Przypomnienie

09.12.15 r.

$S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ - zbiór dostępnych stanów.

Stan układu w chwili $n=0$ jest wektorem.

$$s(0) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$ gdzie p_i jest prawdopodobieństwem tego, że układ jest w stanie s_i i $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Ewolucja tego układu jest zadana macierzą stochastyczną $P = (p_{ij})$, gdzie p_{ij} jest prawdopodobieństwem przejścia ze stanu s_j do stanu s_i: $\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = 1$.

Stan $s(n)$ w chwili n jest dany przez: $s(n) = P^n \cdot s(0)$

Definicja (Łańcuch Markowa).

Niech (Ω, F, P) będzie przestrzenią probabilistyczną oraz niech S będzie zbiorem skończonym bądź przeliczalnym.

Niech $(X_i)_{i=0}^{\infty}$ będzie ciągiem zmiennych losowych na przestrzeni Ω o wartościach w zbiorze S. Mówimy, że ciąg $(X_i)_i^{\infty}$ jest łańcuchem Markowa, jeśli:

$$P(X_n = s_{i_n} \mid X_{n-1} = s_{i_{n-1}}, X_{n-2} = s_{i_{n-2}}, \dots, X_0 = s_{i_0}) = P(X_n = s_{i_n} \mid X_{n-1} = s_{i_{n-1}}),$$

gdzie $s_{i_0}, s_{i_1}, \dots, s_{i_n} \in S$, a $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$.

Uwaga.

Łańcuch Markowa jest matematycznym modelem ewolucji stochastycznej układu bez pamięci (pamięta tylko swój ~~poprzedni~~ ostatni stan).

X_n opisuje stan układu w chwili n.

$\forall n \in \mathbb{N}$ definiujemy macierz przejścia $P(n) = (p(n)_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$

gdzie $p(n)_{ij} = P(X_n = s_i \mid X_{n-1} = s_j)$

Definicja.

Mówimy, że łańcuch Markowa jest jednorodny jeśli $P(n)$ nie zależy od n. Oznaczamy $P(n) = P$.

Schemat Bernoulliego.

X – zmienna przyjmująca wartość 0 z prawd. q oraz 1 z prawd. p.

$X_1, X_2, X_3, \dots$ – niezależne zmienne losowe j.w.

Niech $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ – zmienna o rozkładzie Bernoulliego

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Czy $\frac{S_n}{n}$ zbiega do p?

Twierdzenie. (Mocne prawo wielkich liczb).

Z prawdopodobieństwem równym 1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = p$.

Twierdzenie. (Słaba wersja).

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

Dowód.

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq p+\varepsilon\right) = P(S_n \geq n(p+\varepsilon)) = \sum_{n(p+\varepsilon)\leq k \leq n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \left\{\begin{array}{l}\text{wprowadźmy} \\ \lambda>0,\ \text{zauważmy} \\ -\lambda(n(p+\varepsilon)-k) \geq 0\end{array}\right\}$$

$$\leq \sum_{n(p+\varepsilon)\leq k\leq n} e^{-\lambda(n(p+\varepsilon)-k)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{-\lambda(n(p+\varepsilon)-k)} p^k q^{n-k} =$$

$$= e^{-\lambda n\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} (pe^{\lambda q})^k \cdot (qe^{-\lambda p})^{n-k} \cdot \binom{n}{k} = e^{-\lambda n\varepsilon} (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{dw.} \\ pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p} \leq e^{\frac{\lambda^2}{8}}\end{array}\right\} \leq e^{-\lambda n\varepsilon} e^{\frac{\lambda^2 n}{8}} \{\lambda = 4\varepsilon\} \leq e^{-2n\varepsilon^2}$$

Wniosek:

$$\forall_{\varepsilon>0}: \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Słabe prawo wielkich liczb.

