1 Wstep

Przy pomocy prostych przykladow chcielibysmy zilustrowac, ze nie kazdy poprawny matematycznie algorytm obliczania danego wzoru jest poprawny numerycznie. Czesto uzycie zlego algorytmu prowadzi do znacznego bledu.

1.1 Rownanie kwadratowe

$$x^2 - 2px + q = 0 \tag{1}$$

W szkole stosuje sie algorytm:

$$\begin{aligned} x1 &= p + \sqrt{p \cdot p - q} \\ x2 &= p - \sqrt{p \cdot p - q} \end{aligned} \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

Poprawny algorytm wyglada nastepujaco:
if $p \geq 0$ then

$$\begin{aligned} x1 &= p + \sqrt{p \cdot p - q} \\ x2 &= q/x1 \end{aligned} \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

if $p < 0$ then

$$\begin{aligned} x2 &= p - \sqrt{p \cdot p - q} \\ x1 &= q/x2 \end{aligned} \tag{6}$$
$$\tag{7}$$

Kiedy algorytm 'szkolny' jest niepoprawny?
Moze on generowac znaczny blad w chwili gdy np. $p \cdot p \gg q$.

Zadanie: poszukac takich wartosci p i q, dla ktorych algorytmy daja rozne wyniki.

1.2 Wzor rekurencyjny

Zauwazmy, ze dla
$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803398$
zachodzi wzor rekurencyjny

$$\phi^{n+1} = \phi^{n-1} - \phi^n \tag{8}$$

Tymczasem zastosowanie wzoru rekurencyjnego wcale nie daje prawidlowych wynikow.

Zadanie: sprawdzic od jakiej wartosci n wzor rekurencyjny nie daje wlasciwych wynikow.

1.3 Szacowanie bledu algorytmu na przykladzie wzoru $a^2 - b^2$

Istnieja dwa algorytmy obliczania wzoru $a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned} &a^2 - b^2 \\ &(a-b)(a+b) \end{aligned} \tag{9}$$

Kazde dzialanie numeryczne generuje pewien blad w porownaniu do rzeczywistej wartosci wyniku dzialania:

$$\begin{aligned} fl(a+b) &= (a+b)(1+\epsilon) \\ fl(a*b) &= (a*b)(1+\epsilon) \\ fl(\sqrt{a}) &= \sqrt{s}(1+\epsilon), \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie poprzez $fl(a \Box b)$ oznaczamy wynik numerycznego dzialania $\Box$.

Oszacujmy bledy otrzymane w obu algorytmach:

$$
\begin{aligned}
fl(a^2 - b^2) &= (a * a(1+\epsilon_1) - b * b(1+\epsilon_2))(1+\epsilon_3) \\
&= (a^2 - b^2)\left(1 + \frac{a^2\epsilon_1 - b^2\epsilon_2}{a^2 - b^2}\right)(1+\epsilon_3) \\
&= (a^2 - b^2)(1+\delta),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

gdzie $\delta = \frac{a^2\epsilon_1 - b^2\epsilon_2}{a^2 - b^2}$. Jezeli a^2 jest odpowiednio bliskie b^2, a ϵ_1 i ϵ_2 maja przeciwne znaki, to blad wzgledny δ wyniku otrzymanego pierwszym algorytmem moze byc dowolnie duzy.

Nie jest to prawda w przypadku drugiego algorytmu:

$$
\begin{aligned}
fl((a-b)(a+b)) &= ((a-b)(1+\epsilon_1)(a+b)(1+\epsilon_2))(1+\epsilon_3) \\
&= (a^2 - b^2)(1+\delta),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

gdzie $\delta \leq |\epsilon_1| + |\epsilon_2| + |\epsilon_3|$.

1.4 Exponens

Wartosc funkcji wykladniczej mozna liczyc korzystajac z rozwiniecia $\exp(x)$ w szereg:

$$
\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{13}
$$

Niestety wzor ten daje bledne wyniki dla wielu ujemnych wartosci x. Wtedy nalezy skorzystac z wzoru:

$$
\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}. \tag{14}
$$

Zadanie: sprawdzic dla jakich wartosci x wzor 13 daje bledne wyniki.