1 Wykład 03.10.2016.

Przykład 1.1. Niech $\overbrace{S}^{\text{np. Sfera}}$ będzie brzegiem obszaru $\overbrace{V}^{np.Kula} \subset \mathbb{R}^3$, a $\overrightarrow{E}$ będzie polem elektromagnetycznym zadanym przez rozkład ładunku $\rho(x,y,z) \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\oint_S \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \left(\begin{array}{l} \text{całkowity ładunek} \\ \text{zamknięty wewnątrz S} \end{array} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV$$

Specyfikacja tw. Stokesa daje: $\int_V \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} dV$ gdzie: $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$

Skoro $V \subset \mathbb{R}^3$ jest dowolnym obszarem:

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \tfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \text{-Prawo Gaussa w postaci różniczkowej}$$

Tło algebraiczne tw. Stokesa

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$; $\dim V < \infty$. Notacja: Symbol V^k będzie oznaczał k-krotny iloczyn kartezjański $\underbrace{V \times V \times V \times V \times \ldots \times V}_{\text{k-krotnie}}$.

Mówimy, że funkcja $T : V^k \to \mathbb{R}$ jest $k-$liniowa jeśli:

- $T(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_{i'}, v_{i+1}, \ldots, v_k) =$
  $= T(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k) + T(v_1, \ldots, v_{i'}, v_{i+1}, \ldots, v_k)$

•• $T(v_1, \ldots, av_i, \ldots, v_k) = aT(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$

dla wszystkich $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $v_j \in V$ oraz $a \in \mathbb{R}$. Zbiór takich funkcji oznaczamy $J^k(V)$. Zbiór takich funkcji tworzy przestrzeń wektorową. Element $T \in J^k(V)$ nazywać będziemy $k-$tensorem.

Przykład 1.2.

1. Dla $k = 1$: $J^1(V) = V^*$ - przestrzeń sprzężona do V.
2. $V = \mathbb{R}_n[\cdot]$; rozważmy funkcjonał $\varphi \in V^*$ dany wzorem $\varphi(w) = w(1)$. Niech $T \in J^2(V)$ będzie 2-tensorem danym wzorem:
$$T(w_1, w_2) = \int_0^1 w_1(t) w_2(t) dt$$
3. $S \in J^3(V)$ gdzie:
$$S(w_1, w_2, w_3) = \left(\int_0^1 w_1(t) w_2(t) dt \right) \cdot w_3(1) \overset{\text{ozn}}{=} (T \otimes \varphi)(w_1, w_2, w_3)$$

Definicja 1.3. Niech $S \in J^k(V)$ oraz $T \in J^l(V)$. Wówczas $k + l$ tensor $S \otimes T$ definiujemy wzorem:

$$(S \otimes T)(v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = S(v_1, \ldots, v_k) T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l})$$

i nazywamy iloczynem tensorowym S oraz T.

Własności operacji $\otimes$:

1. $(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T$, $S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2$

2. $aS \otimes T = a(S \otimes T) = S \otimes aT$, $\forall_{a \in \mathbb{R}}$

3. $(S \otimes T) \otimes R = S \otimes (T \otimes R)$, $\forall_{S \in J^k(V), T \in J^l(V), R \in J^m(V)}$, dalej piszemy $S \otimes T \otimes R$.

Definicja 1.4. (Przestrzenie $J_l^k(V)$)

$T \in J_l^k(V)$ jest odwzorowaniem $T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k\text{-razy}} \times \overbrace{V^* \times \ldots \times V^*}^{l\text{-razy}} \to \mathbb{R}$ liniowym w każdym z argumentów. Zauważmy, że $J_0^k = J^k(V)$.

Uwaga 1.5. Oznaczmy $\dim(V) = n$.
Niech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie bazą V oraz $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ będzie bazą V^* dualną do $\{v_1, \ldots, v_n\}$:

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 \text{ dla } i = j \\ 0 \text{ dla } i \neq j \end{cases}$$

W szczególności możemy rozważać $k-$tensory $\varphi_{i_1} \otimes \varphi_{i_2} \otimes \varphi_{i_3} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k} \in J^k(V)$, gdzie: $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_k \leqslant n$

Twierdzenie 1.6. Przy powyższych oznaczeniach $\{\varphi_{i_1} \otimes \varphi_{i_2} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k} : 1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_k \leqslant n\}$ jest bazą $J^k(V)$, dlatego $\dim J^k(V) = n^k$

Dowód. Zauważmy, że dla $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_k \leqslant n$ oraz $1 \leqslant j_1, j_2, \ldots, j_k \leqslant n$ mamy

$$(\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k})(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) = \delta_{i_1, j_1} \ldots \delta_{i_k, j_k}.$$

Niech $T \in J^k(V)$ oraz $w_1, \ldots, w_k \in V$; $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(w_1, \ldots, w_k) &= \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{n} \underbrace{a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot a_{kj_k}}_{\parallel} T(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) \\ &\overset{*}{=} \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{n} T(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) \overbrace{\varphi_{j_1}(w_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_{j_k}(w_k)} \\ &= \left(\sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{n} T(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) \cdot (\varphi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k}) \right) (w_1, \ldots, w_k) \end{aligned}$$

$$T = \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1} T(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})(\varphi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k})$$

czyli rozważany układ $k-$tensorów rozpina przestrzeń $J^k(V)$.

Liniowa niezależność $\{(\varphi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k}) : 1 \leqslant j_1, \ldots, j_k \leqslant n\}$. Przypuśćmy, że

$$0 = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} b_{i_1, \ldots, i_k} \quad \varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}$$

Jeśli spełniona jest ta równość to jej aplikacja do układu $(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k})$, daje na mocy $(*)$

$$b_{j_1, \ldots, j_k} = 0.$$

□

Definicja 1.7. Niech $\omega \in J^k(V)$. Mówimy, że ω jest $k-$formą alternującą jeśli:

$$\omega(w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_j, \ldots, w_k) = (-1)\omega(w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_i, \ldots, w_k)$$

Zbiór takich $k-$form oznaczamy symbolem $\Omega^k(V) \subset J^k(V)$. Oczywiście $\Omega^k(V)$ jest podprzestrzenią wektorową. Zauważmy, że jeśli $\omega \in \Omega^k(V)$, a $\eta \in \Omega^l(V)$ to zazwyczaj $\omega \otimes \eta \notin \Omega^{k+l}(V)$.
Dalej, jeśli $T \in J^k(V)$ to $Alt(T) \in \Omega^k(V)$ definiujemy wzorem:

$$Alt(T)(w_1, \ldots, w_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) T(w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, \ldots, w_{\sigma(k)})$$

oraz iloczyn zewnętrzny $\omega \in \Omega^k, \eta \in \Omega^l(V)$ definiujemy wzorem:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta)$$

2 Wykład 7.10.2016:Tło algebraiczne tw. Stokes'a cz. II

Przypomnienie 2.1.
- V przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{R}$ $\quad \dim V < \infty$
- $\Omega^k(V)$ to zbiór form alternujących oraz $\Omega^k(V) \subset J^k(V)$
- $\omega \in \Omega^k(V) \qquad \omega : V \times V \times V \times V \times ... \to \mathbb{R}$
- $\omega(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ...v_k) = -\omega(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ...v_k)$
- $Alt : J^k(V) \to \Omega^k(V)$
- Jeśli $T \in J^k(V)$ to $Alt(T)(v_1, ..., v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn\,(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)})$

Twierdzenie 2.2. $\omega \in \Omega^k(V)$ to $Alt(w) = w$. W szczególności $Alt(Alt(T)) = Alt(T)$

Dowód: Niech $v_1, ..., v_k \in V$ Wówczas

$$\begin{aligned} Alt(\omega)(v_1, ..., v_k) &= \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) \\ &= \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) sgn(\sigma)\omega(v_1, ..., v_k) \\ &= \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_k} 1\omega(V_1, ..., v_k) = \omega(v_1, ..., v_k) \end{aligned}$$

Biorąc $\omega = Alt(T)$ dostajemy $Alt(Alt(T)) = Alt(T)$

Przypomnienie 2.3. Dla $\omega \in \Omega^K(V), \quad \eta \in \Omega^L(V)$

$$\omega \wedge \eta \in \Omega^{K+L}(V) : \omega \wedge \eta = \frac{(K+L)!}{K!L!} Alt(\omega \otimes \eta)$$

Podstawowe własności: dla $w_i \in \Omega^K(V), \quad \eta \in \Omega^L(V)$

- $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$
- $\omega \wedge \eta = (-1)^{K+L}$

Twierdzenie 2.4. (Łączność iloczynu zewnętrznego)

1. Niech $T \in J^K(V), S \in J^L(V)$ oraz $Alt(S) = 0$. Wówczas $Alt(S \otimes T) = 0$
2. Niech $T \in J^K(V), \quad S \in J^L(V), \quad R \in J^M(V)$. Wówczas
$$Alt(Alt(S \otimes T) \otimes R) = Alt(S \otimes T \otimes R) = Alt(S \otimes ALt(T \otimes R))$$
3. Niech $\omega \in \Omega^K(V), \quad \eta \in \Omega^L(V)$ oraz $\rho \in \Omega^M(V)$. Wówczas $(\omega \wedge \eta) \wedge \rho = \omega \wedge (\eta \wedge \rho)$

Dowód. Niech $v_1, ..., v_k, ..., v_{(K+L)} \in V$

$$Alt(S \otimes T)(v_1, ..., v_{K+L}) = \frac{1}{(K+L)!} \sum_{\sigma \in S_{K+L}} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma_1}, ..., v_{\sigma_K}) T(v_{\sigma_{K+1}}, ..., v_{\sigma_{K+L}})$$

Niech $G \in S_{K+L}$ bedzie podgrupą tych permutacji które nie zmieniają $\{K+1, ..., K+L\}$ widać, że $G = S_K \subset S_{K+L}$ oraz

$$\sum_{\sigma \in G} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma_1}, ..., v_{\sigma_K}) T(v_{\sigma_{K+1}}, ..., v_{\sigma_{K+L}}) = \underbrace{\sum_{\sigma \in S_K} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma_1}, ..., v_{\sigma_K})}_{=0} T(v_{\sigma_{K+1}}, ..., v_{\sigma_{K+L}}) = 0$$

Niech $\sigma_0 \in S_{K+L} \backslash G$ i niech $(\omega_1, ..., \omega_{K+L}) = (v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(K+L)})$. Wówczas

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in G\sigma_0} \operatorname{sgn}(\sigma) S(v_{\sigma_1}, ..., v_{\sigma_K}) T(v_{\sigma_{K+1}}, ..., v_{\sigma_{K+L}}) &= \sum_{\widetilde{\sigma} \in G} \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}\sigma_0) S(\omega_{\sigma_1}, ..., \omega_{\sigma_K}) T(\omega_{\sigma_{K+1}}, ..., \omega_{\sigma_{K+L}}) \\ &= \operatorname{sgn}(\sigma_0) \sum_{\sigma \in G} \operatorname{sgn}(\widetilde{\sigma}) S(\omega_{\sigma(1)}, ..., \omega_{\sigma(K)}) T(\omega_{\sigma_{K+1}}, ..., \omega_{\sigma_{K+L}}) = 0\end{aligned}$$

Dalej wybieramy: $\sigma_1 \in S_{K+L} \backslash (G \cup G_{\sigma_0})$ itd. Wszsytkie kolejne wkłądy są zero.

Rozważmy $K+L$ formę postaci $Alt(S \otimes T) - S \otimes T$ Zauważmy, że $Alt(Alt(S \otimes T) - (S \otimes T)) = 0$ Na mocy punktu 1 twierdzenia mamy

$$Alt((Alt(S \otimes T) - (S \otimes T)) \otimes R) = 0$$

więc

$$Alt(Alt(S \otimes T) \otimes R) = Alt(S \otimes T \otimes R)$$

Sprawdzamy łączność $\wedge$:

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta) \wedge \rho = \frac{(K+L+M)!}{(KL)!M!} Alt(\omega \wedge \eta \otimes \rho) &= \frac{(K+L+M)!}{(K+L)!M!} Alt(\frac{(K+L)!}{K!L!} Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \rho) \\ &= \frac{(K+L+M)!}{K!L!M!} Alt(\omega \otimes \eta) \otimes \rho \\ &= \frac{(K+L+M)!}{K!L!M!} Alt(\omega \otimes \eta \otimes \rho) \\ &= \frac{(K+L+M)!}{K!L!M!} Alt(\omega \otimes \eta \wedge \rho) \frac{L!M!}{(L+M)!} \\ &= \frac{(K+L+M)!}{K!(L+M)!} Alt(\omega \otimes \eta \wedge \rho) \\ &= \omega \wedge (\eta \wedge \rho)\end{aligned}$$

$\square$

Przykład 2.5. $V = \mathbb{R}^n$ oraz $(e_1, ..., e_n)$ baza standartowa. Niech $(\phi_1, ..., \phi_n)$ będzie bazą dualną przestrzeni V^*

- $\omega = \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n$ to wyznacznik. Rzeczywiście $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n$ jest n-liniowa i alternująca

$$\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n(e_1, ..., e_n) = \frac{(1+1+...+1)!}{1!1!...1!} Alt(\phi_1 \otimes ... \otimes \phi_n)(e_1, ..., e_n)$$
$$\frac{n!}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (\phi_1 \otimes ... \otimes \phi_n)(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)}) = 1$$

Uwaga 2.6.
- Niech $f : V \to W$ będzie liniowe
- Niech $f^* : V^* \to W^*$ będzie odwzorowaniem sprzężonym
Zauważmy, że: $V^* = J^1(W)$ Zatem możemy napisać $f^* : J^1(W) \to J^1(V)$

Definicja 2.7. Niech $T \in J^K(W)$ oraz $f : V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym Wówczas definiujemy $f^*(T) \in J^K(V)$

$$f^*(T)(v_1, \ldots v_k) = T(f(v_1), \ldots, f(v_k))$$

Właściwości $f^* : J^K(W) \to J^K(V)$:

1. $f^* : J^K(W) \to J^K(V)$ jest operacją liniową.
2. Jeśli $S \in J^K(W)$ oraz $T \in J^L(W)$ to
$$f^*(S \otimes T) = f^*(S) \otimes f^*(T)$$
3. $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$
4. $f^*(\Omega^K(W)) \subset \Omega^K(V)$

3 Wykład 10.10.2016.

Przypomnienie 3.1.
$$\begin{array}{lcl} V & \rightsquigarrow & J^k(V) \text{ - tensory rzędu } k \\ \downarrow f & \rightsquigarrow & \uparrow f^* \\ W & \rightsquigarrow & J^k(W) \end{array}$$

k-formy $\Omega^k(V) \subset J^k(V)$.

$$S \in J^k(V), T \in J^l(V) \rightsquigarrow S \otimes T \in J^{k+l}(V)$$
$$\omega \in \Omega^k(V), \eta \in \Omega^l(V) \rightsquigarrow \omega \wedge \eta \in \Omega^{k+l}(V)$$

Przykład 3.2. $(v_1, \ldots, v_n)$ - baza V, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ - baza dualna. $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ to $(\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k})(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 1$. Przypomnijmy, że $\dim J^k(V) = n^k$ oraz $\{\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k} : i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}\}$ - baza przestrzeni $J^k(V)$

Twierdzenie 3.3. Układ $\{\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} : 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n\}$ jest bazą przestrzeni $\Omega^k(V)$ i stąd $\dim \Omega^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Uwaga: $\omega \in \Omega^k(V), \eta \in \Omega^l(V)$ to $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$

Dowód. Weźmy $\omega \in \Omega^k(V) \subset J^k(V)$. $\exists a_{i_1} \ldots_{i_k} \in \mathbb{R}$ t. że:

$$\omega = \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} a_{i_1}, \ldots_{i_k} \varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}$$

$$\omega = \operatorname{Alt}(\omega) = \sum_{i_1 \ldots i_k = 1}^{n} a_{i_1} \ldots_{i_k} \underbrace{\operatorname{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k})}_{=\frac{1}{k!} \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}}$$

Indeksy $i_1 \ldots i_k$ można uporządkować zmieniając ewentualnie znak. Zatem ω jest kombinacją liniową:

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} b_{i_1} \ldots_{i_k} \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}.$$

Liniowa niezależność:
Jeśli $0 = \sum b_{i_1} \ldots_{i_k} \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ to:

$$\forall j_1 \ldots j_k \quad 0 = \sum b_{i_1} \ldots_{i_k} \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) = b_{j_1 \ldots j_k}.$$

□

Twierdzenie 3.4. Niech $\dim V = n$ oraz $\omega \in \Omega^n(V)$. Dalej niech $w_1, \ldots, w_n \in V$, gdzie $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$. Wówczas $\omega(w_1, \ldots, w_n) = \det([a_{ij}]) \cdot \omega(v_1, \ldots, v_n)$.

Dowód. Rozważmy n-formę na $\mathbb{R}^n$ postaci:

$$\eta((a_{11}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nn})) = \omega(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} v_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{ni_n} v_{i_n}).$$

Zauważmy, że $\eta \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$. Skoro $\dim \Omega^n(V) = 1$, to $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t. że $\eta = \lambda \cdot \det$. Dalej, skoro $\det \underbrace{(e_1, \ldots, e_n)}_{\text{baza stand. } \mathbb{R}^n} = 1$ to $\lambda = \eta(e_1, \ldots, e_n) = \omega(v_1, \ldots, v_n)$. Mamy więc:

$$\omega(w_1, \ldots, w_n) = \eta((a_{11}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{n1}, \ldots, a_{nn})) = \omega(v_1, \ldots, v_n) \cdot \det([a_{ij}])$$

□

Orientacja przestrzeni wektorowej:

Uwaga 3.5. Niech $(v_1, \ldots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni wektorowej V. Niech $(w_1, \ldots, w_n)$ będzie drugą bazą przestrzeni V, a więc $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$. Mówimy, że bazy (v_i) i (w_i) zadają tę samą orientację przestrzeni V jeśli $\det([a_{ij}]) > 0$. Zbiór wszystkich baz przestrzeni V dzieli się na dwie klasy, zadanie orientacji polega na wyborze jednej z nich. Niech $\omega \in \Omega^n(V)$, $\omega \neq 0$. Wówczas powyższy podział można opisać biorąc następujące dwa rozłączne podzbiory baz:

$\mathcal{B}_1 = \{(v_1, \ldots, v_n) \colon \omega(v_1, \ldots, v_n) > 0\}$

$\mathcal{B}_2 = \{(w_1, \ldots, w_n) \colon \omega(w_1, \ldots, w_n) < 0\}$

Lokalne aspekty twierdzenia Stokesa:

Przykład 3.6. Rozważmy sferę $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \colon x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$. $(p_1, \ldots, p_{n+1}) = p \in S^n$. W każdym punkcie $p \in S^n$ mamy przestrzeń styczną $T_pS^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \colon x \perp p\}$. $\cup_{p \in S^n} T_pS^n$ jest tzw wiązką styczną sfery S^n.

Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ i $p \in \mathcal{O}$ Rozważmy zbiór $\{(p, v) \colon v \in \mathbb{R}^n\}$ i oznaczmy go $\mathbb{R}^n_p$. Definiujemy strukturę przestrzeni wektorowej w $\mathbb{R}^n_p$:

1. $(p, v) + (p, w) = (p, v + w)$
2. $\lambda(p, v) = (p, \lambda v)$

$T\mathcal{O} := \cup_{p \in \mathcal{O}} \mathbb{R}^n_p$ - oznaczenie; zamiast (p, v) będziemy też pisać $v_p \in T\mathcal{O}$.

Definicja 3.7. Niech $F : \mathcal{O} \to T\mathcal{O}$. Mówimy, że F jest polem wektorowym (na $\mathcal{O}$) jeśli $F(p) \in \mathbb{R}^n_p$.

Niech $p \in \mathcal{O}$. $\forall_{k \in \mathbb{N}}$ możemy rozważać przestrzeń wektorową $\Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$.

Definicja 3.8. Niech $\omega : \mathcal{O} \to \cup_{p \in \mathcal{O}} \Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$. Mówimy, że ω jest k-formą różniczkową na $\mathcal{O}$ jeśli $\forall_{p \in \mathcal{O}} \quad \omega(p) \in \Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$.

Niech $(e_1, \ldots, e_n)$ będzie bazą kanoniczną $\mathbb{R}^n$ oraz $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ będzie bazą dualną. Wówczas $\forall_p((p, e_1), \ldots, (p, e_n))$ jest bazą $\mathbb{R}^n_p$. Piszemy $e_i(p) = (p, e_i)$. Bazę dualną oznaczamy $(\varphi_1(p), \ldots, \varphi_n(p))$. Każdą k-formę ω na $\mathcal{O}$ możemy zapisać w postaci $\omega(p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k}(p) \varphi_{i_1}(p) \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}(p)$. Mówimy, że ω jest klasy $\mathcal{C}^\infty$ (lub ω jest gładka) jeśli funkcje $\omega_{i_1, \ldots, i_k}$ są klasy $\mathcal{C}^\infty$. Zbiór k-form różniczkowych gładkich na $\mathcal{O}$ oznaczać będziemy $\Omega^k_{rozn}(\mathcal{O})$.