Od tej pory będziemy zakładać, że $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa. Wprowadźmy wektora

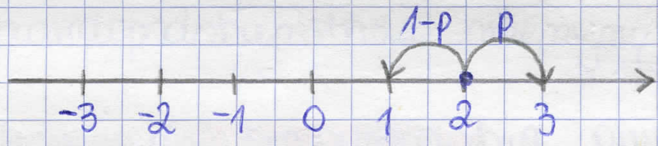
$$p^{(n)} = \begin{bmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ p_3^{(n)} \\ \vdots \end{bmatrix}, \text{ gdzie } p_i^{(n)} = P(X_n = s_i)$$

wzór na prawdopod. całkowite

Wówczas $p_i^{(n+1)} = P(X_{n+1} = s_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X_{n+1} = s_i \mid X_n = s_j) \cdot P(X_n = s_j) =$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}\, p_j^{(n)} \Rightarrow p^{(n+1)} = P \cdot p^{(n)} = \ldots = P^{n+1} p^{(0)}$$

Przykład. Błądzenie losowe na prostej.



$S = \mathbb{Z}$ - liczby całkowite

X_0 - zmienna losowa opisująca stan układu w chwili t_0.

Niech $(u_i)_{i=0}^{\infty}$ będzie rodziną zmiennych losowych przyjmujących wartości: $+1$ z prawdopodobieństwem p, -1 z prawdop. $1-p$.

Definiujemy rodzinę zmiennych losowych $X_n = X_{n-1} + u_{n+1}$.

Można sprawdzić, że $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ jest łańcuchem Markowa.

Stany chwilowe i stany powracające.

Przypuśćmy, że w chwili 0 jest $X_0 = s_j$. Rozważmy prawdopodobieństwo warunkowe $F_{ij} = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = s_i\} \mid X_0 = s_j\right)$

Definicja.

Mówimy, że stan s_i jest:

i) chwilowy, jeśli $F_{ii} < 1$ (przejdziemy przez ten stan

ii) powracający, jeśli $F_{ii} = 1$

Przykład:

$S = \{s_0, s_1\}$ $\quad P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix}$

Dla jakiego P s_0 jest a) chwilowy, b) powracający

$$F_{00} = p_{00} + \sum_{k=0}^{\infty} p_{01} p_{11}^{k} p_{10} = \begin{cases} p_{00} + \frac{p_{01} p_{10}}{1-p_{11}} & p_{11} < 1 \\ p_{00} & p_{11} = 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & p_{11} < 1 \\ p_{00} & p_{11} = 1 \end{cases}$$

Zauważmy, że $p_{00} + \frac{p_{01} p_{10}}{1-p_{11}} = \frac{p_{00}(1-p_{11}) + (1-p_{11}) p_{10}}{1-p_{11}} =$

$$= \frac{(1-p_{11})(p_{00}+p_{10})}{(1-p_{11})} = 1$$

$$\boxed{\begin{matrix} p_{00} + p_{10} = 1 \\ p_{01} + p_{11} = 1 \end{matrix}}$$

Widzimy, że s_0 jest: – powracający jeśli $p_{11} < 1$

– jeśli $p_{11} = 1$ oraz $p_{00} = 1$ to s_0 jest powracający

– $p_{11} = 1$ oraz $p_{00} < 1$ to s_0 jest stanem chwilowym

Rozważmy scenariusz (przejście z $s_j \to s_i$)

$k=0$ – układ jest w stanie s_j

$\left.\begin{matrix} k=1 \\ k=2 \\ \vdots \\ k=n-1 \end{matrix}\right\}$ – układ nie jest w stanie s_i

$k=n$ – układ jest w stanie s_i

Prawdopodobieństwo tego scenariusza oznaczamy

$$f(n)_{ij} = P(X_n = s_i, X_{n-1} \neq s_i, \dots, X_1 = s_i \mid X_0 = s_j)$$

Zauważmy, że: $F_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)_{ij}$

Wprowadźmy zmienną losową N_i, gdzie $N_i = \sum_{n=1}^{\infty} \chi\{X_n = s_i\}$.

Zauważmy, że N_i zlicza przejścia układu przez stan s_i

Twierdzenie.

