspolczynnikow szukanej funkcji sklejanej ze wzorow (8) i (11).

1.3 Rozwiazanie ukladu rownan

Uklad rownan liniwych typu:

$$\begin{bmatrix} d_1 & w_1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ u_2 & d_2 & w_2 & . & . & . & . & . \\ 0 & u_3 & d_3 & w_3 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & u_{N-1} & d_{N-1} & w_{N-1} \\ 0 & . & . & . & . & 0 & u_N & d_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ . \\ . \\ . \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ . \\ . \\ . \\ v_{N-1} \\ v_N \end{bmatrix}$$

mozna rozwiazac w bardzo prosty sposob poprzez kolejne odejmowanie wierszy w celu wyeliminowania kolejnych zmiennych. To znaczy: od drugiego wiersza nalezy odjac pierwszy przemnozony przez

$\frac{u_2}{d_1}$. Pozbywamy sie w ten sposob zmiennej c_1 z drugiego rownania. Powtarzajac te czynnosc w ostatnim rownaniu otrzymamy rownanie na c_N. Nastepnie idac do gory bedziemy mogli obliczyc wszystkie wspolczynniki c_i. Algorytm wyglada nastepujaco:

$$
\begin{aligned}
&for \quad i = 2 \quad to \quad n \quad do \\
&v[i] = v[i] - v[i-1] * \frac{u[i]}{d[i-1]} \\
&d[i] = d[i] - w[i-1] * \frac{u[i]}{d[i-1]} \\
&u[i] = 0. \\
&for \quad i = n \quad downto \quad 1 \quad do \\
&c[i] = \frac{v[i] - w[i] * c[i+1]}{d[i]}
\end{aligned}
$$