Definicja 3.9. Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. 1-formę df na $\mathcal{O}$ definiuje się wzorem:

$$df(p)(v_p) = f'(p)v$$

Przykład 3.10. Niech $i \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $x^i \colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, gdzie $x^i \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right) = v_i$

$$dx^i(p)(v_p) = (x^i)'v = \left[\underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^1}}_{0}, \ldots, \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^i}}_{1}, \ldots, \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x^n}}_{0} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_i = \varphi_i(p)(v_p)$$

Uwaga 3.11. Każdą formę różniczkową zapisujemy w postaci:

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Cofanie form różniczkowych:
Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ i $\eta \in \Omega^k_{rozn}(\mathbb{R}^m)$ oraz niech f' będzie pochodną odwzorowania f. Wówczas $f^*\eta \in \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O})$ definiujemy wzorem

$$(f^*\eta)(p)(v_p^1, v_p^2, \ldots, v_p^k) = \eta(f(p))((f'(p)v^1)_{f(p)} \ldots (f'(p)v^k)_{f(p)}))$$

Dalej pokażemy, że

$$f^*\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_k} (\omega_{i_1,\ldots,i_k} \circ f) df^{i_1} \wedge \ldots \wedge df^{i_k},$$

gdzie f^i - współczynniki f.

4 Wykład 14.10.2016.

Przykład 4.1. $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3) \quad dx, dy, dz \in \Omega^1_{rozn}(\mathbb{R}^3)$
gdzie $\omega = xydz \wedge dy + yzxdx \wedge dy$. Niech $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} f^1(\xi, \eta) \\ f^2(\xi, \eta) \\ f^3(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi + \eta \\ \xi^2 + \eta^2 \\ \xi^3 + \eta^3 \end{bmatrix}$$

Jak wygląda $f^*(\omega) \in \Omega^2_{rozn}(\mathbb{R}^2)$?
$\exists g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (f^*\omega)(\xi, \eta) = g(\xi, \eta)\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta$
$(f^*\omega)(\xi, \eta) = (\xi+\eta)(\xi^2+\eta^2)\mathrm{d}(\xi^3+\eta^3) \wedge \mathrm{d}(\xi^2+\eta^2) + (\xi+\eta)(\xi^2+\eta^2)(\xi^3+\eta^3)\mathrm{d}(\xi+\eta) \wedge \mathrm{d}(\xi^2+\eta^2) =$
$(\xi+\eta)(\xi^2+\eta^2)(3\xi^2\mathrm{d}\xi+3\eta^2\mathrm{d}\eta) \wedge (2\xi\mathrm{d}\xi+2\eta\mathrm{d}\eta) + (\xi+\eta)(\xi^2+\eta^2)(\xi^3+\eta^3)(\mathrm{d}\xi+\mathrm{d}\eta) \wedge (2\xi\mathrm{d}\xi+2\eta\mathrm{d}\eta) =$
$(\xi+\eta)(\xi^2+\eta^2)(6\xi^2\eta+6\eta^2\xi) + (\xi+\eta)(\xi^2+\eta^2)(\xi^3+\eta^3)(2\eta-2\xi)(\mathrm{d}\xi \wedge \mathrm{d}\eta)$

Twierdzenie 4.2. Własności operacji f^*:

1) $f^*\mathrm{d}g = \mathrm{d}(g \circ f)$
2) $f^*(\omega + \eta) = f^*\omega + f^*\eta$
3) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$
4) $h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad f^*(h \cdot \omega) = (h \circ f) f^*(\omega)$

Dowód. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$
$(f^*\mathrm{d}g(p)(v_p))$
$\mathrm{d}g = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$
$\mathrm{d}(g \circ f) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial y^j}\mathrm{d}y^j$

$$(f^*\mathrm{d}g)(p)(v_p) = \mathrm{d}g(f(p))((f'(p)v)f(p)) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(f(p))\mathrm{d}x^i\right) \begin{bmatrix} \sum_j \frac{\partial f^1}{\partial y_j}(p)v^j \\ . \\ . \\ . \\ \sum_j \frac{\partial f^m}{\partial y_j}(p)v^j \end{bmatrix} = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial x}(f(p))\frac{\partial f^i}{\partial y^i}(p)v^j$$

Z drugiej strony $(\mathrm{d}g \circ f)(p)\left(\begin{bmatrix} v^1 \\ . \\ . \\ . \\ v^n \end{bmatrix}, p\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial x^i}(f(p))\frac{\partial f^i}{\partial y^j}(p)v^j$

A stąd $f^*\mathrm{d}g = \mathrm{d}g \circ f$ $\square$

Własność 2 i 3 sprawdza się łatwo.

Twierdzenie 4.3. Niech $\omega = hdx^1 \wedge dx^2 \wedge ... \wedge dx^n$ oraz $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ - różniczkowalna a $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. To $(f^*\omega)(y) = (h \circ f)(y) \cdot \det(f'(y))dy^1 \wedge ... \wedge dy^n$.

Dowód. Funkcja $f(y_1, ..., y_n) = \begin{bmatrix} f^1(y_1, ..., y_n) \\ . \\ . \\ . \\ f^n(y_1, ..., y_n) \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
f^*(\omega) &= (h \circ f)dx^1 \circ f \wedge dx^2 \circ f \wedge ... \wedge dx^n \circ f = (h \circ f)df^1 \wedge df^2 \wedge ... \wedge df^n \\
&= (h \circ f) \sum_{i_1,...i_n=1} \frac{\partial f^1}{\partial y^{i_1}} dy^{i_1} \wedge \frac{\partial f^2}{\partial y^{i_2}} dy^{i_2} \wedge ... \wedge \frac{\partial f^n}{\partial y^{i_n}} dy^{i_n} \\
&= (h \circ f) \sum_{i_1,...i_n=1} \frac{\partial f^1}{\partial y^{i_1}} ... \frac{\partial f^n}{\partial y^{i_n}} dy^{i_1} \wedge ... \wedge dy^{i_n} \\
&= (h \circ f) \sum_{\sigma \in S_n} \frac{\partial f^1}{\partial y^{\sigma_1}} ... \frac{\partial f^n}{\partial y^{\sigma_n}} dy^{\sigma_1} \wedge ... \wedge dy^{\sigma_n} \\
&= (h \circ f)(\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \frac{\partial f^1}{\partial y^{\sigma_1}} ... \frac{\partial f^n}{\partial y^{\sigma_n}}) dy^1 \wedge ... \wedge dy^n \\
&= (h \circ f)\det(f')dy^1 \wedge ... \wedge dy^n
\end{aligned}$$

$\square$

Definicja 4.4. Pochodną zewnętrzna d:
$d : \Omega^k_{rozn}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^{k+1}_{rozn}(\mathbb{R}^n)$ gdzie $\omega = \sum_{i_1<...<i_k} \omega_{i_1,...,i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ definiujemy

$$d\omega = \sum_{i_1<...<i_k} d\omega_{i_1,...,i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

Twierdzenie 4.5. Własności $d : \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O}) \longrightarrow \Omega^{k+1}_{rozn}(\mathcal{O})$. Niech $\omega, \eta \in \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O}), \rho \in \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O})$

1) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$

2) $f^*d\omega = df^*\omega$

3) $d\omega \wedge \rho = (d\omega) \wedge \rho + (-1)^k \omega \wedge d\rho$

4) $d(d\omega) = 0$; piszemy $d^2 = 0$

Dowód. Ad1 – oczywiste
Ad3 –Niech $\omega = \omega_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ oraz $\rho = \rho_{j_1,\dots,j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}$. Wówczas

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \rho) &= d(\omega_{i_1,\dots,i_k} \rho_{j_1,\dots,j_l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) \\ &= (\rho_{j_1,\dots,j_l} d\omega_{i_1,\dots,i_k} + \omega_{i_1,\dots,i_k} d\rho_{j_1,\dots,j_l}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= (d\omega) \wedge \rho + (-1)^k \omega \wedge d\rho \end{aligned}$$

Ad4 –Liczymy

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_j d\Big(\frac{\partial \omega_{i_1\dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\Big) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \omega_{i_1,\dots,i_k}}{\partial dx^i dx^j} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0 \end{aligned}$$

gdyż $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \omega_{i_1,\dots,i_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} \omega_{i_1,\dots,i_k}$ a $dx^i \wedge dx^j = (-1) dx^j \wedge dx^i$
Ad2 – podobnie jak wyżej... □

Definicja 4.6. Niech $\omega \in \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O})$. Mówimy, że ω jest zamknięta, jeśli $d\omega = 0$. Jeśli $\exists \eta \in \Omega^{k-1}_{rozn}(\mathcal{O})$: $\omega = d\eta$ to mówimy, że ω jest zupełna. Ponieważ $d^2 = 0$ to każda forma zupełna jest zamknięta.

Przykład 4.7. $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\})$
$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx$
$d\omega = d(\frac{x}{x^2+y^2}) \wedge dy - d(\frac{y}{x^2+y^2}) \wedge dx = (\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{x2x}{(x^2+y^2)^2}) dx \wedge dy - (\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{y2y}{(x^2+y^2)})^2) dy \wedge dx = (\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}) dx \wedge dy = 0$,
czyli ω jest zamknięta.

Czy $\exists \eta : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.że $\omega = d\eta$? Dalej udowodnimy że taka funkcja nie istnieje.

5 Wykład 17.10.2016

Przypomnienie 5.1. Dotychczas na wykładzie:

1. $\Omega^k(V)$ - formy alternujące rzędu k.
2. $\mathbb{R}^n_p$ - przestrzeń wektorów zaczepionych w p, $v_p : v \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n$.
3. $\Omega^k(\mathbb{R}^n_p)$ - elementy są postaci:

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(p)$$
$$\lambda_{i_1,\dots,i_k} \in \mathbb{R},\ dx^i(p) \in \Omega^1(\mathbb{R}^n_p),\ i \in \{1, \dots, n\}$$

Dla $v_p = \left(\begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}, p \right)$ $\quad dx^i(p)(x_p) = v^i$.

4. k-forma różniczkowa na $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem:

$$\mathcal{O} \ni p \longmapsto \sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1,\dots,i_k}(p) dx^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(p) \in \Omega^k(\mathbb{R}^n_p),$$

   gdzie $\lambda_{i_1,\dots,i_k} \in C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$.

5. Formy różniczkowe na $\mathcal{O}$ można cofać przy pomocy

$$f : \mathbb{R}^m \supset \mathcal{O}' \longrightarrow \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$$

   Wówczas $f^* : \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O}) \to \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O}')$.

6. Formy różniczkowe można różniczkować zewnętrznie:

$$\begin{aligned} d : \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O}) &\longrightarrow \Omega^{k+1}_{rozn}(\mathcal{O}) \\ \omega &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ d\omega &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial \omega_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

Własności:

1. $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ dla wszystkich $\omega \in \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O}), \eta \in \Omega^l_{rozn}(\mathcal{O})$.

2. $d(d\omega) = 0$.

3. Dla $f \in C^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ oraz $g : \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ zachodzi $g^* df = d(f \cdot g)$. Przypomnijmy, że $df(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx^i(p)$.

Stwierdzenie 5.2. Niech $\omega \in \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O})$ oraz $g : \mathbb{R}^m \supset \mathcal{O}' \to \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. Wówczas $g^* d\omega = dg^* \omega$.

Dowód. Indukcja ze względu na k. $k = 1$ - twierdzenie prawdziwe na mocy trzeciej własności. Krok indukcyjny - wystarczy sprawdzić dla $\eta \in \Omega^{k+1}_{rozn}(\mathcal{O})$ postaci $\eta = \omega \wedge dx^i$ gdzie $\omega \in \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O})$ a $i \in \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} &g^* d(\omega \wedge dx^i) = g^*(d\omega \wedge dx^i + (-1)^k \omega \wedge d(dx^i)) = g^*(d\omega \wedge dx^i) = \\ &= g^* d\omega \wedge g^* dx^i = d(g^* \omega) \wedge d(x^i \cdot g) = d(g^* \omega \wedge d(x^i \cdot g)) = d(g^* \omega \wedge g^* dx^i) = \\ &= dg^*(\omega \wedge dx^i) \end{aligned}$$

□

Definicja 5.3. Mówimy, że $\omega \in \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O})$ jest zamknięta jeśli $d\omega = 0$. Mówimy, że ω jest zupełna jeśli $\exists \eta \in \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O})$, że $\omega = d\eta$. Każda forma zupełna jest zamknięta.

Definicja 5.4. $\mathcal{O} \underset{OTW}{\subset} \mathbb{R}^n$ nazywamy gwiaździstym względem $0 \in \mathbb{R}^n$ jeśli $\forall x \in \mathcal{O}\ \forall t \in [0, 1] \quad tx \in \mathcal{O}$.

Twierdzenie 5.5. (Lemat Poincarégo) Jeśli $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem gwiaździstym to każda forma zamknięta jest zupełna.

Dowód. Definiujemy operację liniową $I : \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O}) \to \Omega^{k-1}_{rozn}(\mathcal{O})$. Dla $\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ mamy:

$$I\omega = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \right) x^{i_\alpha} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

gdzie $\widehat{dx^{i_\alpha}}$ oznacza, że tą 1-formę pomijamy. Udowodnimy, że $\forall \omega \in \Omega^k_{rozn}(\mathcal{O})$ mamy $\omega = dI\omega + Id\omega$. W szczególności jeśli $d\omega = 0$ to $\omega = dI\omega$ i kładąc $\eta = I\omega$ mamy $\omega = d\eta$.

$$dI\omega = k \int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx) dt \; x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

$$Id\omega = I \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j} \, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx) dt \; x^j dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} +$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx) dt \; x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

$$dI\omega + Id\omega = k \int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt \; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx) dt \; x^j dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}(t^k f(tx)) dt \; dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = t^k f(tx) \Big|_0^1 dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \omega$$

□

Przykład 5.6.

$$\omega = df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$I\omega = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t^0 \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) x^i \right) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) x^i dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = f(x) - f(0)$$

Uwaga 5.7. η taka, że $\omega = d\eta$ jest określone z dokładnością do czynnika addytywnego, tzn. jeśli $\eta' \in \Omega^{k-1}_{rozn}(\mathcal{O})$, taka że $d\eta' = 0$ oraz $\omega = d\eta$ to również $\omega = d(\eta + \eta')$.

6 Wykład 21.10.2016 r.

$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ - zbiór otwarty.

Definicja 6.1. Odwzorowanie ciągłe $c : [0,1]^k \to \mathcal{O}$ nazywamy **singularną k-kostką**.

Przykład 6.2.

0. $p \in \mathcal{O}$, $c(x) = p$ dla wszystkich $x \in [0,1]^k$

1. $I^n : [0,1]^n \to \mathbb{R}^n$, gdzie $I^n(x) = x$

3. $[0,1]^3 \ni (\xi, \zeta, \eta) \xmapsto{c} \begin{pmatrix} \xi \sin(\pi\zeta)\cos(2\pi\eta) \\ \xi \sin(\pi\zeta)\sin(2\pi\eta) \\ \xi\cos(\pi\zeta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

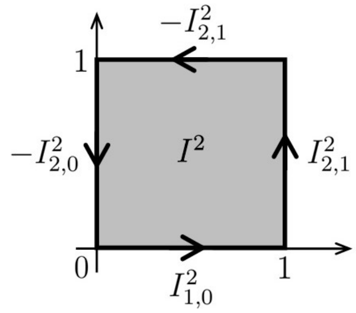
Brzeg singularnej k-kostki

Definicja 6.3. Jeżeli I^n - n-kostka, taka że $I^n(x) = x$, to definiujemy (i, α) - ścianę kostki I^n wzorem:

$$I^n_{i,\alpha}(x^1, \ldots, x^{n-1}) = (x^1, \ldots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \ldots, x^n),$$

gdzie: $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$. Ściana n-kostki jest $n-1$ kostką.

Przykład 6.4. $I^2_{1,0}(x) = (0, x)$



Definicja 6.5. Niech $c_1, \ldots, c_l$ będą singularnymi k-kostkami w $\mathcal{O}$ oraz $a_1, \ldots, c_l \in \mathbb{Z}$. Formalną sumę $\sum\limits_{i=1}^{l} a_i c_i$ nazywamy **k-łańcuchem** w $\mathcal{O}$.

Przykład 6.6. n-kostce I^n przypisujemy $n-1$ łańcuch ∂I^n, gdzie:

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha \in \{0,1\}} (-1)^{i+\alpha} I^n_{i,\alpha}.$$

∂I^n nazywamy **brzegiem kostki** I^n.

Definicja 6.7. Niech c będzie singularną k-kostką w $\mathcal{O}$, $c : [0,1]^k \to \mathcal{O}$. (i,α) - ścianą c nazywamy singularną $k-1$ kostkę $c_{i,\alpha}$, taką że:
$$c_{i,\alpha} = c \circ I^k_{i,\alpha}.$$
Brzeg c jest $k-1$ łańcuchem danym wzorem:
$$\partial c = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha\in\{0,1\}} (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}.$$
Ogólniej jeśli $c = \sum\limits_{i=1}^{l} a_i c_i$ jest k-łańcuchem, to brzeg ∂c jest $k-1$ łańcuchem, takim że:
$$\partial c = \sum_{i=1}^{l} a_i \partial c_i.$$

Stwierdzenie 6.8. Niech c będzie k-łańcuchem w $\mathcal{O}$. Wówczas $\partial(\partial c) = 0$.

Dowód. Niech $i < j$, policzmy:
$$I^n_{i,\alpha} \circ I^{n-1}_{j,\beta}(x^1,\dots,x^i,\dots,x^j,\dots,x^{n-2}) = I^n_{i,\alpha}(x^1,\dots,x^i,\dots,x^{j-1},\beta,x^j,\dots,x^{n-2}) =$$
$$= (x^1,\dots,\alpha,x^i,\dots,x^{j-1},\beta,x^j,\dots,x^{n-2})$$
$$I^n_{j+1,\beta} \circ I^{n-1}_{i,\alpha}(x^1,\dots,x^{n-2}) = (x^1,\dots,\alpha,x^i,\dots,x^j,\beta,x^{j+1},\dots,x^{n-2})$$
$$\Rightarrow I^n_{i,\alpha} \circ I^{n-1}_{j,\beta} = I^n_{j+1,\beta} \circ I^{n-1}_{i,\alpha}$$
Podobnie dla $i > j$ mamy:
$$I^n_{i+1,\alpha} \circ I^{n-1}_{j,\beta} = I^n_{j,\beta} \circ I^{n-1}_{i,\alpha}$$
Dalej niech $c : [0,1] \to \mathcal{O}$ będzie sigularną k-kostką, wówczas:
$$\partial c = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha\in\{0,1\}} (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}.$$
Stąd:
$$\partial\partial c = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\alpha,\beta\in\{0,1\}} (-1)^{i+\alpha+j+\beta} (c_{i,\alpha})_{j,\beta}$$
Zauważmy, że
$$(c_{i,\alpha})_{j,\beta} = (c_{j+1,\beta})_{i,\alpha} \text{ dla } i < j \text{ oraz } (c_{i+1,\alpha})_{j,\beta} = (c_{j,\beta})_{i,\alpha} \text{ dla } i > j.$$
Zatem w powyższej sumie, wyrażenia pod znakiem sumy skracają się parami i dostajemy $\partial\partial c = 0$. $\square$

Definicja 6.9. Niech ω będzie k-formą różniczkowalną na k-kostce $[0,1]^k$.

$$\omega = f\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^k,$$

gdzie: $f : [0,1]^k \to \mathbb{R}$. Wówczas:

$$\int\limits_{[0,1]^k} \omega := \int\limits_{[0,1]^k} f\mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^k.$$

Ogólniej, jeśli $c : [0,1]^k \to \mathcal{O}$ oraz $\omega \in \Omega^k_{\text{rożn}}(\mathcal{O})$ to:

$$\int\limits_c \omega := \int\limits_{[0,1]^k} c^*\omega.$$

Wyrażenie $\int\limits_c \omega$ nazywamy całką z ω po singularnej k-kostce c.