$(X_i)_{i=1}^{\infty}$ ł.m. $\quad s_i \in S$

- s_i jest stanem chwilowym $\iff P(N_i = \infty \mid X_0 = s_0) = 0$.
- s_i jest stanem powracającym $\iff P(N_i = \infty \mid X_0 = s_0) = 1$.

Dowód.

Interesuje nas zbiór $\{\omega \in \Omega : N_j(\omega) = \infty\} \overset{\text{notacja}}{=} \{N_i = \infty\}$

$A_k = \{X_{n_j} = s_i$ dla pewnych $n_1 < n_2 < \ldots < n_k\}$

↑ zbiór zdarzeń elementarnych odpowiadających co najmniej k-krotnemu przejściu przez stan s_i.

$\{N_i = \infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \text{ "="} \lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=1}^{n} A_k$

Mamy $\overset{\text{więc}}{}$ równość: $P(N_0 = \infty | X_0 = s_i) = P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k | X_0 = s_i) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k | X_0 = s_i) =$

Ponieważ: $A_k = A_{k-1}$, to $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n = \lim_{n\to\infty} P(A_n | X_0 = s_i)$.

Zauważmy, że:

$P(A_n | X_0 = s_i) = \underset{\text{suma po scenariuszach}}{\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n}^{\infty}} \underbrace{f_{ii}(m_1) f_{ii}(m_2) \cdot \ldots \cdot f_{ii}(m_n)}_{\text{prawdopodobieństwo scenariusza}}$

np. $f_{55}(12)$ – jest stan 5, w 12-tym kroku znów przechodzimy przez 5

Scenariusz: Wychodzimy ze stanu s_1 na m_1 sekund, wracam, wychodzę na m_2 sekund, wracam, itd.

$= \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_{ii}(m)\right)^n = F_{ii}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 1 & F_{ii} = 1 \\ 0 & F_{ii} < 1 \end{cases}$

P – macierz stochastyczna (p_{ij})

$p_{ij}(n) = p_{ij}^{n}$ ← n-ta potęga; i – wiersz, j – kolumna

Twierdzenie.

$(X_i)_{i=1}^{\infty}$ – jednorodny łańcuch Markowa o macierzy stochastycznej P.

Wówczas s_i jest stanem chwilowym $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p(n)_{ii} < \infty$

Dowód.

Warunkowa wartość oczekiwana:

$\underbrace{(\Omega, \mathcal{F}, P)}$, $B \in \mathcal{F}$, zał., że $P(B) \neq 0$

$\mathcal{E}$-wartość oczekiwana

$\underbrace{(\Omega, \mathcal{F}, P_B)}$, gdzie $P_B(A) \equiv P(A|B)$.

przestrzeń probabilistyczna, która prowadzi do $\mathcal{E}_B$.

$\mathcal{E}_B$ - wartość oczekiwana ze względu na P_B

B - warunkowa wartość oczekiwana

$\mathcal{E}(\chi_A) = P(A)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(n)_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = s_i \mid X_0 = s_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{\{X_0 = s_i\}} (\chi_{\{X_n = s_i\}}) =$$

$$= \mathcal{E}_{\{X_0 = s_i\}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{X_n = s_i\}}\right) = \mathcal{E}_{\{X_0 = s_i\}} (N_i) = 1 \cdot P(N_i = 1 \mid X_0 = s_i) +$$

$$+ 2 \cdot P(N_i = 2 \mid X_0 = s_i) + \ldots + \infty \cdot P(N_i = \infty \mid X_0 = s_0)$$

Wniosek:

Jeśli $P(N_i = \infty \mid X_0 = s_i) = 1$ (stan powracający), bo $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)_{ii} = \infty$

Można wykazać, że:

$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)_{ii} < \infty \iff s_i$ jest stanem chwilowym

16.12. 1 kr.

Łańcuch Markowa $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ - zbiór stanów

Macierz stochastyczna $P_{ij} = P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i)$

nie zależy od n "łańcuch jednorodny"

Stan s_i jest chwilowy $\iff \sum_{n=1}^{\infty} p(n)_{ii} < \infty$

gdzie $p(n) = P^n_{ii}$ → i-ty element na diagonali

n-ta potęga macierzy P

Stan s_i jest powracający $\iff \sum_{n=1}^{\infty} p(n)_{ii} = \infty$

Klasyfikacja stanów, będziemy losować.

