Zastosowania transformaty Fouriera część druga: splatanie, filtr Wienera

Metody Numeryczne II A

Jakub Narębski

09.05.2001 r.

1 Splatanie i odplatanie przy użyciu transformaty Fouriera

1.1 Własności splotu

Splotem dwu funkcji $f(t)$ i $g(t)$ nazywamy funkcję

$$(f \otimes g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f(\tau) g(t-\tau) \tag{1}$$

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1 (o splocie) *Transformata Fouriera splotu dwu funkcji f i g jest iloczynem transformat Fouriera czynników:*

$$\begin{gathered} \mathcal{FT}[f \otimes g](f) = \mathcal{FT}[f](t)\,\mathcal{FT}[g](t), \\ (F \otimes G)(f) = F(f)G(f). \end{gathered} \tag{2}$$

Splot jest operacją przemienną, tzn. $r \otimes s = s \otimes r$. Zazwyczaj jednak w zastosowaniach te dwie splatane funkcje mają inne znaczenie. Jedna z nich, powiedzmy s, reprezentuje „prawdziwy" sygnał (niezaburzone wyniki) i jest funkcją o (przynajmniej teoretycznie) nieograniczonej dziedzinie. Funkcja r (druga funkcja) jest natomiast funkcją odpowiedzi aparatury, i ma skończoną dziedzinę, zazwyczaj odcinek zawierający zero. Inaczej mówiąc, funkcja ta ma skończoną szerokość.

Operacja splotu $r \otimes s$ opisuje rozmycie sygnału (danych) s zgodnie z przepisem danym funkcją odpowiedzi r. Np. dla funkcji odpowiedzi będącej deltą Diraca dla czasu t_0 tzn. $r(t) = \delta(t - t_0)$, splot $r \otimes s$ daje sygnał przesunięty o t_0: $(r \otimes s)(t) = s(t - t_0)$.

W przypadku dyskretnym sygnał $s(t)$ jest reprezentowany przez wartości s_k w punktach próbkowania $t_k = t_0 + k\Delta$. Funkcja odpowiedzi jest także zadana przez wartości w dyskretnych punktach r_k. W typowych zastosowaniach funkcja odpowiedzi ma skończony czas trwania M, tzn. jest różna od zera tylko dla $-M/2 < k \leq M/2$. Wówczas dyskretny splot zdefiniowany jest wzorem:

$$(r \otimes s)_j := \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} r_k s_{j-k} \tag{3}$$

Zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 2 (o splocie dyskretnym) *Jeśli sygnał s_j jest okresowy z okresem N, tak że jest ściśle określony przez N wartości $s_0, \ldots, s_{N-1}$, to transformata Fouriera jego splotu z funkcją odpowiedzi r_k o czasie trwania (szerokości) N (tzn. $r_k \neq 0 \iff -N/2 < k \leq N/2$) zadana jest wzorem:*

$$\begin{gathered} \mathcal{FT}[r \otimes s]_j = \mathcal{FT}[r]_j \mathcal{FT}[s]_j, \\ (R \otimes S)_j = R_j S_j, \end{gathered} \tag{4}$$

gdzie $\mathcal{FT}[r]$ jest transformatą Fouriera wartości r_k $(k = 0, \ldots, N-1)$ ułożonych zgodnie ze wzorem $r_{N-k} \equiv r_{-k}$ dla $k > N/2$.

Zazwyczaj funkcja odpowiedzi r, czy to w przypadku ciągłym, czy też dyskretnym, jest znormalizowana, tzn. ma jednostkowe pole powierzchni. Przykładem [nieznormalizowanych] funkcji odpowiedzi są funkcja Gaussa $\exp(-x^2/\sigma^2)$ i funkcja schodkowa $\Theta(a - |x|)$.

1.2 Uwzględnianie efektów brzegowych za pomocą uzupełniania zerami

W założeniach twierdzenia 2 o splocie dyskretnym znajduje się żądanie, by sygnał był okresowy oraz by funkcja odpowiedzi miała szerokość równą długości (okresowi) sygnału. Często chcemy stosować twierdzenie o splocie (do splatania i rozplatania) dla funkcji (danych) nie spełniających tych warunków.