W końcu dla $c = \sum\limits_{i=1}^{l} a_i c_i$ definiujemy:

$$\int\limits_c \omega := \sum_{i=1}^{l} a_i \int\limits_{c_i} \omega_i \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 6.10 (Stokesa dla k-łańcuchów)**.** Niech $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathcal{O})$ oraz c będzie k-łańcuchem w $\mathcal{O}$. Wówczas:

$$\int\limits_c \mathrm{d}\omega = \int\limits_{\partial c} \omega.$$

Dowód. W pierwszym kroku dowodzimy dla $c = I^k$, $\omega \in \Omega^{k-1}([0,1]^k)$.

$$\omega = \sum f_i \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \mathrm{d}x^{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^k.$$

Weźmy $\omega = f\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \mathrm{d}x^{i+1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^k$.

$$\int\limits_{\partial I^k} \omega = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha \in \{0,1\}} (-1)^{j+\alpha} \int\limits_{[0,1]^{k-1}} {I^k_{j,\alpha}}^*(f\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^k) =$$

$$= (-1)^{i+1} \int\limits_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k)\mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^k + (-1)^i \int\limits_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k)$$

$$\int\limits_{I^k} \mathrm{d}\omega = \int\limits_{[0,1]^k} \frac{\partial f}{\partial x^i}(-1)^{i-1}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 \ldots \mathrm{d}x^k) \overset{\text{tw. Fubiniego}}{=}$$

$$= (-1)^{i-1} \int\limits_{[0,1]^{k-1}} (f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k) - f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k))\mathrm{d}x^1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x^i} \ldots \mathrm{d}x^k.$$

Analiza przypadku ogólnego: $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathcal{O})$, $c : [0,1]^k \to \mathcal{O}$. Wprost z powyższej definicji:

$$\int\limits_{\partial c} \omega = \int\limits_{\partial I^k} c^*\omega$$

i dalej:

$$\int\limits_{c} \mathrm{d}\omega = \int\limits_{I^k} c^*\mathrm{d}\omega = \int\limits_{I^k} \mathrm{d}c^*\omega = \int\limits_{\partial I^k} c^*\omega = \int\limits_{\partial c} \omega.$$

□

7 Wykład 28.10.2016.

Przypomnienie 7.1. (Orientacja przestrzeni wektorowej):
V jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Orientacja V jest zadana przez wybór klasy baz V.
Bazy $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ i $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ zadają tę samą orientację V, jeśli $\det(id_e^f) > 0$.

Orientacja rozmaitości:

- S^n jest orientowalna.
- Wstęga Mobiusa nie jest orientowalna.

Niech M będzie k-rozmaitością w $\mathbb{R}^n$ i niech $x \in M$. Ustalmy układy współrzędnych $f_1, f_2 : W \to M$ wokół punktu x.
Niech $y \in f_1(W_1) \cap f_2(W_2)$, czyli $y = f_1(a_1) = f_2(a_2)$, dla pewnych $a_1 \in W_1$, $a_2 \in W_2$.
Przestrzeń styczną T_yM można zorientować na dwa sposoby:

1. Orientacja T_yM jest zadana przez bazę $(f_{1*}(e^1_{a_1}), f_{1*}(e^2_{a_1}), \ldots, f_{1*}(e^k_{a_1}))$, gdzie $(e^1_{a_1}, \ldots, (e^k_{a_1}))$ jest bazą kanoniczną $\mathbb{R}^n_{a_1}$.
2. Tak jak wyżej, ale przy użyciu układu współrzędnych f_2.

Definicja 7.2. Mówimy, że układy f_1 i f_2 są zgodne, jeśli zadają takie same orientacje T_yM dla wszystkich $y \in f_1(W_1) \cap f_2(W_2)$.

Definicja 7.3. Mówimy, że rozmaitość M jest orientowalna, jeśli istnieje system zgodnych układów współrzędnych pokrywających M.

Definicja 7.4. Mówimy, że M jest zorientowana, jeśli został dokonany wybór systemu zgodnych układó współrzędnych.

Uwaga 7.5. Układy współrzędnych f_1 i f_2 są zgodne jeśli:

$$det(f_2^{-1} \circ f_1)'(a_1) > 0$$

gdzie $f_1(a_1) = y$.

Orientacja rozmaitości z brzegiem oraz indukowana orientacja ∂M:
Niech $x \in \partial M$. Niech U,V, $h : U \to V$ będą jak w definicji rozmaitości z brzegiem. Załóżmy, że M jest zorientowana.

Definicja 7.6. Niech $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ będzie bazą $T_x\partial M$. W $T_x\partial M$ wybieramy orientację: baza $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ jest zgodna z tą orientacją, jeśli baza $(f_*(-e_k), v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ jest zgodna z orientacją T_xM.

Przykład 7.7. Oznaczmy $\mathbb{H}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x^k \geqslant 0\}$.

1. $M = \mathbb{H}^2$, $\partial M = \mathbb{R}^1$
   M orientujemy kanonicznie. Czy kanoniczna orientacja ∂M jest orientacją indukowaną? Bazą kanoniczną $\mathbb{R}$ jest e_1. Zatem musimy ustalić orientację bazy $(-e_2, e_1)$. Sprawdźmy znak macierzy przejścia:
   $$\det(id^{(-e_2,e_1)}_{(e_1,e_2)}) = det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 > 0$$
   Z tego wynika, że ∂M jest zorientowana kanonicznie.

2. $M = \mathbb{H}^3$, $\partial M = \mathbb{R}^2$
   Otrzymujemy bazę $(-e_3, e_1, e_2)$ i porównajmy ją z (e_1, e_2, e_3):
   $$\det(id^{(-e_3,e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)} = \det\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = -1 < 0$$
   Czyli indukowana orientacja brzegu ∂M jest przeciwna do kanonicznej.

3. Ogólnie orientacja $\partial\mathbb{H}^k$ jest $(-1)^k\times$ orientacja kanoniczna.

Całkowanie k-form na rozmaitości zorientowanej M:
Niech $\omega \in \Omega^k_{rozn}(M)$ oraz niech $c : [0,1]^k \to M$ będzie kostką singularną taką, że istnieje $W \supset [0,1]^k$ oraz układ współrzędnych $f : W \to M$ taki, że $c = f\Big|_{[0,1]^k}$
Od tej pory rozważamy kostki takie jak wyżej gdzie f jest zgodne z orientacją M. Mówimy wtedy, że c zachowuje orientację. Mając ω i c jak wyżej definiujemy: $\int\limits_c \omega = \int\limits_{I^k} c^*\omega$.

Twierdzenie 7.8. Niech c_1,c_2 będą kostkami zachowującymi orientację M oraz $\omega \in \Omega^k_{rozn}(M)$, która zeruje się poza $c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$ Wówczas:
$$\int\limits_{c_1} \omega = \int\limits_{c_2} \omega$$

Dowód.
$$\int\limits_{c_1} \omega = \int\limits_{[0,1]^k} c_1^*\,\omega = \int\limits_{[0,1]^k} (c_2 \circ c_2^{-1} \circ c_1)^*\,\omega = \int\limits_{[0,1]^k} (c_2^{-1} \circ c_1)^* \circ c_2^*\,\omega$$

Niech g będzie odwzorowaniem między podzbiorami k-kostek takim, że $g = c_2^{-1} \circ c_1$ oraz niech $c_2^*\omega = f dx^1 \wedge dx^k$. Wówczas:
$$g^*(f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k) = (f \circ g)(\det\ g')\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k = |\det\ g'|(f \circ g)\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że det $g' > 0$ (c_i zachowują orientację). Z twierdzenia o zamianie zmiennych:

$$\int\limits_{[0,1]^k} |\det\ g'|(f \circ g)dx^1dx^2 \dots dx^k = \int\limits_{[0,1]^k} f dx^1dx^2 \dots dx^k = \int\limits_{[0,1]^k} c_2^*\, \omega = \int\limits_{c_2} \omega$$

□

Przypomnienie 7.9. (Rozkład jedności)
Niech M będzie zwartą rozmaitością z brzegiem. Niech $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ będzie otwartym skończonym pokryciem M, czyli $\mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}^n$ oraz $M \subset \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i$
Rozkładem jedności związanym z $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ nazywamy układ funkcji $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, takie że φ_i są gładkie, *supp* $\varphi_i \subset \mathcal{O}_i$, oraz:

$$\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$$

dla wszystkich $x \in M$.

Definicja 7.10. Weźmy $\omega \in \Omega^k_{rozn}(M)$ taką, że istnieje kostka $c : [0,1]^k \to M$ zachowująca orientację, taka, że ω zeruje się poza $c\ ([0,1]^k)$ Wówczas definiujemy $\int\limits_M = \int\limits_{[0,1]^k} c^*\, \omega$. Jest to dobra definicja, gdyż nie zależy od wyboru c (patrz Twierdzenie 7.8).

Ogólnie wybieramy pokrycie $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ rozmaitości M oraz rozkład jedności $(\varphi_i)_{i\in I}$ tak, aby $\varphi_i\omega$ spełniały założenia powyższej definicji. Następnie definiujemy:

$$\int\limits_M \omega = \sum_{i\in I} \int\limits_M \varphi_i \cdot \omega$$

Twierdzenie Stokes'a:

Twierdzenie 7.11. Niech ω będzie k-1 formą różniczkową na zorientowanej k-rozmaitości z brzegiem. Wówczas:

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega$$

Dowód na następnym wykładzie (4.11.2016)

8 Wykład 04.11.2016.

Dowód twierdzenia Stokesa. **Przypadek 1**

Uwaga 8.1. M to k - wymiarowa rozmaitość zorientowana, ∂M ma orientację indukowaną oraz $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$. Dowodzimy, że

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega$$

Niech $c : [0,1]^k \to M$ będzię singularną kostą t.że jedyną ścianą c mającą wewnętrzny punkt wspólny z ∂M jest ściana $c_{k,0}$.

Przypomnienie 8.2. Orientacja brzegu półprzestrzeni $\mathbb{H}^k = \{x \in \mathbb{R} : x^k \geqslant 0\}$ ($\partial\mathbb{H}^k = \mathbb{R}^{k-1}$) jest $(-1)^k\cdot$ orientacja kanoniczna.

Stąd $c_{k,0}$ zachowuje orentację brzegu $\Leftrightarrow$ k - parzyste. Z drugiej strony mamy

$$\partial c = \sum_{\substack{i=1,\dots,k \\ \alpha \neq 0,1}} (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}.$$

Zatem, jeśli ω jest $k-1$ formą znikającą poza $c([0,1]^k)$ to

$$\int_{\partial M} \omega = (-1)^{k+k} \int_{c_{l,0}} \omega = \int_{c_{l,0}} \omega.$$

Z drugiej strony

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^* d\omega \underbrace{=}_{\text{Z tw. Stokesa dla łańcuchów}} \int_{[0,1]^k} dc^*\omega = \int_{\partial I^k} \omega = \int_{c_{k,0}} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

Przypadek 2 Załóżmy, że ω jest $k-1$ formą taką, że $\exists$ k - łańcuch $c : ([0,1]^k) \to M\backslash\partial M$ oraz ω jest zero poza $c([0,1]^k)$. W szczególności, z gładkości ω jest ona również równa zeru na brzegu $c([0,1]^k)$. Ponieważ ω jest zero na ∂M to

$$\int_{\partial M} \omega = 0.$$

A z drugiej strony

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega \underbrace{=}_{\text{tw. Stokesa dla łańcuchów}} \int_{\partial c} \omega = 0$$

Przypadek ogólny Niech $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ będzie pokryciem M oraz $(\phi_i)_{i\in I}$ rozkładem jedności wpisanym w to pokrycie t.że $\forall_i \phi_i\omega$ jest $k-1$ formą jednego z powyższych typów. Wówczas, skoro $\sum_{i\in I} \phi_i = 1$ na M to

$$0 = d\sum_{i\in I} \phi_i = \sum_{i\in I} d\phi_i.$$

Zatem, także

$$\sum_{i\in I} d\phi_i \wedge \omega = 0.$$

Dalej

$$\int_M d\omega = \sum_{i\in I} \int_M \phi_i d\omega = \left(\sum_I \phi_i d\omega = \sum_I d(\phi_i\omega) - \sum_I d\phi_i \wedge \omega = \sum_I d(\phi_i\omega) \right)$$
$$= \sum_{i\in I} \int_M d(\phi_i\omega) = \sum_{i\in I} \int_{\partial M} \phi_i\omega = \int_{\partial M} \omega$$

$\square$

Klasyczne formy twierdzenia Stokesa Niech $F(x,y,z) = (F^1(x,y,z), F^2(x,y,z), F^3(x,y,z))$. Wówczas rotacja

$$\nabla \times F = \left(-\frac{\partial F^2}{\partial z} + \frac{\partial F^3}{\partial y}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial y}, -\frac{\partial F^2}{\partial z} + \frac{\partial F^3}{\partial y}\right)$$

Związek rotacji $\nabla \times F$ z pochodną zewnętrzną Weźmy 1-formę

$$\begin{aligned}\omega &= F^1 \wedge dx + F^2 \wedge dy + F^3 \wedge dz \\ &= \left(-\frac{\partial F^2}{\partial z} + \frac{\partial F^3}{\partial y}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(-\frac{\partial F^1}{\partial y} + \frac{\partial F^2}{\partial x}\right) dx \wedge dy\end{aligned}$$

Dywergencją $\mathrm{div}F$ pola F nazywamy funkcję

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$d(F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = \mathrm{div}F dx \wedge dy \wedge dz$$

Forma Objętości $M \subset \mathbb{R}^n$ - zorientowana k - wymiarowa rozmaitość $x \in M \rightsquigarrow T_xM \subset \mathbb{R}^n_X$. Na $\mathbb{R}^n_x$ mamy iloczyn skalarny $v, w \in \mathbb{R}^n_x$ to $(v|w) = \sum_{i=1}^n x_i w_i$. Ten iloczyn zadaje iloczyn skalarny na T_xM przez obcięcie do podprzestrzeni. Niech $(f_1, \ldots, f_k)$ będzie bazą ortonormalną T_xM zgodną z orientacją. $\exists! \omega(x)$ - k - forma na T_xM t.że $\omega(x) = (f_1, \ldots, f_k) = 1$. To definiuje formę różniczkową $\omega \in \Omega_{\text{różn}}(M)$ oraz ω nie zależy od powyżej dokonanych wyborów. Mówimy, że ω jest formą objętości na M.

Przypadek szczególny Niech $n = 3$, $k = 2$ (np. sfera). Dla $x \in M$ definiujemy $m(x) \in \mathbb{R}^3_x$ jako taki wektor unormowany, który

- $\forall x \in T_xM$ mamy $n(x) \perp v$
- jeśli $v, w \in T_xM$ jest bazą zgodną z orientacją to $(v, w, n(x))$ jest zgodna z kanoniczną orientacją $\mathbb{R}^3_x$

Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku szególnym mamy

$$\forall v, w \in T_xM \ \ \omega(x)(v, w) = (n(x)|v \times w)$$

Zauważmy, że $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.że $v \times w = \alpha n(x)$. Zatem, $\forall z \in \mathbb{R}^3_x$ mamy

$$(z|n(x))(n(x)|v \times w) = (z|n(x))(n(x)|\alpha n(x)) = (z|n(x))\alpha = (z|\alpha n(x)) = (z|v \times w)$$

Weźmy za $z = \mathrm{e}^1_x$. Wtedy skoro $n(x) = n_1(x)\mathrm{e}^1_x + n_2(x)\mathrm{e}^2_x + n_3(x)\mathrm{e}^3_x$ to $n_1(x)w(x)(v, w) = (e_1|v \times w) = v_2w_3 - w_2v_3 = dy \wedge dz(v, w)$. Stąd na rozmaitości M mamy tożsamość

$$n_1(x)\omega(x) = dy \wedge dz (*)$$

Podobnie dowodzi się, że

$$n_2(x)\omega(x) = dz \wedge dx (*)$$
$$n_3(x)\omega(x) = dx \wedge dy (*)$$

Twierdzenie 8.3 (Klasyczne twierdzenie Stokesa dla div)**.** Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ będzie podzbiorem otwartym w $\mathbb{R}^3$ oraz niech F będzie polem wektorowym na $\mathcal{O}$. Wówczas

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (\text{div}F)dV = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} (n(x)|F(x))\omega(x)$$

gdzie ω jest formą objętości na M.

Dowód. Rozważmy 2 - formę

$$\rho(x,y,z) = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy,$$

$d\rho = (\text{div}F)dx \wedge dy \wedge dz$. Zatem

$$\int\limits_{\mathcal{O}} \text{div}F dV = \int\limits_{\mathcal{O}} d\rho = \int\limits_{\mathcal{O}} F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy \overbrace{=}^{(*)}$$
$$\int\limits_{\mathcal{O}} (F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3)\omega(x) = \int\limits_{\partial\mathcal{O}} (n(x)|F(x))\omega(x)$$

□

Twierdzenie 8.4 (Stokesa dla rotacji)**.** Niech $M \subset \mathbb{R}^3$ będzie 2-wymiarową rozmaitością zwartą z brzegiem. Niech F będzie polem wektorowym na $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ oraz $M \subset \mathcal{O}$. Niech ds oznacza 1-formę objętości na ∂M. Wybierzmy pole T wektorów stycznych do ∂M t.że $ds(T) = 1$. Wówczas

$$\int\limits_{M} (\text{rot}F|n(x))\omega = \int_{\partial M} (F|T)ds$$

9 Wykład 07.11.2016.

Analiza zespolona i funkcje holomorficzne

Źródła:

- P. Urbański - Analiza III, rozdział 18,
- F. Leja - Analiza zespolona

Definicja 9.1. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ będzie podzbiorem otwartym, $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$ i niech $z_0 \in \mathcal{O}$. Mówimy, że f jest **holomorficzna** w punkcie z_0 jeśli istnieje granica ilorazu różnicowego $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ przy $h \in \mathbb{C}$ dążącym do zera.
Jeśli f jest holomorficzna w każdym z punktów $z_0 \in \mathcal{O}$ to mówimy, że f jest holomorficzna na $\mathcal{O}$.

Uwaga 9.2. Z h zbiegamy do zera, a granica $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ nie zależy od sposobu zbiegania.

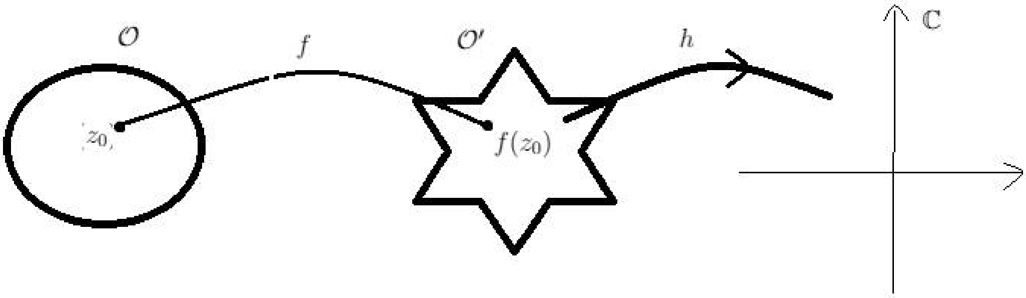
Notacja 9.3. Notacja: jeśli f jest homolomorficzna to piszemy

$$\frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Stwierdzenie 9.4. (Reguły różniczkowania)
Niech $f, g : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$ będą holomorficzne w $z_0 \in \mathcal{O}$. Wówczas $f + g$, $f \cdot g$ są holomorficzne w z_0 oraz:

- $\frac{d(f+g)}{dz} = \frac{df}{dz}(z_0) + \frac{dg}{dz}(z_0)$
- $\frac{d}{dz}(f \cdot g)(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot \frac{dg}{dz}(z_0)$

Niech $\mathcal{O}' \subset \mathbb{C}$ oraz $f(z_0) \in \mathcal{O}'$. Jeśli h jest holomorficzna w $f(z_0)$ to $h \circ f$ jest holomorficzna w $z_0 \in \mathcal{O}$ oraz $\frac{d}{dz}(h \circ f)(z_0) = \frac{dh}{dz}(f(z_0))\frac{df}{dz}(z_0)$.



Dowód. taki sam jak na Analizie I $\square$

Przykład 9.5. $n \in \mathbb{N}$ funkcja $\mathbb{C} \ni z \longmapsto z^n \in \mathbb{C}$ jest holomorficzna na $\mathbb{C}$ oraz $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$.

Holomorficzność szeregów potęgowych

Motywacja:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Przypomnienie: szeregi potęgowe, są to wyrażenia postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Promień zbieżności r, gdzie $\frac{1}{r} = \limsup |a_n|^n$. Wówczas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżna dla wszystkich $z : |z| < r$. Co więcej szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny niemal jednostajnie na $K(0, r)$.

Różniczkując $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ wyraz po wyrazie dostajemy szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Zróżniczkowany szereg potęgowy ma taki sam promień zbieżności jak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, gdyż $\sqrt[n]{n|a_n|} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$ oraz $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest niemal jednostajnie zbieżny na $K(0, r)$. Powtarzając argumenty o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych z analizy rzeczywistej dowodzimy, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definiuje funkcję holomorficzną na $K(0, r)$.

Wniosek 9.6. $e^z, \cos z, \sin z, e^{z^z}, e^{\sin z}$ są holomorficzne na $\mathbb{C}$

Definicja 9.7. Jeśli f: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ jest holomorficzna to mówimy, że jest to *funkcja całkowita.*

Równania Cauchy'ego - Riemanna

Rozważmy funkcję $f : \mathbb{C} \supset \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$. Dla $z \in \mathcal{O}$ $(z = x + iy)$ $x, y \in \mathbb{R}$ oraz istnieją funkcje $u, v : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ takie, że $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Założenie: f - holomorficzna w $z \in \mathcal{O}$, $z = x + iy$.