Zauważmy, że tylko dla parzystej liczby kroków mamy szansę wrócić do punktu wyjścia. Ponadto, żeby wrócić do punktu wyjścia to liczba kroków na prawo musi być równa liczbie kroków w lewo. Korzystając ze schematu Bernoulliego otrzymujemy wzór na $p(2n)_{0,0} = \binom{2n}{n} p^n \cdot (1-p)^n$

Szacujemy $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$ (*)

Korzystając ze wzoru Stirlinga: $n! \sim \sqrt{\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{\cancel{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{-n}} = \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\, n^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{4^n}{n^{1/2}}$$

W takim razie (*) jest zbieżny.

$\Updownarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(4p(1-p))^n}{n^{1/2}}$ jest zbieżny.

$$0 \leq p(1-p) = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2}$$

Stąd $\sum_{n=1}^{\infty} (4p(1-p))^n$ jest zbieżny dla $p \neq \frac{1}{2}$ gdyż jest to szereg geometryczny dla $q = 4p(1-p)$.

Tym bardziej: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{n^{1/2}} < \infty$

Wniosek:

Jeśli $p \neq \frac{1}{2}$ to stan 0 jest chwilowy.

Natomiast dla $p = \frac{1}{2}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \infty$,

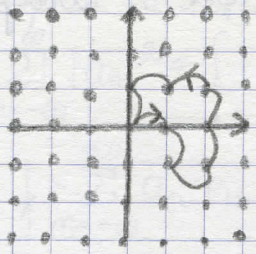
a więc 0 jest stanem powracającym.

Przejście do większej liczby wymiarów.

Łatwo wykazać, że klasyfikacja stanów sprowadza się do badania zbieżności szeregu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n\right]^d \quad (**)$$

d – wymiar kraty, po której odbywa się spacer losowy



(**) jest zbieżny

$$\Updownarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[4p(1-p)]^{nd}}{n^{\frac{d}{2}}}$$

<u>Przypadek $d=2$:</u> • dla $p=\frac{1}{2}$ 0 jest stanem powracającym gdyż $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

• dla $p \neq \frac{1}{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(4p(1-p))^n}{n} < \infty$, a więc stan jest chwilowy

<u>Przypadek $d=3,4,\dots$:</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{n^{\frac{d}{2}}} < \infty$, a więc 0 jest stanem chwilowym niezależnie od p.

SZEREGI FOURIERA, TRANSFORMATA FOURIERA

f okresowa o okresie 2π.

Przykład.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N_1} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N_2} b_n \sin(nx); \quad a_n, b_n - \text{skalar}$$

Pytanie: jaką klasę funkcji okresowych można przedstawić w postaci szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$

Przestrzeń Hilberta; przykłady:

$l^2(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < \infty\}$, np. $a_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \frac{1}{n} & n\neq 0 \end{cases}$

$$\sum_{\substack{n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}}} \frac{1}{n^2} + 1 < \infty$$

Wykażemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$L^2([0,2\pi]) = \{f : [0,2\pi] \to \mathbb{C} : \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty\}$$

Zarówno $l^2(\mathbb{Z})$ jak i $L^2[0,2\pi]$ są wyposażone w iloczyn skalarny:

$$((a_n)|(b_n))_{l^2(\mathbb{Z})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{a_n} b_n$$

$$(f_1|f_2)_{L^2[0,2\pi]} = \int_0^{2\pi} \overline{f_1(t)} f_2(t)\,dt$$

Baza ortonormalna $l^2\mathbb{Z}$

$e^i \in l^2(\mathbb{Z})$, gdzie $e^i_n = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ 1 & i = n \end{cases}$

$e^1 \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow$ indeks 1 itd.