Jeśli chodzi o warunek narzucany na funkcję odpowiedzi r_k, to nie stanowi on kłopotu. Szerokość funkcji odpowiedzi M jest mniejsza, zazwyczaj dużo mniejsza od długości sygnału N: $N \ll M$. Wystarczy zatem dopełnić funkcję r zerami do szerokości N, tzn. postawić $r_k = 0$ dla $-N/2 < k < M/2 \wedge M/2 \leq k \leq N/2$ (pamiętając o tym, że r_k zawijamy, by mieć $k = 0, \dots, N-1$).

Nieco kłopotu jest natomiast z warunkiem na s. Zazwyczaj dane s traktujemy jako wycinek nieskończonego w czasie sygnału. Dla funkcji okresowej i funkcji odpowiedzi o skończonej szerokości wartości z początku okresu splatane są z wartościami z końca okresu. Aby tego uniknąć należy sygnał s dopełnić zerami na odpowiedniej długości; splot z zerem jest równy zeru: $f \otimes 0 = 0$.

Aby uniknąć fałszowania splotu na początku przedziału należy zatem dopełnić sygnał tyloma zerami, ile wynosi największy ujemny indeks, taki że r_{-k} jest różne od zera. Aby uniknąć fałszowania wyniku na końcu przedziału (splatania ostatniej wartości z wartościami z początku) należy natomiast dopełnić sygnał tyloma zerami, ile wynosi największy dodatni indeks, taki że r_k jest różne od zera. Podsumowując: należy dopełnić większą z szerokości „ujemnej" M_- i „dodatniej" M_+ funkcji odpowiedzi r, gdzie

$$M_- = \min\{k \in \mathbb{N}\colon r_{-k} \neq 0\}, \tag{5a}$$

$$M_+ = \min\{k \in \mathbb{N}\colon r_k \quad \neq 0\}. \tag{5b}$$

Dla symetrycznej funkcji odpowiedzi potrzeba dopełnić sygnał $M/2$ (gdzie M jest szerokością funkcji r) zerami, by uniknąć fałszowania splotu.

Przy stosowaniu algorytmu Cooleya–Tukeya szybkiej transformaty Fouriera należy dodatkowo po dopełnieniu zerami w celu uniknięcia fałszowania splotu dopełnić zerami zarówno sygnał jak i funkcję odpowiedzi (pamiętając o „zawinięciu" funkcji odpowiedzi) zerami do najbliższej potęgi dwójki.

Wynik splotu dla indeksów, dla których s było wypełnione zerami nie jest znaczący (jest to wynik splatania końca z danymi z początku) i należy go pominąć.

1.3 Odplatanie przy użyciu FFT

Mamy dany sygnał zadany za pomocą N liczb rzeczywistych $s_k, k = 0, \dots, N-1$ (odpowiednio dopełniony zerami) i funkcję odpowiedzi dopełnioną zerami do długości N, z wartościami „zawiniętymi", tak że niezerowe wartości są skoncentrowane na początku i na końcu tablicy. Możemy obliczyć dyskretny splot $r \otimes s$ używając FFT do obliczenia dyskretnej transformaty Fouriera r i s, następnie mnożąc te transformaty przez siebie (pamiętając, że składają się one z liczb *zespolonych*) i wyznaczając wynik wyliczając odwrotną transformatę Fouriera (rzeczywistą) iloczynu.

Rozplataniem (odplataniem) nazywamy procedurę odwrotną do splatania. Mamy dany wynik doświadczenia (z aparatury) $c = r \otimes s$ oraz funkcję odpowiedzi układu pomiarowego r (lub jej przybliżenie) i chcemy odzyskać sygnał s. Dla splotu dyskretnego rozplatanie w dziedzinie czasowej wymaga rozwiązania układu N równań; jest to zazwyczaj nierealistyczne. Przy użyciu transformaty Fouriera możemy uzyskać transformatę Fouriera oryginalnego sygnału (niezaburzonych przez aparaturę pomiarową danych) przez podzielenie transformatę Fouriera wyniku przez transformatę Fouriera funkcji odpowiedzi.

