

**Analiza III**  
**Praca domowa**

---

**Praca domowa I**

Javier de Lucas

Twierdzenie Stokesa

**Zadanie 1.** Niech

$$\omega := \left( \sin x - \frac{y^3}{3} \right) dx + \left( \cos y + \frac{x^3}{3} \right) dy + xyz dz$$

i

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2, z = 1\}$$

Sprawdzić, że

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega.$$

**Zadanie 2.** Niech

$$\omega = x dx + x dy + 2y dz$$

i

$$\partial C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 = x^2 + y^2, z = x\}$$

Sprawdzić, że

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega.$$

dla odpowiednio wybranego  $C$ .

**Zadanie 3.** Niech

$$\omega := -3xz^2 dy \wedge dz + z^3 dx \wedge dy$$

i

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}$$

Sprawdzić, że

$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega.$$

**Zadanie 4.** Sprawdzić twierdzenie Stokesa dla

$$\omega := x^3 e^y dy \wedge dz - 3x^2 e^y dz \wedge dx, \quad C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

**Analiza III**  
**Praca domowa**

---

**Zadanie 5.** Sprawdzić twierdzenie Stokesa  $\int_K df = f(b) - f(a)$  dla

- $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9, y \geq 0\}$ ,  $a = (-3, 0)$ ,  $b = (3, 0)$  i  $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^3$
- $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 16, x = y, x \geq 0, z \geq 0\}$ ,  $a = (0, 0, 4)$ ,  $b = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$ ,  $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$
- $K = \{(x, y, z) : x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = t, t \in [0, \pi], t_a = 0, t_b = \pi\}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 + zx$

**Zadanie 6.** Sprawdzić twierdzenie Stokesa (orientacja!)  $\int_S d\omega = \oint_K \omega$  gdzie  $K$  jest brzegiem  $S$  (tj.  $K = \partial S$ ) dla

- $S = \{(x, y) : |x|, |y| \leq 3\}$ ,  $\omega = x^3 dy - y^3 dx$
- $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$ ,  $\omega = (x^2 + y^2)(x dy - y dx)$
- $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$ ,  $\omega = x dy - y dx + (x - y) dz$

**Zadanie 7.** Sprawdzić twierdzenie Stokesa  $\int_V d\omega = \oint_S \omega$  gdzie  $S$  jest brzegiem  $V$  (tj.  $K = \partial V$ ) dla

- $V = \{(x, y, z) : |x|, |y|, |z| \leq 2\}$ ,  $x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy$
- $V = \{(x, y, z) : x^3 + y^2 \leq 4, |z| \leq 2\}$ ,  $xy^2 z^2 dy \wedge dz + yz^2 x^2 dz \wedge dx + zx^2 y^2 dx \wedge dy$