Iloraz różnicowy dla $h = t \in \mathbb{R}$ oraz $t \longrightarrow 0$.

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z)}{h} = \frac{u(x + t, y) + iv(x + t, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

Iloraz różnicowy dla $h = it \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ oraz $t \longrightarrow 0$.

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{u(x, y + t) + iv(x, y + t) - u(x, y) - iv(x, y)}{it} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Równania Cauchy'ego - Riemanna

$$(CR) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

W drugą stronę: udowodnijmy, że jeśli funkcja $\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$ jest różniczkowalna oraz u, v spełniają warunki CR to funkcja $f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ jest holomorficzna w $z = x + iy$. Pochodna Φ: $\Phi' = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$. Niech $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$$\Phi'(x, y) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} h_1 - \frac{\partial v}{\partial x} h_2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial x} h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Re((\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(h_1 + ih_2)) \\ \Im((\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(h_1 + ih_2)) \end{bmatrix}$$

Zatem utożsamiając $\mathbb{R}^2$ z $\mathbb{C}$ działanie $\Phi'(x, y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zamienia się na operację mnożenia $h_1 + ih_2$ przez liczbę zespoloną $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. $(\bigstar)$

Rózniczkowalości Φ w terminach f oznacza, że istnieje granica

$$\left| \frac{f(z + h) - f(z) - \Phi'(x, y)h}{h} \right| \xrightarrow[|h| \longrightarrow 0]{} 0$$

Korzystając z $(\bigstar)$ mamy:

$$\left| \frac{f(z + h) - f(z) - (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})h}{h} \right| \xrightarrow[h \longrightarrow 0]{} 0$$

czyli
$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right| \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} 0$$
oraz
$$\frac{df}{dz}(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Wniosek 9.8. Niech $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^2$ $u,v:\mathcal{O}\longrightarrow\mathbb{R}$ i u,v spełniają warunki CR. Jeśli u oraz v są klasy $\mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ to $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ jest holomorficzne na $\mathbb{C}$.

Przykład 9.9. $e^z=e^xe^{iy}=\underbrace{e^x\cos y}_{u(x,y)}+i\underbrace{e^x\sin y}_{v(x,y)}$

$$\begin{array}{ll}\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y & \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y\\ \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos v & \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y\end{array}\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

Rozważmy 1-formy o wartościach zespolonych $dz=dx+idy$ oraz $d\bar{z}=dx-idy$. Wówczas
$$\frac{dz+d\bar{z}}{z}=dx \quad \frac{dz-d\bar{z}}{2i}=dy.$$

Jeśli $f:\mathcal{O}\longrightarrow\mathbb{C}$ jest klasy $\mathcal{C}^1(\mathcal{O}):f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ to definiujemy
$$\begin{aligned}df:&=du+idv=(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})dx+(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y})dy=(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x})\frac{dz+d\bar{z}}{2}+(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y})\frac{1}{2i}(dz-d\bar{z})\\ &=\underbrace{\frac{dz}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y})}+\frac{d\bar{z}}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y})\end{aligned}$$

Definiując:
$$\frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\qquad\qquad \frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
dostajemy $df=\frac{\partial}{\partial z}fdz+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}fd\bar{z}$.

Stwierdzenie 9.10. Gdy f jest klasy $\mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ oraz $\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$ to $f:\mathcal{O}\longrightarrow\mathbb{C}$ jest holomorficzne na $\mathcal{O}$,

Dowód. Wystarczy CR $\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$
$$\begin{aligned}0=\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)+i\frac{\partial}{\partial y}(u+iv)\right)=\\ &=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}}_{=0}+i\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=0}\right)\end{aligned}$$

Zauważmy, że jesli f jest holomorficzna to $\frac{df}{dz}=\frac{\partial f}{\partial z}$. □

10 Wykład 14.11.2016.

$\mathcal{A}(\mathcal{O})$– zbiór f-cji holomorficznych na $\mathcal{O} \underset{\text{OTW}}{\subset} \mathbb{C}$. F-cja holomorficzna= f-cja różniczkowalna w sensie zespolonym.

$$dz := dx + idy \qquad d\overline{z} := dx - idy$$

Iloczyny zewnętrzne:

$$dz \wedge dz = 0 = d\overline{z} \wedge d\overline{z}$$

$$dz \wedge d\overline{z} = -2idx \wedge dy$$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$df = du + idv = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial z}d\overline{z}$$

Stwierdzenie 10.1.

$f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ jest holomorficzna $\Leftrightarrow$ 1-forma $\alpha = fdz$ jest zamknięta.

Dowód. Liczymy:

$$d\alpha = df \wedge dz = \left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\right) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \wedge dz = 2i\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dx \wedge dy$$

Zatem $d\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \quad \rightarrow$holomorficzność (przy zał. $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$). $\square$

Definicja 10.2. Całkowanie 1-form zespolonych po krzywych zorientowanych $\Gamma \subset \mathbb{C}$. Niech $f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją ciągłą oraz $\Gamma \subset \mathcal{O}$. Rozważmy 1-formę $\alpha = fdz = (u + iv)(dx + idy) = udx - vdy + i(vdx + udy)$. Całką z funkcji f po krzywej Γ nazywamy liczbę otrzymaną następująco:

$$\int_\Gamma fdz := \int_\Gamma udx - vdy + i\int_\Gamma vdx + udy$$

Przykład 10.3. Scałkować $f(z) = z^2$ po ćwiartce okręgu. Parametryzacja Γ zgodna z orientacją.

$$[0; \frac{\pi}{2}] \ni \varphi \mapsto e^{i\varphi} \in \mathbb{C}, \qquad dz = de^{i\varphi} = ie^{i\varphi}d\varphi$$

$$\int_\Gamma fdz = i\int_0^{\pi/2} e^{2i\varphi}e^{i\varphi}d\varphi = i\int_0^{\pi/2} e^{3i\varphi}d\varphi = \frac{1}{3}e^{3i\varphi}\,|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}(e^{\frac{3}{2}i\pi} - 1) = -\frac{1}{3} - \frac{i}{3}$$

Uwaga 10.4. $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ma dwie orientacje (kanoniczna i przeciwna do kanonicznej). Jeśli $M \subset \mathbb{C}$ jest 2-wymiarową rozmaitością (z brzegiem Γ) to M także ma 2 orientacje, a stąd Γ ma dwie orientacje. Jeśli M jest kanonicznie zorientowana, to całkę po Γ z orientacją indukowaną oznaczamy $\ointctrclockwise_\Gamma$ ($\ointclockwise_\Gamma$- opcja przeciwna).

Przykład 10.5. $M = \overline{K(0,1)}$ z orientacją kanoniczną, to $\partial M = \Gamma$-okrąg zorientowany przecinie do biegu wskazówek zegara.

Wniosek 10.6. Jeśli $f \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ oraz $M \subset \mathcal{O}$, $\Gamma = \partial M$, to $\int_\Gamma f dz = 0$

Dowód.

$$\int_\Gamma f dz = \int_{\partial M} f dz \overset{\text{tw. Stokesa}}{=} \int_M d(f dz) = \int_M 0 = 0$$

□

Wniosek 10.7. Niech $f \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ i niech $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{C}$ będzie obszarem gwiaździstym. Skoro 1-forma $f dz$ jest zamknięta, to na mocy lematu Poincar'ego $\exists F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ t.że $dF = f dz$. Skoro $dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = f dz$ to $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$. Zatem F jest holomorficzna.

Wzór na F (z dokładnością do stałej addytywnej).
Ustalamy $s \in \mathcal{O}$ i niech $\Gamma \subset \mathcal{O}$ będzie krzywą o początku w a oraz końcu w $z \in \mathcal{O}$. Wówczas:

$$\int_a^z f dz \overset{\text{ozn.}}{=} \int_\Gamma f dz = F(z) - F(a)$$

Funkcja logarytm.
Weźmy $f(z) = \frac{1}{z}$. Naturalną dziedziną f jest $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dziedzinę tę zmniejszymy bo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nie jest zbiorem gwiaździstym. Zauważmy, że gwiaździstym względem $1 \in \mathbb{C}$ jest zbiór $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0}$.
Funkcje $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0} \to \mathbb{C}$ definiujemy następująco:

$$\log(z) = \int_1^z \frac{1}{z} dz$$

Niech $z = |z| e^{i \arg z}$, $\arg z \in]-\pi, \pi[$. Wybierając odpowiednio Γ mamy

$$\log(z) = \int_1^{|z|} \frac{1}{t} dt + \int_0^{\arg z} \frac{de^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} = \log|z| + \int_0^{\arg z} \frac{e^{i\varphi} i d\varphi}{e^{i\varphi}} = \log|z| + i \arg z \quad (*)$$

Zauważmy, że $(*) \Rightarrow e^{\log z} = z$. Niech $a \in \mathbb{C}$.

Funkcję potęgową $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0} \ni z \to z^a \in \mathbb{C}$ definiujemy następująco: $z^a := e^{a \log z}$

Twierdzenie 10.8. Wzór Cauchy'ego
Niech $M \subset \mathcal{O}$ będzie 2-wymiarową, zwarta, kanonicznie zorientowaną rozmaitością z brzegiem $\Gamma = \partial M$. Niech $a \notin \Gamma$. Wówczas:

1. Jeśli $a \notin M$, to $\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$
2. Jeśli $a \in M$, to $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$

Dowód. Ad1. Jeśli $a \notin M$ to funkcja $z \to \frac{f(z)}{z-a}$ jest holomorficzna (na dostatecznie małym) otoczeniu M. Zatem $\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$

Ad2. Wówczas $\frac{f(z)}{z-a}$ ma osobliwość w punkcie 0. Niech $\varepsilon > 0$ będzie t.że $K(a,\varepsilon) \subset M$. Niech $\tilde{M} = M \setminus K(a,\varepsilon)$. Wówczas $z \to \frac{f(z)}{z-a}$ jest holomorficzne w pewnym otoczeniu $\tilde{M}$. W takim razie:

$$0 = \oint_{\partial\tilde{M}} \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}dz + \oint_{\partial K(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$\oint_{\partial K(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

Liczymy lewą stronę. Parametryzacja $\partial K(a,\varepsilon)$ $z = a + \varepsilon e^{(i\varphi)}$ $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{i\varphi})\overbrace{\varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi}^{dz}}{\varepsilon e^{i\varphi}} = i\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\varphi})d\varphi \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\pi i f(a)$$

$\square$

Uwaga 10.9. 1. Znajomość funkcji holomorficznej na krzywej $\Gamma = \partial M$ pozwala odtworzyć f na całym M.

2. F-cja różniczkowalna w sensie zespolonym jest ∞-razy różniczkowalna; o tym na następnym wykładzie.

11 Wykład 18.11.2016

Wzór Cauchy'ego: $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$

Twierdzenie 11.1. O całce z parametrem
Niech $f : [a,b]\times]c,d[\to \mathbb{R}$ będzie ciągła, oraz niech $\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha) : [a,b]\times]c,d[\to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas $F(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)dx$ jest różniczkowalna oraz pochodna $F'(\alpha) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\alpha)dx$.

Przytoczony powyżej Wzór Cauchy'ego $f(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ jest całką z parametrem z.

$z = x + iy$
$\frac{df}{dz}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{d}{dz}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta$

Wniosek 11.2. $\frac{df}{dz} \in C^1(\Omega)$

Wniosek 11.3. $\frac{df}{dz}$ spełnia warunki Cauchy'ego-Riemanna.

Rzeczywiście $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\frac{df}{dz})(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{d}{d\bar{z}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}dz = 0$. Podsumowując $\frac{df}{dz} \in A(\Omega)$.

Twierdzenie 11.4. Funkcja $f \in A(\Omega)$ ma pochodne zespolone wszystkich rzędów (jest różniczkowalna w sensie zespolonym nieskończenie wiele razy) oraz pochodna n-ta jest równa:
$f^{(n)}(z) := \frac{\partial^n}{\partial z^n}f(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta.$

Twierdzenie 11.5. Nierówność Cauchy'ego
Niech $\Omega \subset C$. Niech $f \in A(\Omega)$, $r > 0$ takie, że $K(a,r) \subset \Omega$, gdzie $a \in \Omega$. Wówczas $\left|f^{(n)}(a)\right| \leqslant \frac{n!}{r^n} \underset{\zeta = a+re^{i\varphi}, \varphi \in [0,2\pi]}{sup} |f(\zeta)|$.

Dowód. Weźmy $\Gamma = \partial K(a,r)$. Wówczas
$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\varphi})re^{i\varphi}id\varphi}{r^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}} \right| \leqslant \frac{n!}{2\pi r^n} \int\limits_0^{2\pi} |f(a+re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant \frac{n!}{2\pi r^n} 2\pi \underset{\varphi \in [0,2\pi]}{sup} |f(a+re^{i\varphi})|$.

□

Twierdzenie 11.6. Twierdzenie Liouvilla
Niech $f \in A(\mathbb{C})$. Jeśli f jest ograniczona to jest stała.

Dowód. Wystarczy pokazać, że $\frac{df}{dz} = 0$. Ustalmy $r \in \mathbb{R}_+$ (dalej $r \to \infty$). Nierówność Cauchy'ego dla $n = 1$ daje:
$\left|\frac{df}{dz}(z)\right| \leqslant \frac{1}{r} \underset{\zeta = ze^{i\varphi}, \varphi \in [0,2\pi]}{sup} |f(\zeta)| \leqslant \frac{M}{r}$, gdzie $M \in \mathbb{R}_+ : |f(\zeta)| \leqslant M$ dla wszystkich $\zeta \in \mathbb{C}$. Przechodząc z r do nieskończoności dostajemy $\frac{df}{dz} = 0 \Rightarrow f = const$. □

Twierdzenie 11.7. Twierdzenie Gaussa
Jeśli w jest wielomianem $st(w) \geqslant 1$ to $\exists z \in \mathbb{C}$ takie, że $w(z) = 0$.

Dowód (przez doprowadzenie do sprzeczności). Niech $w(z) = a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + a_n z^n$. Przypuśćmy, że $w(z)$ nie ma pierwiastka: $w(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Wówczas $f(z) := \frac{1}{w(z)}$ jest funkcją całkowitą, (czyli holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$). Ponadto skoro $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{1}{w(z)} = 0$ to f jest ograniczona, czyli $\exists c \in \mathbb{C} : f(z) = c = \frac{1}{w(z)}$. Czyli $w(z) = \frac{1}{c} \Rightarrow st(w) = 0$, sprzeczność. □

Przykład 11.8. Rozważmy funkcję rzeczywistą, gdzie $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
f jest funkcją ciągłą w zerze, jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna i wszystkie jej pochodne w zerze wynoszą zero: $f^{(n)}(0) = 0$. Zatem f nie można rozwinąć w szereg taylora wokól zera.

Twierdzenie 11.9. Twierdzenie Taylora
Niech $f \in A(\Omega)$, $K(a,r) \in \Omega$. Wówczas szereg $f(a) + (z-a)f'(a) + .. + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots$ jest niemal jednostajnie zbieżny na $K(a,r)$ do $f(z)$.

Przypomnienie o jednostajnej zbieżności: $f_n \xrightarrow{jedn.zb.} n$ na X, gdy $\sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Dowód. Udowodnimy, że szereg $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ jest zbieżny jednostajnie na $K(a,r')$ dla $r' < r$. Wykorzystamy kryterium Weierstrassa, które mówi o zbieżności jednostajnej. Zauważmy, że z nierówności Cauchy'ego mamy

$$\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n\right| \leqslant \frac{n!}{n! r^n} \underset{\phi \in [0,2\pi]}{sup} \left|f(a+re^{i\varphi})\right| r'^n \leqslant \left(\frac{r'}{r}\right)^n C_1$$

gdzie stała $C_1 = \sup\limits_{\phi \in [0,2\pi]} \left|f(a+re^{i\phi})\right|$. Skoro $\frac{r'}{r} < 1$, to z kryterium Weierstrassa szereg

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

jest zbieżny bezwzględnie na $K(a,r')$.

Przypomnienie Kryterium Weierstrassa:
jeśli $|f_n(x)| \leqslant a_n$ oraz $\sum a_n \leqslant \infty$ to szereg jest $\sum f_n$ jest jednostajnie zbieżny.

Aby wykazać xbieżność $\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ do f, korzystajmy ze wzoru Cauchy'ego

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Skoro

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a + a - z} = \frac{1}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta - a})}$$

oraz

$$|z-a| < |\zeta - a|$$

to

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta - a} (\frac{z-a}{\zeta - a})^n.$$

Zatem zamieniając $\oint$ z $\sum$ dostajemy:

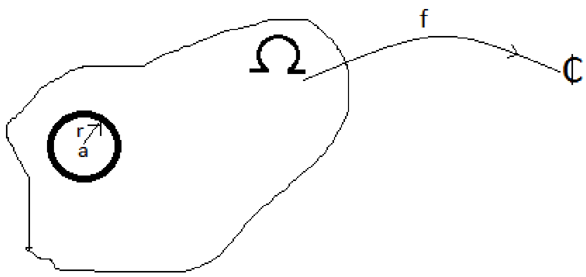
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \oint\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

gdyż

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - a| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{(n+1)}} dz$$

□

12 Wykład 21.11.2016.



f-holomorficzna

Szereg Taylora:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

Wiemy już że jeśli istnieje

$$\frac{d}{dz}f(a) \text{ to istnieje } f^{(n)}(a) := \frac{d^n}{dz^n}f(a),\ n \in \mathbb{N}$$

Wnioski z twierdzenia Taylora:

1. Jeśli Ω jest obszarem spójnym oraz $a \in \Omega$ i mamy $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $f^{(n)}(a) = 0$ to $f(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$

Dowód. Ω jest spójny $\Leftrightarrow$ jedynym niepustym podzbiorem Ω który jest jednocześnie otwarty i domknięty jest Ω.

Niech $\Theta \subset \Omega$ gdzie $\Theta = \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$
Zauważmy, że $\Theta \neq \varnothing$ $(a \in \Theta)$
Ponadto $\Theta = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \Theta_n$ gdzie $\Theta_k = \{z \in \Omega :\ f^{(k)}(z) = 0\}$
Ponieważ $f^{(k)} : \Omega \to \mathbb{C}$ jest ciągła to $\Theta_k \subseteq \Omega$ jest domnięty.
Zatem Θ jest zbiorem domkniętym.
Zauważmy, że $\Theta \subset \Omega$ jest otwarty: jeśli $z_0 \in \Theta$ to:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{=0 (z_0 \in \Theta)}(z - z_0)^n = 0$$

dla $z \in \mathbb{K}(z_0, r)$ $\qquad r > 0$
Co pokazuje, że $K(z_0, r) \subset \Theta$. Stąd $\Theta = \Omega$ i $f = 0$ na Ω. $\square$

2. Jeśli Ω-spójny oraz $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ - holomorficzne i $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ to $f = g$ na zbiorze Ω

Dowód. Wystarczy skorzystać z (1) dla różnicy $f - g$. $\square$

3. Jeśli Ω spójny oraz $a_n \in \Omega$ gdzie $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a \in \Omega$ t.że $a_n \neq a$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $f(a_n) = 0$. Wówczas $f = 0$ na zbiorze Ω.
Innymi słowy, zera funkcji która nie jest stała są izolowane.

Dowód. Wystarczy pokazać, że $f^{(n)}(a) = 0$ dla $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i skorzystać z (1).
Niech $n_0 \subset \mathbb{N}$ będzie najmniejszą liczbą t.że $f^{(n_0)}(a) \neq 0$.
W szczególności:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z - a)^k = (z - a)^{n_0} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z - a)^{k - n_0}}_{=:g(z)} = (z - a)^{n_0} \cdot g(z)$$

gdzie $g(a) \neq 0$ i g jest holomorficzna.
Z drugiej strony $g(a_n) = \frac{f(a_n)}{(a_n - a)^{n_0}} = 0$.
Jest to sprzeczne z ciągłością g. W szczególności g nie może być holomorficzna. $\square$

Szeregi Laurenta.

Przykład 12.1. $e^{\frac{1}{z}} : \mathbb{C}\backslash\{0\{\} \to \mathbb{C}$. Funkcja "nie rozwija" się w szereg Taylora wokół $z = 0$. Rozwija się za to w szereg w $\frac{1}{z}$.

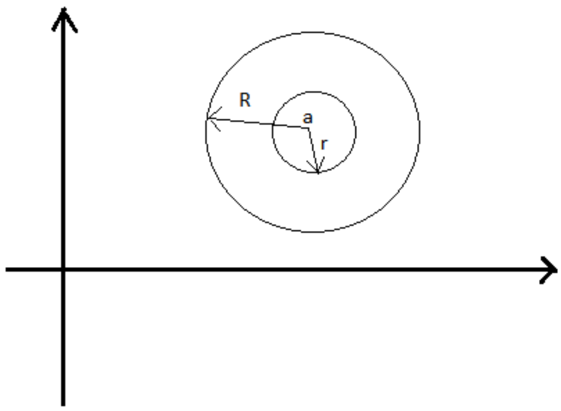
$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$$

Ogólnie szeregi Laurenta mają postać:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^k$$

.