Procedura ta może się nie powieść *matematycznie* gdy transformata Fouriera funkcji odpowiedzi R_n jest równa dokładnie zero dla pewnych wartości n, tak że nie możemy przez nią podzielić. Oznacza to, że przy splataniu (stosując dany układ pomiarowy) utraciliśmy informacje o pewnych częstościach oryginalnego sygnału. (Należy je zatem położyć równe zeru, jeśli napotkamy na taką sytuację — odzyskany sygnał nie będzie wtedy dokładny). Poza tym metoda ta wrażliwa jest na szumy w danych wejściowych oraz na dokładność znajomości funkcji odpowiedzi. W niektórych przypadkach odplatanie może dać nonsensowne wyniki: należy wtedy zastosować *optymalne filtrowanie*, które jest omówione w rozdziale 2.

Możemy przy użyciu algorytmu obliczającego zespoloną transformatę Fouriera wyliczyć transformatę dwu funkcji (tablic) rzeczywistych. Korzystamy z faktu, że dla funkcji rzeczywistej f ($f_k \in \mathbb{R}$) transformata Fouriera spełnia warunek

$$F(-f_n) \equiv F_{N-n} = (F_n)^* \equiv [F(f)]^*, \tag{6}$$

zaś dla funkcji czysto urojonej g ($g_k \in \imath\mathbb{R}$) mamy

$$G(-f_n) \equiv G_{N-n} = -(G_n)^* \equiv -[G(f)]^*. \tag{7}$$

Zatem możemy obliczyć transformatę Fouriera dwu funkcji rzeczywistych na raz (tak jak np. przy splataniu i odplataniu) zapisując te funkcje jako odpowiednio część rzeczywistą i urojoną zespolonej funkcji (tablicy) $h_k = f_k + \imath g_k$, licząc zepoloną transformatę Fouriera i odtwarzając transformaty oryginalnych funkcji korzystając z własności (6) i (7):

$$F_k = \frac{1}{2}(\Re H_k + \Re H_{N-k}) + \imath\,\frac{1}{2}(\Im H_k - \Im H_{N-k}), \tag{8}$$

$$G_k = \frac{1}{2}(\Im H_k - \Im H_{N-k}) - \imath\,\frac{1}{2}(\Re H_k + \Re H_{N-k}), \tag{9}$$

dla $0 < k < N/2$. Po dalsze szczegóły odsyłam do [1].

2 Optymalny filtr Wienera przy użyciu FFT

2.1 Filtr Wienera

Czasami potrzebujemy znaleźć oryginalny sygnał mając dany zaszumiony sygnał z aparatury pomiarowej (aparatura rozmywa sygnał zgodnie z funkcją odpowiedzi). Oznaczając oryginalny sygnał przez $s(t)$, funkcję odpowiedzi aparatury przez $r(t)$, a szum przez $n(t)$, chcemy znaleźć sygnał $s(t)$ (lub jego dobre przybliżenie) mając dane $r(t)$ oraz $c(t) = r(t) \otimes s(t) + n(t)$.

Proste odplecenie zgodnie ze wzorem $S(f) = C(f)/R(f) - N(f)/R(f)$ nie daje oczekiwanych wyników, gdyż jeśli $R(f)$ jest małe to wzmacniany jest zarówno sygnał, jak i szum.