Uwaga: $(e^i|e^j)_{l^2(\mathbb{Z})} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

to $a = \sum_{n=\infty}^{+\infty} a_n \cdot e^n$, gdzie $a_n = (e^n|a)_{l^2(\mathbb{Z})}$

Baza ortonormalna w $L^2[0,2\pi]$

Zdefiniujmy $e_n \in L^2[0,2\pi]$, gdzie $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$

Stwierdzenie.

e_n jest układem ortonormalnym.

Dowód.

$$(e_n|e_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \cdot e^{imt}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2\pi(m-n)} e^{i(m-n)t} \Big|_0^{2\pi} = 0; & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Twierdzenie.

$L^2[0,2\pi]$ jest przestrzenią Hilberta, a układ $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną.

Co to oznacza:

Niech $f \in L^2[0,2\pi]$.

Zdefiniujmy współczynniki Fouriera:

$$a_n = (e_n|f)_{L^2[0,2\pi]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\,dt$$

Wniosek:

① $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

② $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot e_n$

Wyjaśnienie ②:

W przestrzeni $L^2[0,2\pi]$ mamy normę $\|\cdot\|$.

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$

$$f_N(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} a_n e^{int}$$

wówczas $\|f - f_N\| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ gdyż z ①

$$\sum_{|n|>N} |a_n|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

Przykład.

Współczynnik Fouriera funkcji $f(t)=t \quad t\in[0,2\pi]$

$$n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0,\quad a_n = (e_n|f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \underset{=h'}{e^{-int}} \cdot \underset{=f}{t}\, dt = \left\{ h = \frac{1}{-in} e^{-int} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(h\cdot f\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{-in} e^{-int} dt \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{-in} \cdot 2\pi \right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{-in}$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} t\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} \frac{4\pi^2}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} = \sqrt{2}\,\pi^{\frac{3}{2}}$$

$$\|f\|_{L^2[0,2\pi]} = \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{8\pi^3}{3}$$

Korzystając z ① mamy:

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{n^2} + 2\pi^3 = \frac{8\pi^3}{3} \Rightarrow 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^6}{6}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{n^2} + 2\pi^3$$

TRANSFORMATA FOURIERA

$$L^1(\mathbb{R}) = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt < \infty \}$$

Zdefiniujmy odwzorowanie:

$$L^1(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \hat{f} \in C_b(\mathbb{R})$$

funkcje ciągłe ograniczone na $\mathbb{R}$

gdzie $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t)\,dt$

Przykład:

$f(t) = e^{-|t|}$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} e^{-|t|}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t} e^{t} + \int_{0}^{+\infty} e^{-i\omega t} e^{-t}\,dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\omega} e^{t(1-i\omega)} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+i\omega} e^{-t(1+i\omega)} \Big|_{0}^{\infty} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2\pi}{1+\omega^2}$$

13.01.'15r. Przypomnienie:

$$L^1(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto \hat{f} \in C_b(\mathbb{R})$$ ciągłe ograniczone

gdzie $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t)\,dt$

Własności transformaty Fouriera

1.) $|\hat{f}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t)\,dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(t)|\,dt \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\|f\|_1}_{\text{norma 1 funkcji}}$

2.) $\hat{f}(\omega)$ jest ciągła

$$\lim_{\omega\to\omega_0} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\omega\to\omega_0} \int e^{-i\omega t} f(t)\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{z twierdzenia} \\ \text{o zbieżności} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\omega_0 t} f(t)\,dt = \hat{f}(\omega_0)$$

3.) Niech $f \in L^1(\mathbb{R})$ oraz $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Wówczas:

$$\hat{f'}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f'(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{całkujemy} \\ \text{przez części}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\underbrace{f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{\text{znika}} + i\omega \int e^{-i\omega t} f(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, i\omega\, \hat{f}(\omega)$$

4.) Jeśli $f(t), t \cdot f(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Wówczas $\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) \cdot -it\,\hat{f}(t)$

5.) Niech $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f \in L^1(\mathbb{R})$ ← oznacza, że funkcja jest całkowalna

Definiujemy $k(t) = f(at)$. Wówczas

$$\hat{k}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

↑ bezpośrednia konsekwencja tw. o zamianie zmiennych

Odwrotna transformata Fouriera.