Definicja 12.2. Niech $a \in \mathbb{C}$ $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$ i $r < R$. Otwartym pierścieniem o środku w punkcie a i promieniach r, R nazywamy zbiór $\Re(a; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r <\mid z - a \mid< R\}$.



Twierdzenie 12.3. Niech $f : \Re(a; r, R) \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Wówczas f daje się przedstawić jako szereg:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

gdzie:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - a| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^n} d\xi$$

$a : r < \rho < R$.
Szereg ten jest niemal jednostajnie i bezwzględnie zbieżny na $\Re(a; r, R)$.

Przypomnienie 12.4. $g_n \to g$ jed. na x jeśli $\sup_{x \in \mathbb{X}} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{} 0$

Dowód. Ustalmy $r', R', r'', R'' : r < r' < r" < R" < R' < R$.
Rozważmy $\overline{\Re(a; r', R')} \subset \Re(a; r, R)$
$\partial\Re(a; r', R')$jest sumą okręgu $\partial\overline{K(a, R')}$ zorientowanego kanoniecznie ↺ oraz okręgu $\partial\overline{K(a, r')}$ zorientowanego ↻. Niech $z \in \Re(a; r", R")$
Wzór Cauchy'ego:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overline{\Re(a;r',R')}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(a,R')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(a,r')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Dalej stosujemy oznaczenie $\sup |f(z)| = M(a, \widetilde{r})$
$z \in \partial K(a; \widetilde{r})$.

Zauważmy, że $|z - a| < |\xi - a|$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a + a - z} = \frac{1}{(\xi - a)} \frac{1}{(1 - \frac{z-a}{\xi-a})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - a)^k}{(\xi - a)^{k+1}}$$

gdzie szereg jest zbieżnym szeregiem geometrycznym z $q = |\frac{z-a}{\xi-a}| < 1$. Zatem

$$|\frac{f(\xi)}{\xi - z}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |f(\xi)| \frac{|z - a|^k}{|\xi - a|^{k+1}} \leqslant M(a, R') \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R'^k}{R'^{k+1}}$$

i szereg jest bezwzględnie i jednostanie zbieżny w ξ.
Zatem z sumą można wyjść przed całkę oraz

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial K(a,R')} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi-a|=R} \sum_{k=0}^{\infty} f(\xi) \frac{(z - a)^k}{(\xi - a)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} (z - a)^k \oint\limits_{|\xi-a|=R'} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}} d\xi$$

Analiza wyrażenia

$$\frac{(-1)}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi-a|=r'} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{z - a + a - \xi} = \frac{1}{(z - a)} \frac{1}{(1 - \frac{\xi-a}{z-a})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi - a)^k}{(z - a)^{k+1}}$$

$$q = \frac{|\xi - a|}{|z - a|} < \frac{r'}{r"}$$

Zauważmy, że

$$|f(\xi) \cdot \frac{(\xi - a)^k}{(z - a)^{k+1}}| \leqslant M(a, r') \cdot \frac{r'^k}{r"^{k+1}}$$

i szereg

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi - a)^k}{(z - a)^{k+1}}$$

jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w ξ.
W końcu:

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=r'}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{k+1}}\frac{1}{w\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=r'}f(\xi)(\xi-a)^k d\xi$$

i szereg jest jednostajnie i bezwzględnie zbieżny na $\overline{\Re(a;r", R")}$.
Zatem:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k(z-a)^k$$

gdzie:

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=R'}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{k+1}}$$

Ponieważ a nie należy do $\Re(a;r,R)$ to:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=R'}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{k+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{k+1}}d\xi \qquad r<\rho<R$$

i podobnie:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=r'}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{k+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-a|=\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{k+1}}d\xi \qquad r<\rho<R$$

□

13 Wykład 25.11.2016.

Szereg Laurenta

$$f\in\mathcal{A}(\mathcal{R}(z_0,r,R))$$
$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$
$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}d\xi \qquad r<\rho<R$$

Niech f będzie funkcją holomorficzną na $\mathcal{R}(z_0,0,R)$. Mówimy, że z_0 jest izolowanym punktem osobliwym funkcji. Niech $f(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$.

- Jeśli $\forall k<0$ mamy $b_k=0$ to mówimy, że z_0 jest osobliwością usuwalną. Kładąc $f(z_0)=b_0$ dostajemy funkcję holomorficzną na $K(z_0,R)$.
- Jeśli $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $b_k\neq 0$ oraz $\forall l<-k \quad b_l=0$, to mówimy, że z_0 jest biegunem rzędu k. Wtedy:

$$f(z)=\frac{b_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{b_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}}+\dots+\frac{b_{-1}}{z-z_0}+b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\dots$$

- Jeśli nieskończenie wiele współczynników stojących przy ujemnych potęgach $(z-z_0)$ jest różna od zera to mówimy, że z_0 jest osobliwością istotną.

Przykład 13.1.

- $\frac{\sin(z)}{z}$, $z_0 = 0$ jest osobliwością usuwalną.

$$\frac{\sin(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}(-1)^k}{(2k+1)!}$$

- $\frac{1}{z\sin(z)}$, $z_0 = 0$ jest biegunem rzędu 2.

$$\frac{1}{z\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots} =$$
$$= \frac{1}{z^2}\left(1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right) =$$
$$= \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{z^2}{6} + \left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) z^4 + \dots\right) = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{z^2}{6} - \frac{7z^4}{360} + \dots\right)$$

- $e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$ jest osobliwością istotną.

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$$

- $\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$, $z_0 = 0$ nie jest izolowanym punktem osobliwym.

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \text{ gdy } \frac{1}{z} = k\pi \text{ czyli } z = \frac{1}{k\pi} \xrightarrow[k\longrightarrow\infty]{} 0$$

Uwaga 13.2.

$$b_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi - z_0|} f(\xi)d\xi$$

Definicja 13.3. Jeśli z_0 jest izolowanym punktem osobliwym funkcji f to b_{-1} nazywamy residuum f w z_0 i oznaczamy symbolem $\mathrm{Res}_{z_0}(f)$.

Stwierdzenie 13.4. Niech z_0 będzie biegunem rzędu n funkcji f. Wówczas:

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-z_0)^n f(z))\right)$$

Dowód. Szereg Laurenta:

$$f(z) = \frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{b_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{b_{-1}}{z-z_0} + b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \dots$$
$$(z-z_0)^n f(z) = b_{-n} + b_{-z+1}(z-z_0) + \dots + b_{-1}(z-z_0)^{n-1} + b_0(z-z_0)^n + b_1(z-z_0)^{n+1} + \dots$$

$b_{-n} + b_{-z+1}(z-z_0) + \dots$ - anihilowane przy $(n-1)$-krotnym różniczkowaniu

$b_{-1}(z-z_0)^{n-1}$ - różniczkowanie daje $b_{-1}(n-1)!$

$b_0(z-z_0)^n + b_1(z-z_0)^{n+1} + \dots$ - anihilowane po podstawieniu z_0

□

Stwierdzenie 13.5. Niech z_0 będzie osobliwością izolowaną funkcji f. Wówczas z_0 jest osobliwością usuwalną $\Leftrightarrow \exists r > 0$, że $\sup\limits_{z \in K(z_o,r)\setminus\{z_0\}} |f(z)| < M$.

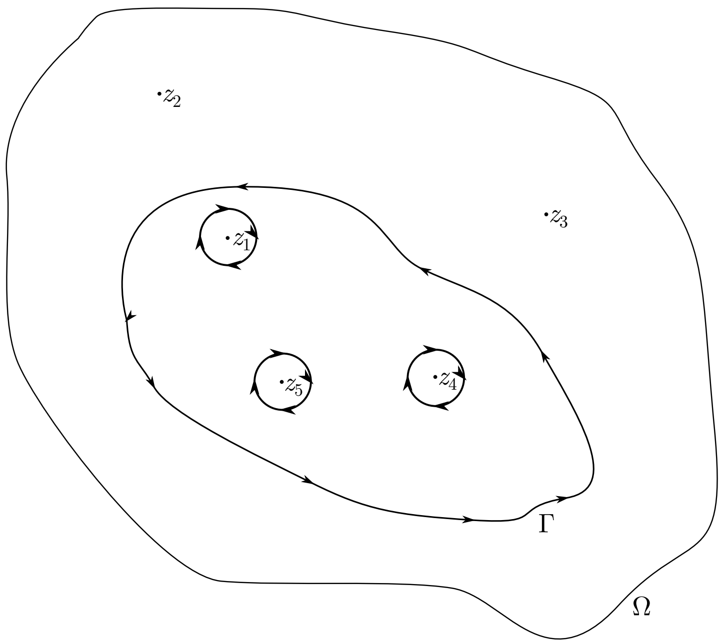
Dowód.
$\Rightarrow$ - oczywiste (f jest ciągła na pewnej kuli $\overline{K(z_0,r)}$, więc ograniczona).
$\Leftarrow$ - $\rho < r$, skoro $b_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}$ biorąc $\xi = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ mamy $b_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{i\varphi})\rho e^{i\varphi} i d\varphi}{\rho^{k+1}e^{i(k+1)\varphi}}$, $|b_k| \leqslant M\rho^{-k}$, dla $k < 0$ oraz $\rho \to 0$ mamy $|b_k| \leqslant 0$, a zatem $b_k = 0$, $k < 0$. □

Stwierdzenie 13.6. $z_0 \in \mathbb{C}$ jest biegunem funkcji $f \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

Dowód.
$\Rightarrow$ - z_0 - biegun rzędu k, to $\exists g : K(z_0,r) \to \mathbb{C}$ - holomorficzna, że $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} g(z)$. $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}(b_{-k} + b_{-k+1}(z-z_0) + \dots)$, $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{|z-z_0|^k}|g(z)| = \infty$, bo $|g(z)| \xrightarrow[z \to z_0]{} |b_{-k}|$
$\Leftarrow$ - skoro $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$ to $\exists r > 0 : f(z) \neq 0$ na $K(z_0,r)$ a więc $\tilde{f} = \frac{1}{f}$ jest holomorficzna na $K(z_0,r)$. Niech $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ będzie szeregiem Taylora funkcji $\tilde{f}$. Niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie najmniejszą liczbą, że $a_{n_0} \neq 0$. Wtedy $\tilde{f} = (z-z_0)^{n_0}\tilde{g}$,gdzie $\tilde{g}$ holomorficzna na $K(z_0,r)$ oraz $\tilde{g}(z_0) \neq 0$. Wtedy $f(z) = (z-z_0)^{-n}\frac{1}{\tilde{g}}(z)$, $\frac{1}{\tilde{g}}(z)$ holomorficzna wokół $z_0 \in \mathbb{C}$, czyli z_0 jest biegunem rzędu n_0. □

Twierdzenie 13.7. (o liczeniu całek metodą residuów)
Niech $f : \Omega\setminus\{z_1,\dots,z_n\} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną oraz niech $\Gamma \subset \Omega$ będzie brzegiem obszaru zwartego $D \subset \Omega$, że $\Gamma \cap \{z_1,\dots,z_n\} = \emptyset$. Wówczas $\oint\limits_{\Gamma} f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum\limits_{z_i \in D} \mathrm{Res}_{z_i}(f)$.

Dowód. $\forall i$ wybieramy r_i w taki sposób, że $K(z_i,r_i) \cap K(z_j,r_j) = \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $K(z_i,r_i) \subset D$.



Stosujemy twierdzenie Cauchyego do $M = D \setminus \bigcup K(z_j, r_j)$.

$$\partial M \cup \bigcup_{z_j \in D} \partial\overline{K(z_j, r_j)}$$

$$0 = \oint_\Gamma f(\xi)d\xi - \sum_{z_j \in D} \oint_{|\xi - z_j| = r_j} f(\xi)d\xi$$

$$\oint_{|\xi - z_j| = r_j} f(\xi)d\xi = 2\pi i \mathrm{Res}_{z_j}(f)$$

$$\oint_\Gamma f(\xi)d\xi = 2\pi i \sum_{z_j \in D} \mathrm{Res}_{z_j}(f)$$

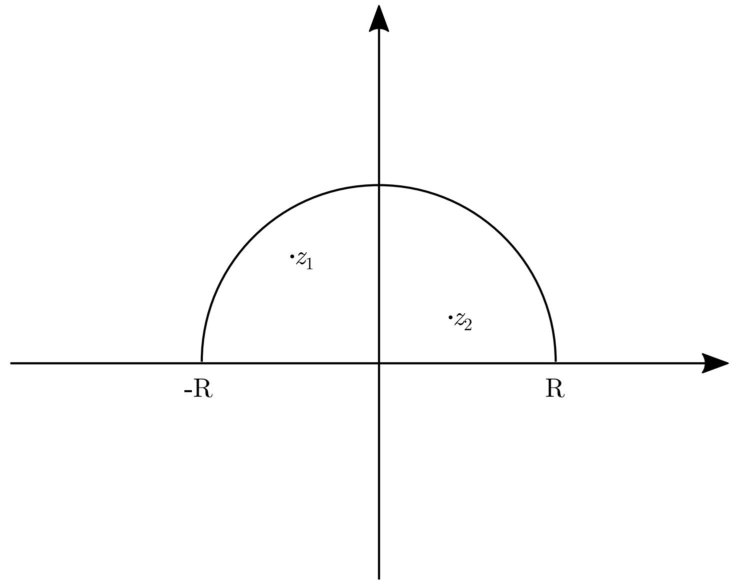
□

Przykład 13.8.

- $J = \int\limits_0^{2\pi} Q(\sin(x), \cos(x))dx$, gdzie Q jest funkcją wymierną dwóch zmiennych ciągłą na okręgu jednostkowym. Podstawiamy $\sin(x) = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$, $\cos(x) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$, $z = e^{ix}$, $dz = ie^{ix}dx = izdx \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz}$.

$$J = \oint_{\partial\overline{K(0,1)}} \frac{1}{iz} Q\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) dz = 2\pi i \sum_{|z|<1} \mathrm{Res}_z \frac{1}{iz} Q\left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)$$

- $J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(x)dx$, gdzie Q jest funkcją wymierną ciągłą na $\mathbb{R}, \lim\limits_{z\to\infty} zQ(z) = 0$. Wybieramy kontur Γ.



$$\int\limits_{\Gamma} Q(z)dz = \int\limits_{-R}^{R} Q(x)dx + \int\limits_{0}^{\pi} Q(Re^{i\varphi})Re^{i\varphi}id\varphi$$

$$\left|\int\limits_{0}^{\pi} Q(Re^{i\varphi})Re^{i\varphi}id\varphi\right| \leqslant \sup_{\varphi\in[0,\pi]} |Q(Re^{i\varphi})R|\pi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z)>0} \mathrm{Res}_z(f) \xleftarrow[R\to\infty]{} \int\limits_{\Gamma} Q(z)dz \xrightarrow[R\to\infty]{} \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(x)dx$$

14 Wykład 05.12.2016.

$\mathcal{M}(\Omega)$ - zbiór funkcji meromorficznych na zbiorze Ω
$f \neq 0, f \in \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{M}(\Omega)$

Przykład 14.1. $P, Q \in \mathbb{C}[\cdot] \longrightarrow f = \frac{P}{Q} \in \mathcal{M}(\Omega)$. f ma osobliwości tam gdzie Q ma zera.

Twierdzenie 14.2. Jeśli $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ oraz $z_0 \in \Omega$ jest zerem rzędu k to z_0 jest biegunem rzędu $k-1$. Jeśli z_0 jest biegunem rzędu k funkcji f to z_0 jest biegunem rzędu $k+1$ funkcji f'. W szczególności $f' \in \mathcal{M}(\Omega)$

Dowód. dla zer: $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \overset{a_k\neq 0}{=} (z-z_0)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k} = (z-z_0)^k g(z)$, gdzie $g(z_0) = a_k \neq 0$. Zatem $f'(z) = k(z-z_0)^{k-1}g(z) + (z-z_0)^k g'(z)$ i skoro $g(z_0) \neq 0$ to f' ma w z_0 zero rzędu $k-1$
dla biegunów: $f(z) = (z-z_0)^{-k}g(z)$ dla pewnej funkcji g holomorficznej wokół z_0 t. że $g(z_0) \neq 0$.

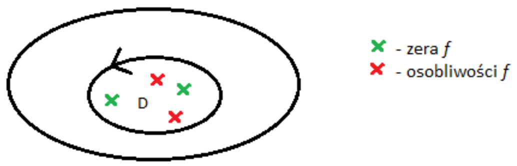
Zatem $f'(z) = -k(z-z_0)^{-k-1}g(z) + (z-z_0)^{-k}g'(z)$. Skoro $g(z_0) \neq 0$ to f' ma w z_0 biegun rzędu $k+1$. $\square$

Wniosek 14.3. $0 \neq f \in \mathcal{M}(\Omega), z_0 \in \Omega$ jest biegunem rzędu k to z_0 jest biegunem $\frac{f'}{f}$ ma w z_0 biegun rzędu 1 z residuum $-k$.
$\frac{f'}{f}(z) = \frac{-k(z-z_0)^{-k-1}g(z)+(z-z_0)^{-k}g'(z)}{(z-z_0)^{-k}g(z)} = \frac{-k}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$

$\frac{g'(z)}{g(z)}$ jest holomorficzna w z_0.

Wniosek 14.4. $z_0 \in \Omega$ jest zerem rzędu k to $\frac{f'}{f}$ ma w z_0 osobliwość rzędu 1 o residuum równym k.

Twierdzenie 14.5. (O liczbie zer i biegunów)
$f \in \mathcal{M}(\Omega), D \Subset \Omega$ - zwarty t.że f na ∂D nie ma zer i nie ma biegunów $\longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f'}{f}(\xi)d\xi = N_z - N_b$, gdzie N_z - zera w zbiorze D liczone z krotnością, N_D - bieguny w zbiorze D liczone z krotnością.



Dowód. $\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'}{f}(\xi)d\xi = \sum_i Res\frac{f'}{f}(z_i) = k_5 + k_6 + k_2 - k_1 - k_2 = k_3 - k_4 = N_z - N_b$ $\square$

Twierdzenie 14.6. (Runge'go)
Niech f będzie funkcją holomorficzną na Ω, $D \underset{zw.}{\in} \Omega$ t.że $f(z) \neq 0$ dla wszystkich $z \in \partial D$. Niech $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie holomorficzna i taka, że $|g(z)| < |f(z)|$ na ∂D. Wówczas liczba zer funkcji $f+g$ na zbiorze D jest równa liczbie zer funkcji na zbiorze D.

Dowód. $\forall t \in [0,1]$ rozważmy całkę $t \rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'+tg'}{f+tg}(\xi)d\xi = N_z(t)$ – liczba zer funkcji $f+tg$ wewnątrz D.
$N_z(t)$ jest funkcją ciągłą $t \in [0,1]$, całką z parametrem, przyjmującą wartości całkowite, zatem $N_z(t)$ jest stała a więc $N_z(0) = N_z(1)$ ($N_z(0)$ - liczba zer funkcji f na D, $N_z(1)$ - liczba zer funkcji $f+tg$). $\square$

Wniosek 14.7. z tw. Runge'go
Wielomian $W(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$, $a_n \neq 0$, ma n pierwiastków licząc z krotnościami.

Dowód. $f(z) = a_n z^n$, $\quad g = a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + ... + a_0$
$f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, czyli $\Omega = \mathbb{C}$. $D = K(0,R)$ gdzie jest tak duże, że $|f(z)| > |g(z)|$. Z tw. Runge'go $W(z) = f + g$ ma tyle zer co $f = a_n z^n$ czyli n. $\square$

TEORIA DYSTRYBUCJI
Nie istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (t. że $f(x) = 0$ dla $x \neq 0$) oraz t. że dla wszystkich $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zachodzi wzór $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = g(0)$. W książkach spotykamy się z funkcją delta Diraca $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

t. że $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)g(t) = g(0)$. Co więcej funkcja δ bywa różniczkowana. Widuje się też wzory $\Theta'(t) = \delta(t)$, gdzie Θ jest funkcją schodkową tzn.

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leqslant 0 \end{cases}$$

Sposób myślenia
Rozważmy funkcję $f \in C(\mathbb{R})$(funkcje ciągłe na odcinku rzeczywistym). Znając wartości całek $g \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$ gdzie g są funkcjami gładkimi o zwartych nośnikach można odtworzyć funkcję f.

Definicja 14.8. Niech $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$. Nośnikiem $\text{supp}(f) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}$. Jeśli $\text{supp}(f)$ jest zbiorem zwartym to mówimy, że f jest funkcją o zwartych nośnikach.

