

Zadania do wykładu algebra z geometrią

zestaw IV - wyznaczniki

February 28, 2012

Zadanie 1. Wykazać, że dla dowolnych macierzy A i B zachodzi

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Zadanie 2. Wykazać, że ślad i wyznacznik dowolnej macierzy $n \times n$ A są niezmiennikami transformacji podobieństwa (zmiany bazy):

$$A \rightarrow A' = SAS^{-1}$$

gdzie S jest dowolną macierzą odwracalną.

Zadanie 3. Sprawdzić obliczeniem, że dla macierzy 2×2 mamy

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \text{Tr}(A) + \text{Idet}(A)$$

gdzie I jest macierzą jednostkową. Powyższy wielomian od λ zwany jest *wielomianem charakterystycznym macierzy A* . Wykazać, że macierz A spełnia równanie (na x):

$$x^2 - x \text{Tr}(A) + \text{Idet}(A) = 0$$

Zadanie 4. Wykazać, że nie istnieją skończenie wymiarowe macierze A i B takie, że

$$[A, B] := AB - BA = \lambda I$$

gdzie I to macierz jednostkowa, a $\lambda \neq 0$. $[A, B]$ zwany jest komutatorem macierzy A i B .

Poza powyższymi zadaniami należy zrobić zadania, w których ćwiczy się techniki obliczania wyznaczników: 276b, 278a, 278c, 279c, 280a, 280h ze zbioru zadań "Od liczb zespolonych do kwadryk. Zbiór zadań z algebry z rozwiązaniami." pod redakcją J. Jezierskiego.