Twierdzenie.

Niech $f \in L^1(\mathbb{R})$ będzie taka, że $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Wówczas:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{+i\omega t} \hat{f}(\omega)\,d\omega.$$

Dowód.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{+i\omega t} \hat{f}(\omega)\,d\omega = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\omega^2} e^{+i\omega t} \hat{f}(\omega)\,d\omega =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\omega^2} e^{+i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t'} f(t')\,dt'\,d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} f(t') \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\omega^2} e^{-i\omega(t'-t)}\,d\omega \right)}_{\substack{\text{transformata Fouriera} \\ \text{funkcji Gaussa} = e^{-\frac{(t-t')^2}{4\varepsilon}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}}} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}} f(t') e^{-\frac{(t-t')^2}{4\varepsilon}}\,dt' =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{t-t'}{2\sqrt{\varepsilon}} = t'' \Rightarrow t - t' = 2\sqrt{\varepsilon} \cdot t'' \Rightarrow t' = t - 2\sqrt{\varepsilon} \cdot t'' \\ dt' = 2\sqrt{\varepsilon}\,dt'' \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\varepsilon}} \int f(t - 2\sqrt{\varepsilon}\cdot t'') e^{-t''^2} dt \cdot 2\sqrt{\varepsilon} =$$

$$= f(t) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t''^2} dt = f(t)$$

Tożsamość Parsevala.

Twierdzenie.

Niech $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, tzn. $\int |f(t)| dt,\ \int |f(t)|^2 dt < \infty$.

Wówczas $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ oraz $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$.

Przypomnienie.

$L^2(\mathbb{R})$ jest przestrzenią z iloczynem skalarnym.

$$(f|g) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\omega)}\, g(\omega)\, dt$$

Oznaczenie.

$\hat{f} = F(f)$. Niech $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

$$(f_1 | F f_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f_1(\omega)} \left(\int_{\mathbb{R}} f_2(t) e^{-i\omega t} dt \right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\overline{\int f_1(\omega) e^{+i\omega t} dt} \right) f_2(\omega) d\omega = \int_{\mathbb{R}} \overline{(F^{-1} f_1)(\omega)}\, f_2(\omega) d\omega =$$

$$(F^{-1} f_1 | f_2)$$

$$\parallel$$

$$(f_1 | F f_2) = (F^* f_1 | f_2) \text{ "}\Rightarrow\text{" } \boxed{F^* = F^{-1}}$$

„Wniosek" transformaty Fouriera definiuje operator unitarny na $L^2(\mathbb{R})$

$$\|f_2\| = \|F f_1\|$$

tożsamość Parsevala

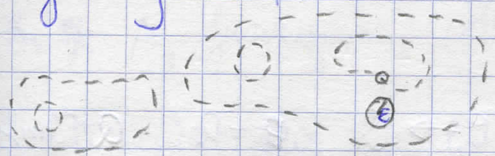
3.02. 9^{00}–13^{00}
– PISEMNY → (transf., szereg Fouriera, całki zespolone)

6.02. 9^{00}–13^{00}
– USTNY

Funkcje holomorficzne. 20.01.15r.

1.) Mówimy, że zbiór $O \subset \mathbb{C}$ jest otwarty, jeśli $\forall_{z_0 \in O}\ \exists_{\varepsilon>0} : K(z_0,\varepsilon) \subset O$, gdzie $K(z_0,\varepsilon) \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < \varepsilon\}$.

Przykłady zbiorów otwartych: - $K(z_0,\varepsilon)$ - jest otwarta



- $(O_i)_{i\in J}$ - rodzina zbiorów otwartych
  $\bigcup_{i\in J} O_i$ - jest zbiorem otwartym
- przecięcie skończonej liczby zbiorów jest zbiorem otwartym.