Definicja 14.9. Przestrzeń funkcji próbnych na $\mathbb{R}^n$ to $D(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} : \text{supp}(f)$ - zwarty a f gładka $\}$

Przykład 14.10. Krok 1

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leqslant 0 \end{cases}$$

$\psi(t)$ gładka, $\text{supp}(\psi) = [0, \infty[$

Krok 2
$\phi(t) = \psi(t)\psi(1-t) \longrightarrow$ gładka, supp(ψ)=[0,1], ϕ – funkcja próbna

Przykład 14.11. funkcja Gaussa $\mathbb{R} \ni x \longrightarrow e^{-x^2} \in \mathbb{R}$ nie ma zwartego nośnika.

Notacja
$\mathbb{R}^N$ – ustalmy N. $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_N) \longrightarrow$ będzie wielowskaźnikiem. $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\}$. Dla $x \in \mathbb{R}^N$ definiujemy $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_N}$.
$|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$ W końcu $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot ... \cdot \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}$

Definicja 14.12. Przestrzeń funkcji typu Schwartza (przestrzeń Schwartza) to $J(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C} : \sup|x^\alpha \cdot \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f(x)| < \infty\}$ dla wszystkich wielowskaźników α, β.

Przykład 14.13. $e^{-||x||^2} = e^{-(x_1^2)-(x_2^2)-...-(x_N^2)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

15 Wykład 09.12.2016r. Teoria Dystrybucji

15.1 Notacja i przykłady

Notacja 15.1. $\left.\begin{array}{l} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ - przestrzeń funkcji próbnych} \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ - przestrzeń funkcji Schwartza} \end{array}\right\}$ Przestrzenie funkcyjne

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nie jest przestrzenią Banacha, ale zaopatrzone jest w rodzinę norm.

Definicja 15.2. Dla $\forall k, l \in \mathbb{N}$ definiujemy $|| \cdot ||_{k,l} : \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ wzorem

$$||f||_{k,l} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leqslant k, |\beta| \leqslant l} \left| x^\alpha \frac{\delta^{|\beta|}}{\delta x^\beta} f(x) \right|$$

$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \quad \beta = (\beta_1, ..., \beta_l) \quad \alpha_a, \beta_a = \{0, 1, 2, 3...\} \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mówimy, że $\lim_n f_n = 0$ jeśli $\forall k, l \in \mathbb{N} \qquad \lim_n ||f_n||_{k,l} = 0$.

Definicja 15.3. Zbieżność w przestrzeni $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$: Rozważmy normy $|| \cdot ||_k : \quad \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ które dane są wzorem $||f|| = \sup_{|\beta| \leqslant k} \left| \frac{\delta^\beta}{\delta x^\beta} f(x) \right|$ Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ Mówimy, że $f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ gdy istnieje zbiór zwarty $K \in \mathbb{R}^n$ taki że: $\forall n \in \mathbb{N} : supp(f_n) \in K$ oraz $\forall k \in \mathbb{N} : ||f_n||_k \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Uwaga 15.4. Jeśli $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ oraz $f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ to $\int_{\mathbb{R}} g(x) f_n(x) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ (ponieważ istnieje K jak wyżej) dla $g \in C(\mathbb{R}^n)$

Stwierdzenie 15.5. Przestrzenie $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ oraz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ są przestrzeniami wektorowymi oraz dodawanie i mnożenie tych funkcji są operacjami ciągłymi. Właściwość tą mają również operacje:

- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni f \longrightarrow x_i f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni f \longrightarrow \frac{\delta}{\delta x_j} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Dowód: Dla części pierwszej postępujemy tak jak w przypadku przestrzeni Banacha. Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tak że $f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ ustalmy $k, l \in \mathbb{N}$ Czy $x_i f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$?

$$||x^i f_n||_{k,l} = sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leqslant k, |\beta| \leqslant l} \left| x^\alpha \frac{\delta^{|\beta|}}{\delta x^\beta} (x^i f)(x) \right| \overset{\text{reguła Leibniza}}{\leqslant} C_{k,l,i} ||f_n||_{k+1,l}$$

Więc jeśli $f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ to także $x_i \cdot f_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ Podobnie dowodzimy ciągłości $f_n \longrightarrow \frac{\delta}{\delta x_j} f$

Definicja 15.6. Dystrybucją nazywamy liniowe i ciągłe odwzorowanie $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ Innymi słowy, odwzorowanie $T : R(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ jest dystrybucją jeśli $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ oraz $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mamy:

- $T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = T(\lambda_1 f_1) + T(\lambda_2 f_2)$
- Dla $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ takie, że istnieje zbiór zwarty $K \in \mathbb{R}^n : supp f_n \subset K$ oraz jeśli $||f_n||_k \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ to $T(f_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

Przykład 15.7. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ ciągła, to f zadaje dystrubucję Tf tak że $\forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mamy $T_f(g) = \int_{\mathbb{R}_n} f(x) g(x) d^n x$ Dystrybucje tej postaci nazywamy dystrybucjami regularnymi.

Przykład 15.8. $f(x) = \log(x)$ f jest osobliwa w zerze, ale $x(\log(x) - 1)' = \log(x)$. W szczególności $\log(x)$ jest funkcją całkowalną wokół zera. Podobnie, całkowalna jest funkcja $\log(|x|)$. Definiujemy dystrybucję $T_{\log(|x|)}$ wzorem $T_{\log(|x|)} = \int_{\mathbb{R}} \log(x) g(x) dx$.

Przykład 15.9. Wartości główną funkcji $\frac{1}{x}$ ozanczamy symbolem vp$\frac{1}{x}$ i definiujemy wzorem

$$\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)(g) = \lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right\}$$

15.2 Operacje na dystrybucjach

Niech $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ oraz niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ Dystrybucję $f \cdot T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definiujemy wzorem $(f \cdot T)(g) = T(f \cdot g)$

Stwierdzenie 15.10. Zauważmy, że $f_1 \cdot T_{f_2} = T_{f_1 \cdot f_2}$ rzeczywiście $(f_1 \cdot T_{f_2})(g) = T_{f_2}(f_1 g) = \int_{\mathbb{R}^n} f_1 \cdot f_2(g) dx^n = T_{f_1 \cdot f_2(g)} \forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Przykład 15.11. $f \cdot \delta_p = f(p) \cdot \delta_p$

15.3 Pochodne dystrybucji

Jeśli $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \qquad i \in \{1, ..., n\}$ to $\frac{\delta}{\delta x_i} T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gdzie $\frac{\delta}{\delta x_i} T(g) = -T\left(\frac{\delta}{\delta x_i} g\right)$

Uwaga 15.12. Jeśli f jest funkcją gładką to zachodzi $\frac{\delta}{\delta x_i} T_f = T_{\frac{\delta}{\delta x_i} f}$ Sprawdzenie: $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\frac{d}{dx} T_f(g) = -T_f\left(\frac{d}{dx} g\right) = -\int f(x) \cdot g'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) g(x) = T_{f'}(g)$

Przykład 15.13.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} T_f(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) = \int_0^\infty x g(x) = \frac{d}{dx} T_f(g) = -\int_0^\infty x \cdot g'(x) = \int_0^{+\infty} g(x) dx$$

$$\frac{d^2}{dx^2} T_f(g) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} T_f\right)(g) = -\left(\frac{d}{dx} T_f\right)(g') = \int_0^\infty g'(x) dx =$$

$$-g(\infty) + g(0) = g(0) = \delta_0 g$$

Zatem $f'' = \delta_0$.

Przykład 15.14. $\delta_p'(g) = -\delta_p(g') = -g'(p)$

16 Wykład 12.12.2016 r.

Przykład 16.1. $T_{\log|x|}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \log|x| \cdot f(x) \mathrm{d}x$, gdzie $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ (przestrzeń funkcji próbnych: gładkich i o zwartym nośniku)

$$\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) := \lim_{\varepsilon \to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x\right)$$

$$
\begin{aligned}
T'_{\log|x|}(f) &= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \log|x| f'(x)\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty} \log(x)\cdot f'(x)\mathrm{d}x\right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\log(-x)\cdot f(x)\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \log(x)\cdot f(x)\Big|_{+\varepsilon}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x\right) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\log(\varepsilon)(f(-\varepsilon)-f(\varepsilon)) + \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)(f) = \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon\log(\varepsilon)\frac{(f(\varepsilon)-f(-\varepsilon))}{\varepsilon} + \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)(f) = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)(f)
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że jeśli $\operatorname{supp}(f) \in [-R, R]$, to:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)(f) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x + \int\limits_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x - \int\limits_{-R}^{-\varepsilon}\frac{f(0)}{x}\mathrm{d}x - \int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{f(0)}{x}\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon}\frac{f(x)-f(0)}{x}\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{f(x)-f(0)}{x}\mathrm{d}x\right) = \int\limits_{-R}^{R}\frac{f(x)-f(0)}{x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Funkcja $\begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x} & \text{gdy } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$ jest funkcją gładką, jeśli f jest gładka, ze względu na następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 16.2. Niech $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, takie że $f(0) = 0$. Wówczas istnieje funkcja gładka g, taka że $f(x) = x \cdot g(x)$.

Dowód.

$$
f(x) = f(x) - f(0) = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(tx))\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 f'(tx)x\mathrm{d}t = x\cdot\int\limits_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t,
$$

kładąc:

$$
g(x) := \int\limits_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t
$$

dostajemy tezę twierdzenia. □

Przykład 16.3. $(x\delta_0)(f) = \delta_0(xf) = 0\cdot f(0) = 0$, czyli $x\delta_0 = 0$

Wykazać, że jeśli $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, takie że $xT = 0$, to istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$, takie że $T = \lambda\delta_0$.
W tym celu ustalamy $\psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$, takie że $\psi(0) = 1$. Niech $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$. Wtedy $f - f(0) \cdot \psi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ oraz $(f - f(0) \cdot \psi)(0) = 0$. Zatem istnieje $g \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$, taka że $f - f(0) \cdot \psi = xg(x)$. Zatem:

$$T(f) = T(f - f(0)\psi) + T(f(0)\psi) = T(xg) + f(0) \cdot T(\psi) = T(\psi)f(0) = \lambda\delta_0(f)$$

$\mathcal{O} \underset{\text{OTW}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{D}(\mathcal{O}) = \{f : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ - gładkie o zwartym nośniku zawartym w zbiorze $\mathcal{O}\}$

Zbieżność w $\mathfrak{D}(\mathcal{O})$:
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{D}(\mathcal{O})$ zbiega do zera, gdy:

1. $\exists K \subset \mathcal{O}$ - zwarty i taki że $\operatorname{supp}(f) \subset K$
2. $\forall K \sup\limits_{\substack{x\in\mathcal{O} \\ |\beta|\leqslant K}} \left|\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f_n(x)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\mathfrak{D}'(\mathcal{O}) = \{T : \mathfrak{D}(\mathcal{O}) \to \mathbb{C}$ - liniowe, ciągłe$\}$

Uwaga 16.4. Jeśli $\mathcal{O} \subset \mathcal{U}$ to:

1. $\mathfrak{D}(\mathcal{O}) \subset \mathfrak{D}(\mathcal{U})$
2. $T \in \mathfrak{D}'(\mathcal{U})$ i $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{O})$ to $T|_{\mathcal{O}} \in \mathfrak{D}'(\mathcal{O})$ jest dystrybucją daną wzorem $T|_{\mathcal{O}}(f) = T(f)$

Twierdzenie 16.5. Niech dany będzie $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, gdzie $\mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}^n$. Wówczas $\exists\{\varphi_i\}_{i\in I}$, gdzie $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ są gładkimi funkcjami, które dają rozkład jedności na $\bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i$, tzn.: $\forall x \in \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i$ istnieje otoczenie $\mathcal{U}$ elementu x, takiego że $\varphi_i(y) = 0$ dla każdego $y \in \mathcal{U}$ i wszystkich poza skończoną liczbą $i \in I$. Ponadto $\sum\limits_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$.

Definicja 16.6. Niech $T \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ oraz $\mathcal{O} \underset{\text{OTW}}{\subset} \mathbb{R}^n$. Mówimy, że T zeruje się na $\mathcal{O}$, jeśli $T|_{\mathcal{O}} = 0$.

Twierdzenie 16.7. Niech dany będzie zbiór $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$, $\mathcal{O}_i \underset{\text{OTW}}{\subset} \mathbb{R}^n$ i niech $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$, takie że $T|_{\mathcal{O}_i} = 0$. Wówczas $T|_{\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{O}_i} = 0$.

Dowód. Niech $f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(f) \subset \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Niech $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ będzie rozkładem jedności. $\exists i_1, \dots, i_n \in I$, takie że $\sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k} = 1$ na $\operatorname{supp}(f)$. Zatem $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_{i_k} f$; skoro $\operatorname{supp}(\varphi_{i_k} f) \subset \mathcal{O}_{i_k}$ i ostatecznie mamy:

$$T(f) = T\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_{i_k} f\right) = \sum_{k=1}^{n} T(\varphi_{i_k} f) = 0$$

i mamy $T|_{\bigcup\limits_{\mathcal{O}_i}} = 0$. □

Definicja 16.8. Nośnikiem dystrybucji $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ nazywamy zbiór postaci $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$, gdzie $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ jest największym zbiorem otwartym, takim że $T|_{\mathcal{O}} = 0$.

Przykład 16.9. 1. Niech $f \in C(\mathbb{R}^n)$, to wówczas $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp}(f)$

2. $\mathrm{supp}\delta_p = \{p\}$

Zadanie Pokazać, że:

a) $\mathrm{supp}\delta_p' = \{p\}$

b) $\mathrm{supp}T' \subset \mathrm{supp}T$

Definicja 16.10. Niech $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$ oraz $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$. Mówimy, że T_n zbiega do T, jeśli $\forall f \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n) T_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(f)$.

Uwaga 16.11 (Wzory Sochockiego)**.** Niech $\varepsilon > 0$ i $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{x+i\varepsilon}$. Rozważmy $T_{f_\varepsilon} \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^n)$, gdzie $T_{f_\varepsilon}(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{x+i\varepsilon}\mathrm{d}x$. Niech $R > 0 : \mathrm{supp} g \subset [-R, R]$.

$$T_{f_\varepsilon}(g) = \int_{-R}^{R} \frac{g(x)}{x+i\varepsilon}\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{g(x)-g(0)}{x+i\varepsilon}\mathrm{d}x + g(0)\int_{-R}^{R} \frac{1}{x+i\varepsilon}\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-R}^{R} \frac{g(x)-g(0)}{x+i\varepsilon}\mathrm{d}x + g(0)\int_{-R}^{R} \frac{x-i\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} \frac{g(x)-g(0)}{x+i\varepsilon}\mathrm{d}x - g(0)i\varepsilon\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-R}^{R} \frac{g(x)-g(0)}{x+i\varepsilon}\mathrm{d}x - g(0)i\varepsilon \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Big|_{-R}^{R} = \int_{-R}^{R} \frac{g(x)-g(0)}{x+i\varepsilon}\mathrm{d}x - 2ig(0)\mathrm{arctg}\left(\frac{R}{\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}$$
$$\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)(g) - i\pi g(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} T_{\frac{1}{x+i\varepsilon}} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta_0 \\ T_{\frac{1}{x-i\varepsilon}} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi\delta_0 \end{array}\right\} +$$

$$\frac{1}{x+i\varepsilon} + \frac{1}{x-i\varepsilon} = \frac{2x}{x^2+\varepsilon^2}$$
$$T_{\frac{2x}{x^2+\varepsilon^2}} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 2\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$$

17 Wykład 16.12.2016.

Operacja mnożenia dystrybucji $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ przez funkcję gładką $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$: $\forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mamy $fT(g) = T(fg)$, $f_1(f_2T) = (f_1f_2)T$. Z drugiej strony, mając f jw. definiuje się dystrybucję regularną

$$T_f(g) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)d^nx.$$

Pytanie 17.1. Czy można zdefiniować iloczyn dystrybucji w taki sposób, żeby dla dystrybucji regularnej T_f zachodził wzór $T_fT = fT$?

Okazuje się, że taki iloczyn nie istnieje. Rozważmy dystrybucję $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Zauważmy, że

$$x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)(f) = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)(xf) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{xf(x)}{x}dx + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{xf(x)}{x}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = T_1(f)$$

W takim razie, gdyby iloczyn dystrybucji (jw.) istniał to

$$\delta_0\left(x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \delta_0 T_1 = T_1\delta_0 = 1\delta_0 = \delta_0$$

$$(\delta_0 x)\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 0\delta_0 = 0$$

Przykład 17.2. Rozważmy dystrybucję $T_{\frac{-1}{4\pi r}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ dla $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$T_{\frac{-1}{4\pi r}}(f) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi r} f(x,y,z)dxdydz = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi r} f(r,\theta,\varphi)r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Całka jest zbieżna. Policzmy: $\Delta\left(\frac{-1}{4\pi r}\right) = \delta_0, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Dla $r \neq 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^+ y^2 + z^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

Zatem

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0, \text{ dla } r \neq 0.$$

1. $F(x,y,z) = (F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z))$
2. $\mathrm{div}(F) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
3. $\mathrm{div}(gF) = g\mathrm{div}(F) + \underbrace{(\nabla g|F)}_{\text{Iloczyn skalarny}}$
4. $\mathrm{div}(\nabla g) = \Delta g$,

a więc $\mathrm{div}(g\nabla f) = g\Delta f + (\nabla g|\nabla f)$. W szczególności $g\Delta f - f\Delta g = \mathrm{div}(g\nabla f) - \mathrm{div}(f\nabla g)$. Użyjemy dalej tw. Stokesa dla div

$$\int\limits_V \mathrm{div}(F)dV = \int\limits_{\partial V} (F|n)dA,$$

dA to miara powierzchni brzegu ∂V. Niech $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Liczymy

$$-\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\right)(f) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r}\Delta f dV = \frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus K(0,\varepsilon)} \frac{1}{r}\Delta f dV = -\frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus K(0,\varepsilon)} \underbrace{\Delta\left(\frac{1}{r}\right)}_{=0} f$$

$$+\mathrm{div}\left(\frac{1}{r}\nabla f\right) - \mathrm{div}(f\nabla\left(\frac{1}{r}\right)) = -\frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus K(0,\varepsilon)} \mathrm{div}\left(\frac{1}{r}\nabla f\right) - \mathrm{div}\left(f\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right)(*).$$

Zastępujemy całkowanie po $\mathbb{R}^3 \backslash K(0,\varepsilon)$ całkowaniem po $V = K(0,R)\backslash K(0,\varepsilon)$.

$$\partial V = \underbrace{S^2(0,R)}_{\text{Zorientowane na zewnątrz}} \cup \underbrace{S^2(0,\varepsilon)}_{\text{Zorientowane do wewnątrz}} .$$

Niech $n(x,y,z) = \frac{\overline{r}}{r}$

$$(*) = -\frac{1}{4\pi}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int\limits_{S^2(0,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon}(\nabla f| - n)\varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi - \int\limits_{S^2(0,\varepsilon)} f(\varepsilon,\theta,\varphi)\left(\nabla\left(\frac{1}{r}\right)| - n\right)\varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi\right).$$

$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{(x,y,z)}{r^3} = -\frac{\overline{r}}{r}$, a więc

$$\left(\nabla\left(\frac{1}{r}\right)| - n\right) = \left(-\frac{\overline{r}}{r^3}| - \frac{\overline{r}}{r}\right) = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$(*) = \frac{1}{4\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int\limits_{\theta\in[0,\pi]}\int\limits_{\varphi\in[0,2\pi]} f(\varepsilon,\theta,\varphi)\frac{1}{\varepsilon^2}\varepsilon^2\sin\theta d\theta d\varphi - \varepsilon\int\limits_{S^2(0,\varepsilon)}(\nabla f| - n)\sin\theta d\theta d\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}f(0)\int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta\int\limits_0^\pi d\varphi = \frac{1}{4\pi}f(0)4\pi = f(0) = \delta_0(f)$$

$$\nabla\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta_0(f)$$

Transformata Fouriera

Przykład 17.3. $a > 0$ i $f(x) = e^{-ax^2}, k \in \mathbb{R}$. Obliczyć całkę $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a(x^2+y^2)}e^{-ikx}dx$. Funkcji $f(x)$ przyporządkowujemy funkcję $\mathcal{F}f(k) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-kx}dx$. $\mathcal{F}$ jest tzw. transformatą Fouriera. Na początek

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\right)^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ay^2}dy = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a(x^2+y^2)} =$$

$\varrho = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a\varrho^2}\varrho d\varrho d\varphi = -2\pi\frac{e^{a\varrho^2}}{2a}|_0^\infty = \frac{\pi}{a}$$

$$-ax^2 - ikx = -a\left(x^2 - i\frac{k}{a}x\right) = -a\left[\left(x - i\frac{k}{a}\right)^2 + \frac{k^2}{4a^2}\right] = -a\left(x - i\frac{k}{a}\right)^2 - \frac{k^2}{4a}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ax^2-ikx}dx = e^{-\frac{k^2}{4a}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x-i\frac{k}{2a}\right)^2}dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \lim_{N\to\infty} \int_{C_N} e^{az^2} dz,$$

gdzie $C_N = \{x - i\frac{k}{2a} : x \in [-N, N]\}$.

$$\int_{C_N} e^{-az^2} dz = \underbrace{\int_{-N}^{N} e^{-ax^2} dx}_{\xrightarrow{N\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{a}}} + \underbrace{\int_0^1 e^{-a\left(-N+i\frac{k}{2a}\right)^2} dt}_{\xrightarrow{N\to\infty} 0} + \underbrace{\int_0^1 e^{-a\left(N+it\frac{k}{2a}\right)^2} dt\, 0.}_{\xrightarrow{N\to\infty}}$$

W szczególności $a \to \frac{a}{2}$ to dostajemy $\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{2a}}$.