W celu obliczenie $s(t)$ znajdujemy *filtr optymalny* (*phi*(t) w dziedzinie czasowej, $\Phi(f)$ w dziedzinie częstości) taki że $\widetilde{s}(t)$ zadane wzorem (na transformatę Fouriera):

$$\widetilde{S}(f) = \frac{C(f)\Phi(f)}{R(f)} \tag{10}$$

(gdzie wielkie litery oznaczają odpowiednie transformaty Fouriera), jest bliskie w sensie odległości w $\mathcal{L}^2$ oryginalnemu sygnałowi $s(f)$, tzn. takie by

$$\|\widetilde{s} - s\|^2_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{s}(t) - s(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{S}(f) - S(f)|^2\, df \quad \text{było minimalne.} \tag{11}$$

Wprowadźmy oznaczenie $h = r \otimes s$ na splot sygnału z funkcją odpowiedzi. Zakładając, że H jest nieskorelowane z szumem N, oraz że filtr Φ jest funkcją rzeczywistą dostajemy następujący wzór na filtr Wienera:

$$\Phi(f) = \frac{|H(f)|^2}{|H(f)|^2 + |N(f)|^2}. \tag{12}$$

2.2 Znajdowanie przybliżeń do obliczenia filtru Wienera

Aby znaleźć filtr Wienera musimy mieć jakiś sposób szacowania niezależnie $|H|^2$ i $|N|^2$. Dany mamy tylko mierzony sygnał C. Możemy wyznaczyć te wielkości obliczając widmo mocy sygnału C (dla dodatnich częstości), które jest proporcjonalne do sumy $|H|^2 + |N|^2$:

$$|H(f)|^2 + |N(f)|^2 \approx P_c(f) = |C(f)|^2 \quad 0 \le f < f_c. \tag{13}$$

Wykres widma mocy będzie zazwyczaj pokazywał widmo sygnału H skoncentrowane wokół pewnej częstości (lub pewnych częstości) wystające ponad ciągłe widmo szumu (najczęściej stałe lub wolnozmienne). Na podstawie tego widma możemy wyznaczyć jakiś model na $H(f)$ oraz przybliżenie na widmo szumu N. Filtr jest symetryczny w dziedzinie częstości; dopełniamy go ze wzoru $\Phi(-f) = \Phi(f)$.

Ponieważ wzór na filtr Wienera uzyskuje się za pomocą procedury minimalizacji, jakość filtrowania zależy *kwadratowo* od dokładności filtru. Zatem nawet zgrubnie wyznaczony filtr optymalny daje dobre wyniki. **Uwaga:** nie należy stosować filtrowania optymalnego iteracyjnie: dalsze stosowanie nie przynosi poprawy, a procedura iteracyjna zbieżna jest do sygnału o $H(f) \equiv 0$.

2.3 Iteracyjne odplatanie bez potrzeby użycia FFT

Można także próbować odtworzyć sygnał metodą iteracyjną. W tym celu odejmujemy splot z funkcją odpowiedzi. Przyjrzyjmy się równaniu iteracyjnemu[2]:

$$q^{(k+1)} = q^{(k)} + (c - r \otimes q^{(k)}), \tag{14}$$

gdzie k jest indeksem iteracji ($q^{(0)} = c$), $q^{(k)}$ estymacją sygnału dla k–tej iteracji, c mierzonym sygnałem, a r funkcją odpowiedzi impulsowej.

Widzimy, że w miarę wzrostu indeksu iteracji k różnica $(c - r \otimes q^{(k)})$ zbliża się do zera i pozostaje s, czyli oryginalny sygnał. Stosując tę metodę nie musimy w ogóle używać transformaty Fouriera, gdyż splot możemy wyliczać bezpośrednio z definicji w dziedzinie czasowej. Zazwyczaj potrzeba niewielu iteracji do uzyskania optymalnego wyniku; dalsze stosowanie wzoru iteracyjnego powoduje „zniszczenie" danych.

Oryginalnie metoda ta wymyślona została do odplatania funkcji odpowiedzi (zazwyczaj funkcji Gaussa) z obrazów CCD w astronomii.

Jakub Narębski, Paweł Jankowski

Literatura

[1] „Numerical Recipies in C: the Art of Scientific Computing", `http://www.nr.com`.

[2] C. D. Watkins, A. Sadun, S/ Marenka: „Nowoczesne metody przetwarzania obrazu".