Definicja:

Niech $O \subset \mathbb{C}$ będzie podzbiorem otwartym oraz $f : O \to \mathbb{C}$.
Mówimy, że f jest funkcją holomorficzną w $z \in O$ jeśli istnieje granica ilorazów różnicowych $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \overset{ozn.}{=} f'(z)$.
Jeśli f jest holomorficzna w każdym punkcie $z \in O$ to mówimy, że f jest holomorficzną funkcją na O.

Przykłady.

- wielomiany

$f(z) = z^n$

$$\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}\Delta z + \binom{n}{2} z^{n-2} (\Delta z)^2 + \ldots + \binom{n}{n} (\Delta z)^n \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} nz^{n-1}$$

$(z^n)' = nz^{n-1}$ z^n - jest funkcją holomorficzną.

- $f(z) = e^z$, $\sin(z)$, $\cos(z)$ - są holomorficzne

Stwierdzenie

- $f, g : O \to \mathbb{C}$ - holomorficzne to $f+g$, $f \cdot g$ - są holomorficzne oraz $(f+g)' = f' + g'$, $(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$.
- $g \neq 0$ to $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
- $f : O_1 \to O_2$, $g : O_2 \to \mathbb{C}$ - holomorficzne

$g \circ f(z) = g(f(z))$ - jest holomorficzna oraz $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$.

Przykład funkcji, która nie jest holomorficzna:

$f(z) = \bar{z}$. $\quad \dfrac{\overline{z+\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \Big\} \leftarrow$ granica tego wyrażenia nie istnieje

Równania Cauchy-Riemanna.

$\Theta \ni z = x + iy \qquad f: \Theta \to \mathbb{C}$

$f(z) = P(x,y) + i\, Q(x,y)$, gdzie $Q, P: \Theta \to \mathbb{C} \qquad P = \mathrm{Re} f \quad Q = \mathrm{Im} f$

Jakie warunki muszą spełniać Q i P, żeby f była funkcją holomorficzną?

- $\Delta z = \Delta x$ - zbiegamy do zera po prostej rzeczywistej

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{P(x+\Delta x, y) - P(x,y)}{\Delta x} + i \frac{Q(x+\Delta x, y) - Q(x,y)}{\Delta x}$$

$$\xrightarrow[\Delta z \to 0]{} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

- $\Delta z = i \Delta y$ - zbiegamy do zera po prostej urojonej

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} \frac{1}{i} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{Równania Cauchy-Riemanna}$$

Można wykazać, że jeśli są spełnione warunki C-R, to f jest funkcją holomorficzną.

Przykład.

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{P(x,y)} + i \underbrace{e^x \sin y}_{Q(x,y)}$$

łatwo sprawdzić równania C-R.

Forma różniczkowa ~~jest~~ ω na $\Theta \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ jest formalną kombinacją elementów postaci $\omega(x,y) = f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy$, gdzie $f_1, f_2: \Theta \to \mathbb{R}$

Całkowanie form różniczkowych po krzywych zorientowanych.

Krzywa w O jest to odwzorowanie:

$\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow O \qquad \gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{bmatrix}$

x_1, y_2 są funkcjami różniczkowalnymi.

Z definicji całką z formy po krzywej zorientowanej γ nazywamy wyrażenie:

$$\int_\alpha^\beta \left(f_1(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + f_2(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_\gamma \omega$$

i oznaczamy symbolem $\int_\gamma \omega$.

Twierdzenie. (z analizy wektorowej, najprostsza wersja **twierdzenia Stokesa**).

Niech $\omega(x,y) = f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy$ będzie formą różniczkową na $O \subset \mathbb{R}^2$ oraz niech $S \subset O$ będzie podzbiorem zwartym.

Wówczas $\int_{\partial S} \omega = \int_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx\,dy$, np.

Uwaga: zmiana orientacji krzywej zmienia znak całki $\int_\gamma \omega$ na przeciwny.

Jak to się ma do funkcji holomorficznych?