Lemat 17.4. Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wówczas $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| d^n x < \infty$.

Dowód. Istnieje stała C t. że

$$|f(x)| \leqslant \frac{C}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\cdots(1+x_n^2)}.$$

Rzeczywiście $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty$ oraz $\sup_{x\in\mathbb{R}^n, |\alpha|\leqslant 2n} |x^\alpha f(x)| < \infty$. Skoro $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n}{(1+x_1^2)\cdots(1+x_n^2)} = \pi^n$, gdyż $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x|_{-\infty}^{\infty} = \pi$. Z kryterium porównawczego $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \leqslant C\pi^n < \infty$. □

Uwaga 17.5. Jeśli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ oraz $k \in \mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n \ni x \to e^{ikx} f(x) \in \mathbb{C}$ też jest funkcją Schwartza.

Definicja 17.6. Transformatą Fouriera funkcji $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nazywamy funkcję $\mathcal{F}(f)$ daną wzorem

$$\mathcal{F}(f)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} f(x) dx$$

18 Wykład 19.12.2016.

Przypomnienie 18.1. (Transformata Fouriera)
Jeśli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to transformację Fouriera funkcji f oznaczamy $\mathcal{F}f$, gdzie $(\mathcal{F}f)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ikx} dx$, $kx = k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n$.
Na zeszłym wykładzie: $f(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}$, $\quad x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Wówczas $(\mathcal{F}f)k = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{k^2}{2a}}$.

Stwierdzenie 18.2. Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Wówczas $k_j(\mathcal{F}f)(k) = \mathcal{F}(-i\partial_{x_j} f)(k)$.

Dowód.

$$k_j(\mathcal{F}f)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} k_j f(x) e^{-ikx} d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-i\partial_{x_j} e^{-ikx}) d^n x \overset{\text{j-tą przez części}}{=}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (-i\partial_{x_j} f) e^{-ikx} d^n x = \mathcal{F}(-i\partial_{x_j} f)(k)$$

□

Uwaga 18.3. Zauważmy, że:

- $|\mathcal{F}f(k)| \leqslant \int |f(x)|d^nx$, a zatem $|k_j\mathcal{F}f(k)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_j} f|d^nx$. W szczególności $\exists c > 0$ t. że $|k_j(\mathcal{F}f)(k)| \leqslant c$.
- Ogólniej $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists c_m$ t. że $\sup_{k\in\mathbb{R}^n,\ |\alpha|\leqslant m} |k^\alpha \mathcal{F}f(k)| \leqslant c_m$.

Jak oszacować $\partial_{k_j}(\mathcal{F}f)(k)$? Korzystamy z następującego twierdzenia o różniczkowaniu całki z parametrem: $F(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x,\alpha)dx$ - całka z parametrem α. Jeśli $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t. że $\forall\alpha|\partial_x f(x,\alpha)| \leqslant \varphi(x)$, oraz $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx < \infty$, to $F'(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \partial_\alpha f(x,\alpha)dx$. Stosujemy twierdzenie do $f(x,\alpha) = g(x)e^{ikx}$.

Stwierdzenie 18.4. Jeśli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to $\partial_{k_j}(\mathcal{F}f)(k) = \mathcal{F}(-ix_jf)(x)$

Dowód. Biorąc $\varphi(x) := |x_jf(x)|$ mamy $|\partial_{k_j}(f(x)e^{-ikx})| \leqslant \varphi(x)$, oraz $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)d^nx < \infty$. Zatem stosując n-wymiarową wersję twierdzenia o różniczkowaniu całki z parametrem do $f(x,k) := f(x)e^{-ikx}$ dostajemy tezę stwierdzenia. □

Uwaga 18.5. $|\mathcal{F}f(k)| \leqslant \int |f(x)|d^nx$, a zatem $|k_j(\mathcal{F}f)(k)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_j} f|d^nx$.
$\forall_{m\in\mathbb{N}}\exists c_m : \sup_{k\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\leqslant m} |\frac{\partial^\alpha}{\partial k^\alpha}(\mathcal{F}f)(k)| \leqslant c_m$, co wraz z poprzednią uwagą daje:

Wniosek 18.6. Jeśli $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, to $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mamy więc odwzorowanie linowe $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Twierdzenie 18.7. Transformata Fouriera $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest odwzorowaniem odwracalnym, oraz $\mathcal{F}^{-1}$ jest dana wzorem $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} g(k)e^{ikx}d^nk$.

Dowód. Wykorzystujemy twierdzenie o ciągłości całki z parametrem:
jeśli $\exists\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t. że $\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}|f(x,\alpha)| \leqslant \varphi(x)$, oraz $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx \leqslant \infty$, to całka z parametrem $F(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(x,\alpha)dx$ jest ciągła ze względu na α. Musimy pokazać, że $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(x) = f(x)$, oraz $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g))(k) = g(k)$. Liczymy:

$$(\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f))(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k)e^{ikx}dk = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{ak^2}{2}} (\mathcal{F}f)(k)e^{ikx}dk =$$

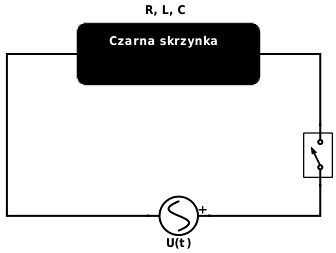
$$= \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{-\frac{ak^2}{2}+ikx}e^{-iky}f(y)d^nkd^ny = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^nyf(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{ak^2}{2}} e^{-ik(y-x)}d^nk =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{2\pi a}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^nyf(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{2a}} = \left(u = \frac{y-x}{\sqrt{a}}, \quad y = \sqrt{a}u + x, \quad d^ny = a^{\frac{n}{2}}d^nu\right) =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^nuf(x+\sqrt{a}u)e^{-\frac{u^2}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{a\to 0^+} d^nuf(x+\sqrt{a}u)e^{-\frac{u^2}{2}} =$$

$$= f(x)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^nue^{-\frac{u^2}{2}} = f(x)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} = f(x)$$

Równość $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g))(k) = g(k)$ dowodzi się podobnie. □



Przykład 18.8. Obwody prądu zmiennego
$U(t) = \hat{R}I(t)$, gdzie $\hat{R}$-operator liniowy działający na funkcję $I(t)$.
Załóżmy na chwilę, że $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$

opornik: $U(t) = rI_0 e^{i\omega t}$
cewka: $U(t) = i\omega L I_0 e^{i\omega t}$
kondensator: $U(t) = \frac{1}{i\omega C} I_0 e^{i\omega t}$

Uwzględniamy zasady łączenia elementów. Na przykład łącząc opornik r z kondensatorem C dostajemy:

$$\frac{1}{R(\omega)} = \frac{1}{r} + i\omega C = \frac{1 + i\omega C r}{r},$$

i widzimy, że $U(t) = R(\omega) I_0 e^{i\omega t}$, gdzie $R(\omega) = \frac{r}{1+i\omega r C}$. Czarna skrzynka opisana jest funkcją $R(\omega)$. Jeśli $I(t)$ jest zupełnie dowolną funkcją, którą możemy przedstawić za pomocą transformaty Fouriera $I(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, gdzie $g(\omega) = \int_{\mathbb{R}} I(t) e^{-i\omega t} dt$ to

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} R(\omega) g(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} R(\omega) \left(\int_{\mathbb{R}} I(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{R(\omega)}{2\pi} e^{i\omega(t-t')} d\omega \right)}_{G(t-t')} I(t') dt' = \int_{\mathbb{R}} dt' G(t-t') f(t')$$

Co wiemy i funkcji $R(\omega)$? Jest to funkcja posiadająca przedłużenie analityczne do dolnej półpłaszczyzny i znika w $\infty \in \mathbb{C}$. Na przykład $R(\omega) = \frac{r}{1+i\omega r C}$ ma osobliwość $\omega_0 = -\frac{1}{iCr} = \frac{i}{Cr} \in \mathbb{C}_+$. Jak zapewnić to, że jeśli $I(t) = 0$, to $U(t) = 0$ dla $t < 0$? Odpowiedź na to pytanie jest zawarta w twierdzeniu Paleya-Wienera.

Twierdzenie 18.9. (Paleya-Wienera)
Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mająca przedłużenie analityczne do dolnej półpłaszczyzny i taka, że $\exists_{M\in\mathbb{R}}$ i $\exists_{C>0}$ t.że $|f(z)| \leqslant Ce^{M \mathrm{Im}(z)}$. Wówczas $(\mathcal{F}f)(k) = 0$ dla $k > -M$.

Dowód.

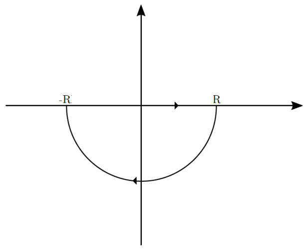
$$(\mathcal{F}f)(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{-ikx} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{-ikz} dz$$

Szacowanie:

$$|\int_{\gamma_R} f(z) e^{-ikz} dz| = |\int_{\pi}^{2\pi} Rf(Re^{-i\varphi}) e^{-ikRe^{i\varphi}} e^{i\varphi} i d\varphi| \leqslant \int_{\pi}^{2\pi} R|f(Re^{i\varphi})| e^{kR\sin\varphi} =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} RCe^{MR\sin\varphi + kR\sin\varphi} d\varphi \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$R \to \infty$ gdy $k > -M$. Wówczas $(\mathcal{F}f)(k) = 0$ $\square$



19 Wykład 09.01.2016.

Twierdzenie 19.1. (Paleya-Wienera i odwrotne)
Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$. Przypuśćmy, że f ma przedłużenie analityczne $f : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ oraz $\exists C > 0$ i $M \in \mathbb{R}$, że $|f(z)| \leqslant Ce^{M\mathrm{Im}(z)}$, wówczas $(\mathcal{F}f)(k) = 0$ dla $k > -M$. Na odwrót, jeśli $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ taka, że $g(k) = 0$ dla $k > -M$ to $\mathcal{F}^{-1}(g)$ ma przedłużenie analityczne $f : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ oraz $\exists C > 0$ i $M \in \mathbb{R}$, że $|f(z)| \leqslant Ce^{M\mathrm{Im}\,(z)}$.

Dowód.

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-M} g(k)e^{ikx}dk.$$

Zdefiniujmy $f : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ wzorem $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-M} g(k)e^{ikz}dk$. Zauważmy, że $|e^{ikz}| = |e^{ik\mathrm{Re}(z)}e^{-k\mathrm{Im}(z)}| = e^{-k\mathrm{Im}(z)} \leqslant e^{M\mathrm{Im}(z)}$, zatem całka $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-M} g(k)e^{ikz}dk$ jest zbieżna. Łatwo sprawdzić, że f jest analityczna w dolnej półpłaszczyźnie. Ponadto:

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-M} |g(k)e^{ikz}|dk \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-M} |g(k)|dk\right) e^{M\mathrm{Im}(z)} \leqslant Ce^{M\mathrm{Im}(z)}.$$

$\square$

Uwaga 19.2. wynikanie $\implies$ udowodnione na poprzednim wykładzie.

Przypomnienie 19.3.

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$
$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} g(k)e^{ikx}dk.$$

Dowód. (drugi)
$n = 1$:
Musimy pokazać, że:

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} dk \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iky} dy \right) e^{ikx} = \\
= \frac{1}{2\pi} \lim_{M\to\infty} \int\limits_{-M}^{M} dk \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(y) e^{-iky} dy \right) e^{ikx} \overset{\text{tw. Fubiniego}}{\equiv} \\
= \frac{1}{2\pi} \lim_{M\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} dy f(y) \int\limits_{-M}^{M} dk e^{ik(x-y)} = \\
= \frac{1}{2\pi} \lim_{M\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} dy f(y) \frac{1}{i(x-y)} e^{ik(x-y)} \Big|_{-M}^{M} = \\
= \frac{1}{\pi} \lim_{M\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} dy f(y) \frac{\sin(M(x-y))}{x-y}
\end{aligned}
$$

Rozważmy funkcję $G(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin(s)}{s} ds$. Jest jasne, że $G'(x) = \frac{\sin(t)}{t}$. Udowodnimy, że $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_0^R \frac{\sin(s)}{s} ds = \frac{\pi}{2}$.

$$
\begin{aligned}
& \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int\limits_r^R \frac{\sin(s)}{s} ds = \\
= & \frac{1}{2i} \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int\limits_r^R \frac{e^{is} - e^{-is}}{s} ds = \\
= & \frac{1}{2i} \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \left(\int\limits_{-R}^{-r} \frac{e^{is}}{s} ds + \int\limits_r^R \frac{e^{is}}{s} ds \right) \\
& I_{r,R} = \{ t \in \mathbb{R} : -R \leqslant t \leqslant -r \text{ lub } r \leqslant t \leqslant R \} \\
& C_{r,R} = I_{r,R} \cup \gamma_r \cup \gamma_R
\end{aligned}
$$

Półokręgi γ_r i γ_R w górnej połpłaszczyźnie; $\frac{e^{iz}}{z}$ nie ma osobliwości wewnątrz $C_{r,R}$.

$$0 = \oint\limits_{C_{r,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int\limits_{I_{r,R}} \frac{e^{iz}}{z} + \int\limits_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} + \int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}$$

$$\int\limits_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \text{(lemat Jordana)}$$

$$\int\limits_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} \xrightarrow{r\to 0} i\pi \mathrm{Res}_0 \left(\frac{e^{iz}}{z}\right) = i\pi \qquad \text{(biegun pierwszego rzędu)}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \frac{\sin(s)}{s} ds = \frac{\pi}{2}$$

Wracamy do poprzedniego rachunku.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{M\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \frac{d}{dy} (G(M(y-x))) dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{M\to\infty} \left(f(y) G(M(y-x)) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(y) G(M(y-x)) dy \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \lim_{M\to\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{x} f'(y) G(M(y-x)) dy + \int\limits_{x}^{\infty} f'(y) G(M(y-x)) dy \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{-\infty}^{x} f'(y) \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \int\limits_{x}^{\infty} f'(y) \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+)),$$

gdzie $f(x^-) := \lim\limits_{t\to x^-} f(t)$, $f(x^+) := \lim\limits_{t\to x^+} f(t)$. Jeśli f jest ciągła to mamy $f(x)$. □

Wzór Plancherela Niech $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i rozważmy funkcję $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x,k) \longmapsto f(x)g(k)e^{-ikx} = \psi(x,k) \in \mathbb{C}$. $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ i w szczególności:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |\psi(x,k)| dx dk < \infty$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d^n x d^n k f(x) g(k) e^{-ikx} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n k g(k) e^{-ikx} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x) (\mathcal{F}g)(x) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n k g(k) \int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n x f(x) e^{-ikx} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n k g(k) (\mathcal{F}f)(k)$$

Zauważmy, że:

$$(\mathcal{F}\overline{g})(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}\overline{g}(k)d^nk = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ikx}g(k)d^nk} = (2\pi)^n\overline{(\mathcal{F}^{-1}g)(x)}$$

W szczególności mamy:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}(\mathcal{F}g)(x)d^nx = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}^{-1}f)(k)g(k)dk$$

Kładziemy $f = \mathcal{F}g$.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{(\mathcal{F}g)(x)}(\mathcal{F}g)(x) = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{g(k)}g(k)d^nk$$

Iloczyn skalarny na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (f|g) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}g(x)d^nx$$

Wówczas mamy:

$$(\mathcal{F}g|\mathcal{F}g) = (2\pi)^n(g|g)$$

Wniosek:

$$T = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

jest unitarny.

20 Wykład 13.01.17.

Przypomnienie 20.1. Dla $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zachodzi wzór

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(k)g(k)d^nk = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\mathcal{F}g)(x)d^nx$$

co można "zapisać" następująco:

$$\mathcal{F}T_f(g)" = "T_{\mathcal{F}f}(g) = T_f(\mathcal{F}g)$$

Spodziewamy się następującej definicji transformaty Fouriera dystrybucji:

$$T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$(\mathcal{F}T)(g) \stackrel{\text{def}}{=} T(\mathcal{F}g) \qquad \text{dla} \quad g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Czy definicja ma sens?
Ma ona pewną wadę. Transformata Fouriera funkcji o zwartym nośniku nie ma zwartego nośnika ($g \neq 0$), czyli $\mathcal{F}g \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ i napis $T(\mathcal{F}g)$ pozbawiony jest sensu. Problem z nośnikiem wynika z tw. Payley'a-Weinera ($n = 1$). Funkcja $\mathcal{F}g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ma przedłużenie analityczne do funkcji całkowitej $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gdzie $f(k) = (\mathcal{F}g)(k)$ dla $k \in \mathbb{R}$. Przedłużenie to zdefiniowane jest wzorem $f(z) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{izx}dx$.
W szczególności zera f (a więc i zera $\mathcal{F}g$) są izolowane.
Wniosek: $\mathcal{F}g$ nie ma zwartego nośnika.

Definicja 20.2. Odwzorowanie liniowe i ciągłe $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, nazywamy dystrybucją temperowaną. Zbiór takich dystrybucji oznaczamy $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Uwaga 20.3. Zauważmy, że $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Niech $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wówczas $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ jest dystrybucją: $T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Odwzorowanie $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ni T \to T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, jest różnowartościowe.