$f : O \longrightarrow \mathbb{C}$ – holomorficzna

$f(z)\,dz = (P + iQ)(dx + i\,dy) = P\,dx - Q\,dy + i(Q\,dx + P\,dy)$

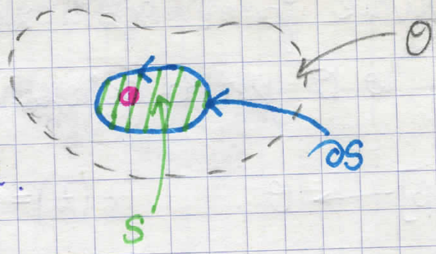
Twierdzenie.

Niech f, $S \subset \mathbb{C}$ – j.w. Wówczas $\int_{\partial S} f(z)\,dz = 0$.

$$\int_{\partial S} f(z)\,dz = \left(\int_{\partial S} P\,dx - Q\,dy \right) + i \left(\int_{\partial S} Q\,dx + P\,dy \right) =$$

$$= \left(\int_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx\,dy + i \int_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx\,dy \right) \overset{C-R}{=} 0.$$

Twierdzenie. Wzór Cauchy'ego: $(S \subset O)$



Niech $S \subset O$ oraz niech $z \in S \setminus \partial S$

oraz $f: O \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna.

Wtedy $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$.

Dowód.

Stosujemy poprzednie twierdzenie do funkcji

$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ i obszaru $S \setminus K(z, \varepsilon)$

$$0 = \int_{\partial(S \setminus K(z,\varepsilon))} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\partial S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{\partial K(} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f(z) \cdot 2\pi$$

$\zeta = z + \varepsilon e^{i\varphi}$ $\varphi \in [0, 2\pi]$ (— parametryzacja okręgu)

$$\int_{\partial K(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{i\varphi})}{\cancel{\varepsilon \cdot e^{i\varphi}}} i \cancel{\varepsilon e^{i\varphi}} d\varphi = i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{}$$

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} i 2\pi \cdot f(z)$$

Wniosek 1.: Funkcja holomorficzna jest ∞-wiele razy różniczkowalna w sensie zespolonym.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

Szeregi potęgowe:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — szereg zbieżny (=) $|z| < r$, gdzie r — jest promieniem zbieżności szeregu

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} := \inf_k \sup_{n > k} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Szeregi potęgowe zadają funkcję holomorficzną na $K(0, r)$.

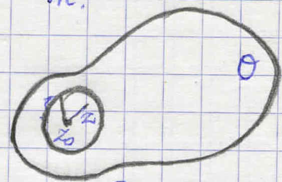
Ogólnie rozważa się szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \rightsquigarrow K(z_0, r)$

Twierdzenie o rozwijaniu funkcji w szereg Taylora:

Niech $f:\Theta\to\mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną, $z_0\in\Theta$ tak, że $K(z_0,r)\subset\Theta$. Wówczas:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \text{ gdzie } a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \text{ oraz } z\in K(z_0,r).$$

Dowód: $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(z_0,r)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi$



$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\left(\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(z_0,r)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\,d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{2\pi i}\,\frac{(z-z_0)^n}{n!}\cdot\int_{\partial K(z_0,r)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{=a_n}(z-z_0)^n$$

Szeregi Laurenta:

Rozważmy szereg postaci

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n z^n=\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Powyższy szereg jest zbieżny jeśli: $r<|z|<R$,

gdzie $\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$ $\quad r=\limsup_{n\to-\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$

Szereg potęgowy zadaje funkcję holomorficzną na $\mathcal{R}(0,r,R)=\{z\in\mathbb{C}: r<|z|<R\}$ – pierścień.

Ogólniej $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ i odpowiadające im pierścienie zbieżności $\mathcal{R}(z_0,r,R)$.

Twierdzenie o rozwijaniu funkcji holomorficznej w szereg Laurenta.

Niech $f:\Theta\to\mathbb{C}$ – holomorficzna, $z_0\in\Theta$, $r,R\in\mathbb{R}_+$, t. że $\mathcal{R}(z_0,r,R)\subset\Theta$. Wówczas $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$, gdzie

$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(z_0,\varrho)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}$, gdzie $r<\varrho<R$

gdzie $z\in\mathcal{R}(z_0,r,R)$