Uwaga 20.4. Nie wszystkie dystrybucje są temperowane.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = e^{x^2}$$

Wówczas $T_f(g) = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} g(x)dx$ jest elementem $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ale nie jest dystrybucją temperowaną. Weźmy $g(x) = e^{-x^2}$. Wtedy $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ oraz $\int_{\mathbb{R}} e^{x^2} e^{-x^2} dx = +\infty$

Lemat 20.5. Niech $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, wówczas $\frac{\partial}{\partial x_j} T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, gdzie $\frac{\partial}{\partial x_j} T(g) = -T(\frac{\partial}{\partial x_j} g)$, $(j \in \{1, ..., n\})$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $\frac{\partial}{\partial x_j} g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, jeśli $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ oraz odwzorowanie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni g \to \frac{\partial}{\partial x_j} g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ jest ciągłe i liniowe. Zatem $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni g \to -T(\frac{\partial}{\partial x_j} g) \in \mathbb{C}$ jest ciągłe i liniowe. $\square$

Definicja 20.6. Niech $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Transformatą Fouriera T, nazywamy dystrybucję temperowaną $\mathcal{F}(T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, taką że:

$$(\mathcal{F}T)(g) := T(\mathcal{F}(g))$$

Lemat 20.7. Niech $f \in C(\mathbb{R}^n)$, t.że $\exists C > 0, M > 0$ spełniające $|f(x)| \leqslant C(1 + x^2)^M$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ jest temperowana.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $T_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$ oraz $\int |f(x)g(x)|d^n x < \infty$. Zatem $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ $\square$

Przykład 20.8. 1– funkcja stała $T_1(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx$, $T_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Liczymy tr. Fouriera T_1

$$(\mathcal{F}T_1)(g) = T_1(\mathcal{F}g) = \int_{\mathbb{R}} dk \mathcal{F}(g)(k) = 2\pi g(0) = 2\pi \delta_0(g)$$

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} (\mathcal{F}g)(k)dk$$

a zatem

$$g(0) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}g)(k)dk$$

Czyli $\mathcal{F}(T_1)(k) = 2\pi\delta_0(k)$ (*).
Wzorek (*) zapisujemy następująco: $\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} dx = 2\pi\delta_0(k)$

Definicja 20.9. Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$. Wówczas funkcję $\mathbb{R}^n \ni x \to f(x - h) \in \mathcal{C}$ oznaczamy $\tau_h f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ogólniej jeśli $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, to $\tau_h T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ jest dystrybucją daną wzorem: $(\tau_h T)(f) = T(\tau_{-h} f)$

Uwaga 20.10. Dla $f \in C(\mathbb{R}^n)$ mamy $\tau_h T_f = T_{\tau hf}$. rzeczywiście $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mamy:

$$(\tau_h T_f)(g) = T_f(\tau_{-h} g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x+h) d^n x = \begin{pmatrix} y = x + h \\ d^n hy = d^n x \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^n} f(y-h) g(y) d^n y = T_{\tau_h f}(g)$$

Stwierdzenie 20.11. $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$. Wtedy:

1. $\mathcal{F}(\tau_h T) = e^{-ihx} \mathcal{F}(T)$
2. $\tau_h \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(e^{-ihk} T)$

Ponadto $\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial k_j} T) = i x_j \mathcal{F}(T)$, $\frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(-i k_j T)$

Dowód. Niech $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Ad1

$$\mathcal{F}(\tau_h T)(g) = (\tau_h T)(\mathcal{F}(g)) = T(\tau_{-h} \mathcal{F}(g))(*)$$

gdzie:

$$(\tau_{-h} \mathcal{F}(g))(k) = (\mathcal{F} g)(k+h) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-i(k+h)x} dx = \mathcal{F}(e^{-ihx} g)$$
$$(*) = T(\mathcal{F}(e^{-ihx} g)) = e^{-ihx} \mathcal{F}(T)(g)$$

Ad2

$$(\tau_h \mathcal{F}(T))(g) = (\mathcal{F} T)(\tau_{-h} g) = T(\mathcal{F}(\tau_{-h})(g)))(**)$$

ale:

$$\mathcal{F}(\tau_{-h} g)(k) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x+h) e^{-ikx} d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-iky} e^{ikh} = e^{ikh} \mathcal{F}(g)(k)$$
$$(**) = T(e^{ikh} \mathcal{F}(g)) = \mathcal{F}(e^{-ikh} T)(g)$$

□

Przykład 20.12. $f(x) = x^2 sin(x)$, $(\mathcal{F} f) =?$ w sensie $\mathcal{F}(T_f) =?$. Skoro

$$x^2 sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} x^2 - e^{-ix} x^2)$$

to

$$T_f = \frac{1}{2i}(T e^{ix} x^2 - T e^{-ix} x^2) = \frac{1}{2i}(e^{ix} x^2 T_1 - e^{-ix} x^2 T_1)$$

. Liczymy korzystając z powyższego stwierdzenia:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} T_f &= \frac{1}{2i}(\mathcal{F}(e^{ix} x^2 T_1) - \mathcal{F}(e^{-ix} x^2 T_1)) \\
&= \frac{1}{2i}(\tau_1 \mathcal{F}(x^2 T_1) - \tau_{-1} \mathcal{F}(x^2 T_1)) \\
&= \frac{1}{2i}(\tau_1(-\frac{d^2}{dk^2} \mathcal{F}(T_1)) - \tau_{-1}(-\frac{d^2}{dk^2} \mathcal{F}(T_1))) \\
&= \frac{1}{2i}(-\tau_1 \delta_0"(k) + \tau_{-1} \delta_0"(k)) = \frac{1}{2i}(\delta_{-1}"(k) - \delta_1"(k))
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 sin(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2i}(\delta_{-1}"(k) - \delta_1"(k))$$

21 Wykład 16.01.2017

Dodatek 21.1. W $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ rozważmy iloczyn skalarny

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \ni (f|g) \to (f|g) := \int_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)} \overline{f(x)} g(x) dx$$

$$||f|| = \sqrt{\int |f(x)|^2 dx}$$

Operator położenia: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \ni f \xrightarrow{\hat{x}} x \cdot f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$
Operator pędu: $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \ni f \xrightarrow{\hat{p}} \frac{\hbar}{i} f'(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$
Dla operatorów liniowych A, B na przestrzeni wektorowej $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ definiujemy komutator $[A, B] = AB - BA$. W szczególności

$$[\hat{x}, \hat{p}] = x\frac{\hbar}{i} f' - \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(x \cdot f) = \frac{\hbar}{i}(xf' - f - xf') = i\hbar f$$

i widzimy, że $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \mathbb{1}$. Operator sprzężony do operatora A to operator A^+ taki, że $(f|Ag) = (A^+ f|g)$. Mówimy, że A jest samosprzężony jeśli $A = A^+$. Operatory $\hat{x}$ i $\hat{p}$ są samosprzężone.
Ustalmy $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ taki, że $||f|| = 1$. Jeśli $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ jest liniowym operatorem to jego wartość średnią w stanie f definiujemy jako

$$(f|Af) = \langle A \rangle_f = \int_{\mathbb{R}^1} \overline{f(x)} (Af)(x) dx$$

np. dla $A = \hat{x}$ mamy

$$\langle \hat{x} \rangle_f = \int_{\mathbb{R}^1} \overline{f(x)} x dx = \int_{\mathbb{R}^1} x|f|^2(x) dx$$

.

Wariancję $\sigma(A)$ operatora A definiujemy $\sigma^2(A) = (f|(A - \langle A \rangle_f)^+(A - \langle A \rangle_f)f)$.

Twierdzenie 21.2. : Niech $A, B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ będą operatorami liniowymi oraz niech $C = \frac{[A,B]}{i}$. Wówczas:

$$\sigma_f^2(A)\sigma_f^2(B) \geqslant \frac{1}{4}\langle C \rangle_f^2$$

Przykład 21.3. Kładąc $A = \hat{x}$ i $B = \hat{p}$ mamy $C = \hbar\mathbb{1}$ i $\frac{1}{4}\langle C \rangle_f^2 = \hbar/4$ co daje zasadę nieoznaczoności $\sigma^2(\hat{x})\sigma^2(\hat{p}) \geqslant \hbar/4$ dla położenia i pędu.

Dowód. Bez straty ogólności załóżmy, że $\langle A \rangle_f = \langle B \rangle_f = 0$ (zmieniając ewentualnie A na $A - \langle A \rangle_f$ i B na $\langle B \rangle_f$). Wtedy $\sigma_f^2(A) = \langle A^2 \rangle_f$.
Niech $t \in \mathbb{R}$ oraz $G_t = A + itB$. Wtedy $G_t^+ = A - itB$ oraz

$$\langle G_t^+ G_t \rangle_f = (f|G_t^+ G_t) = ||G_t f||^2 \geqslant 0$$

z drugiej strony

$$\langle G_t^+ G_t \rangle_f = (f|\overbrace{(A - itB)}^{G_t^+}\overbrace{(A + itB)}^{G_t} f) = (f|A^2 f) + t^2(f|B^2 f) + t(f|\overbrace{i(AB - BA)}^{-C} f$$

$$= \sigma_f^2(A) - t\langle C\rangle_f + t^2\sigma_f^2(B) \geqslant 0 \quad (*)$$

Ujemność Δ dla dwumianu kwadratowego $(*)$:

$$\langle C\rangle_f^2 - 4\sigma_f^2(A)\sigma_f^2(B) \leqslant 0.$$

□

Wykład: Wzór sumacyjny Poissona:
Niech $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ będzie dana wzorem $Tf = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n)$. Innymi słowy $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$.
Własności T:

- $\tau_{2\pi}(T) = T \Rightarrow \mathscr{F}(T) = \mathscr{F}(T_{2\pi}T) = e^{-2\pi ik} \cdot \mathscr{F}(T)$
- $e^{ix} \cdot T = e^{ix}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{ix}\delta_{2\pi n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i2\pi n}\delta_{2\pi n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} = T$ zatem

$$\mathscr{F}(T) = \mathscr{F}(e^{ix}T) = \tau_1(\mathscr{F}(T)) \qquad (**)$$

.

W takim razie:

$$(1 - e^{-2\pi ik})\mathscr{F}(T) = 0$$

Skoro $1 - e^{-2\pi ik} \neq 0, k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ to nośnik dystrybucji supp$\mathscr{F}(T) \subset \mathbb{Z}$. Dalej: $\frac{1-e^{2\pi ik}}{k}k\mathscr{F}(T) = 0$ zatem w otoczeniu $\mathcal{O}$ zera mamy $k\mathscr{F}(T)|_{\mathcal{O}} = 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ takie, że $\mathscr{F}(T)|_{\mathcal{O}} = c\delta_0$ oraz z $(**) \Rightarrow \mathscr{F}(T) = c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$.
Liczymy c:

Niech $f(x) = e^{-x^2a/2}$. Wtedy $(\mathscr{F}f)(k) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-k^2/2a}$ i $\overbrace{\mathscr{F}(T)(f)}^{c\sum_{k\in\mathbb{Z}e^{-ak^2/2}}} = T(\mathscr{F}f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-(2\pi k)^2/2a} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-(2\pi^2k^2)/a}$.
Wstawmy $a = 2\pi$:

$$c\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi k^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2}$$

i widzimy, że $c = 1$.

Wzór sumacyjny Poissona

Niech $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)\mathscr{F}f(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx$. Wówczas $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathscr{F}f)(2\pi n)$.

Dowód.

$$\mathscr{F}T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n, \ T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$$

Zatem $T(\mathscr{F}(f)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathscr{F}f)(2\pi n)$ oraz $T(\mathscr{F}(f)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)$ □

22 Wykład 20.01.2017.

Przypomnienie 22.1. Wzór sumacyjny Poissona:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(2\pi m),$$

dla $f \in S'(\mathbb{R})$ co wynika z równości:

$$\mathcal{F}(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_m.$$

Definicja 22.2. Niech T będzie dystrybucją na $\mathbb{R}^n$ oraz niech $h \in \mathbb{R}^n$. Mówimy, że T jest dystrybucją okresową o okresie h jeśli $\tau_h T = T$.

Przypomnienie 22.3.

$$(\tau_h T)(f) = T(\tau_{-h} f).$$

Dalej $h = 2\pi$.

Stwierdzenie 22.4. Niech $T \in S'(\mathbb{R})$ będzie dystrybucją temperowaną. Wówczas T ma okres $2\pi \Leftrightarrow$ gdy $e^{-2\pi ik} \cdot \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(T)$.$(\bigstar)$

Dowód. Prosty wniosek wynikający z następującej tożsamości:

$$\mathcal{F}(\tau_h T) = e^{-ihk}\mathcal{F}(T).$$

□

Wniosek 22.5. Jeśli T jest okresowa, to nośnik tej dystrybucji $supp(\mathcal{F}T) \subset \mathbb{Z}$. Rzeczywiście wzór $(\bigstar)$ daje $(1 - e^{-2\pi ik})\mathcal{F}(T) = 0$ $(\bigstar\bigstar)$, więc $supp(\mathcal{F}(T)) \subset \{k \in \mathbb{R} : e^{-2\pi ik} = 1\} = \mathbb{Z}$.
W szczególności istnieją dystrybucje S_n; $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $supp(S_n) \subset \{n\}$ oraz $\mathcal{F}(S_n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} S_n$. $(\bigstar\bigstar\bigstar)$

Udowodnijmy, że $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists c_n \in \mathbb{C} : S_n = c_n\delta_n$.

Dowód. Dla $n = 0$: Niech $\varphi(x) = 1 - e^{-2\pi ik}$. Rozważmy funkcję gładką

$$\Psi(k) = \begin{cases} \frac{\varphi(k)}{k}; & \text{dla } k \neq 0 \\ 2\pi i; & \text{dla } k = 0 \end{cases}$$

Ponieważ $\Psi(0) \neq 0$ to $\Psi \neq 0$ na pewnym otoczeniu zera, ozn. $\mathcal{O}$. Zauważmy, że $\mathcal{F}(T)\Big|_{\mathcal{O}} = S_0$. Korzystając z $(\bigstar\bigstar)$ widzimy, że $\Psi(x) \cdot x \cdot S_0 = 0 \Rightarrow x \cdot S_0 = 0$. Zatem $S_0 = c_0\delta_0$.

Dla $n \in \mathbb{Z}$ kładziemy :

$$\Psi_n(k) = \begin{cases} \frac{\varphi(k)}{k-n}; & \text{dla } k \neq n \\ 2\pi i; & \text{dla } k = n \end{cases}$$

Rozumując analogicznie otrzymamy $S_n = c_n\delta_n$. Ostatecznie $\mathcal{F}(T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta_n$ □

Uwaga 22.6. $S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta_n$ jest dystrybucją temperowaną $\Leftrightarrow \exists M > 0$ oraz $N \in \mathbb{N} : |c_n| < M(1 + n^2)^N$.

Przypomnienie 22.7. $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta_0$; ogólniej $\mathcal{F}(e^{inx}) = 2\pi\delta_n$, co daje $\mathcal{F}^{-1}(\delta_n) = \frac{1}{2\pi}e^{inx}$.

Wniosek 22.8. Dystrybucja $T \in S'(\mathbb{R})$ jest $2\pi-$ okresowa $\Leftrightarrow \exists c_n \in \mathbb{C}$:

1) $\exists M > 0,\ N \in \mathbb{N}$: $|c_n| < M(1+n^2)^N$;

2) $T(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{inx} f(x)dx$.

Jak w prkatyce wyliczyć c_n? Weźmy funkcję $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\varphi(x) \geqslant 0$ taką, że $supp\varphi \subset]0; 3\pi[$ oraz taką, że $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi(x + 2\pi m) = 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ i φ jest gładka. Czy takie φ istnieje?

Ustalmy $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Psi(x) \geqslant 0$, $supp\Psi = supp\varphi$ oraz $\Psi(x) > 0$ dla $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}]$. Dalej niech $\widetilde{\Psi} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Psi(x + 2\pi m)$. Definiujemy $\varphi(x) = \frac{\Psi(x)}{\widetilde{\Psi}(x)}$. Widać, że: $\widetilde{\Psi}(x + 2\pi l) = \widetilde{\Psi}(x)$, $\widetilde{\Psi}(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$ oraz

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi(x + 2\pi m) = \frac{\sum_{m\in\mathbb{Z}} \Psi(x + 2\pi m)}{\widetilde{\Psi}(x)} = \frac{\widetilde{\Psi}(x)}{\widetilde{\Psi}(x)} = 1.$$

Oznaczając $\tau_{2\pi m}\varphi \overset{ozn.}{=} \varphi_{2\pi m}$ mamy $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi_{2\pi m} = 1$. Skoro $\mathcal{F}(T) = \sum c_n\delta_n$ to $\forall f \in S(\mathbb{R}^1)$ mamy

$$(\mathcal{F}T)(f) = T(\mathcal{F}f) = \sum c_n f(n). \tag{1}$$

Obliczenie:

$$\begin{aligned}
T(\mathcal{F}f) &= T(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \varphi_{2\pi m} \cdot \mathcal{F}f) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} T(\varphi_{2\pi m} \cdot \mathcal{F}f) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} T\Big(\tau_{2\pi m}\big(\varphi \cdot \tau_{-2\pi m}(\mathcal{F}f)\big)\Big) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \tau_{-2\pi m}(T)\big(\varphi \cdot \tau_{-2\pi m}(\mathcal{F}f)\big) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} T\big(\varphi \cdot \tau_{-2\pi m}(\mathcal{F}f)\big) = T\Big(\varphi \sum_{m\in\mathbb{Z}} \tau_{-2\pi m}(\mathcal{F}f)\Big)
\end{aligned} \tag{2}$$

gdzie w czwartej równości skorzystaliśmy z 2π okresowości T: $\tau_{-2\pi m}(T) = T$.

Analiza wyrażenia:

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}} \tau_{-2\pi m}(\mathcal{F}f)(x) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)(x + 2\pi m) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f(k)e^{-ikx}e^{-2\pi imk}dk \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f_x(k)e^{-2\pi imk} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f_x)(2\pi m)
\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $f_x(k) = f(k)e^{-ikx}$; Zauważając, że

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}f_x)(2\pi m) = (\text{ze wzoru Poissona}) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_x(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)e^{-ixm} \tag{4}$$

Korzystając z (2), (3) oraz (4) widzimy, że

$$T(\mathcal{F}f) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m)T(\varphi e^{-ixm}).$$

Porównując z (1) otrzymujemy $c_n = T(\varphi \cdot e^{-ixm})$.

Przykład 22.9. Niech $f \in C(\mathbb{R}) : f(x+2\pi) = f(x)$. Weźmy dystrybucję $T_f(g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$. Współczynniki szeregu Fouriera dystrybucji T_f wynoszą :

$$\begin{aligned}
c_n &= T_f(\varphi e^{-ixm}) \\
&= \int_0^{4\pi} f(x)\varphi(x)e^{-imx}dx = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)e^{-ikx}dx + \int_{2\pi}^{4\pi} f(x)\varphi(x)e^{-imx}dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)e^{-imx} + \int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x+2\pi)e^{-imx}dx \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(\varphi(x)+\varphi(x+2\pi)\Big)f(x)e^{-imx}dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}dx.
\end{aligned}$$

Wniosek 22.10.

$$T_f = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n T_{e^{imx}}.$$

Pytanie: kiedy $f = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{imx}$?

Przykład 22.11. Przypuśćmy, że $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) : f(x+2\pi) = f(x)$. Wówczas szereg $\sum \frac{1}{2\pi} c_n e^{imx}$ jest jednostajnie zbieżny do f :

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c_m}{2\pi} e^{imx},$$

gdzie

$$c_m = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}dx.$$

23 Wykład 23.01.2017.

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ciągła, okresowa o okresie 2π. Współczynniki Fouriera $c_m = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}dx$ $m \in \mathbb{Z}$. W "sprzyjających okolicznościach" $f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imx}$. (★) Niech

$$T_f \in S'(\mathbb{R}) \text{ i } T_f(g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$$

wówczas:

$$T_f(g) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \int_{\mathbb{R}} e^{imx}g(x)dx.$$

Stwierdzenie 23.1. Jeśli $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ jest 2π - okresowa, to szereg $f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imx}$ jest zbieżny jednostajnie do f.

Dowód. Niech $M = sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|$. Wówczas $|\int_0^{2\pi} f''(x)e^{imx}| \leqslant 2\pi M$

$$\int_0^{2\pi} f''(x)e^{imx} = \underbrace{f'(x)e^{imx}\Big|_0^{2\pi}}_{=0 \text{ bo } f' \text{ jest okresowa}} - im\int_0^{2\pi} f''(x)e^{imx}dx = \underbrace{-imf(x)e^{imx}\Big|_0^{2\pi}}_{=0 \text{ bo } f' \text{ jest okresowa}} - m^2\int_0^{2\pi} f(x)e^{imx}dx$$

Zatem $|c_m| = |\int_0^{2\pi} f(x)e^{imx}| \leqslant \frac{2M\pi}{m^2}$ i widzimy (z kryterium Weiestressa), że szereg $\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imx}$ jest zbieżny jednostajnie. W szczególności

$$T_f(g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c_m}{2\pi} e^{imx} g(x)dx$$

dla wszystkich $g \in S(\mathbb{R}^{\Bbbk})$. Aby wykazać, że $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c_m}{2\pi} e^{imx}$ udowodnimy lemat. □

Lemat 23.2. Niech $f \in S(\mathbb{R}^{\Bbbk})$ t.że $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. Niech $f_n(x) = nf(nx)$ Wówczas $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta_0$

Dowód.

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)gdx = \int_{\mathbb{R}} nf(nx)g(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} y = nx \\ ndx = dy \end{array} \right\} = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(\frac{y}{n})dy \to g(0) \int_{\mathbb{R}} f(y)dy$$

$$\delta_0(g) = g(0)$$

Wracamy do dowodu: wstawmy za g ciąg $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni g_n \longrightarrow \delta_x \in [0, 2\pi]$ wówczas

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum \frac{c_m e^{imx}}{2\pi} g_n(x)dx = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c_m e^{imx}}{2\pi}$$

□

Wzór Plancherel'a dla szeregów Fouriera. Niech f j.w. oraz $f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{imx}$. Wówczas:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \int_0^{2\pi} f(x) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{c_m} e^{-imx}}{2\pi} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{c_m} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m|^2$$

Tożsamość Plancherel'a

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx (\bigstar)$$

Uwaga 23.3. Można pokazać, że ($\bigstar$) zachodzi dla wszystkich funkcji ciągłych na odcinku [0,2π]. W szczególności biorąc $f(x) = x$

$$\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{3}(2\pi)^3 = \frac{8}{3}\pi^2$$

$$c_m = \int_0^{2\pi} xe^{-imx}dx = \frac{1}{-im} e^{-imx} x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{1}{-im} e^{-imx}dx = \frac{2\pi}{-im} \qquad m \neq 0$$

dla $m = 0$;

$$\int_0^{2\pi} xdx = 2\pi^2; (\bigstar) \text{ daje } \frac{8}{3}\pi^3 = \frac{1}{2\pi}(4\pi^4 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\pi^2}{m^2})$$

Zatem

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2\pi^3}{12\pi} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

Równania dystrybucyjne

Przykład 23.4. Znaleźć wszystkie dystrybucje $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ t.że $T' = \delta_0(\bigstar\bigstar)$. Zauważmy, rozwiązanie szczególne

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Wersja jednorodna naszego równania $T' = 0(\bigstar\bigstar\bigstar)$. Czy $T = aT_1$? $T' = 0$ oznacza, że $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mamy $T(f') = 0$. Zauważmy, że jeśli $g = f'$ gdzie $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ to:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)dx = \underbrace{f(\infty)}_{=0} - \underbrace{f(-\infty)}_{=0} = 0$$

W drugą stronę, jeśli $\tilde{g} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ spełnia $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x) = 0$ to kładąc $\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x)$ mamy $\tilde{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ oraz $\tilde{f}'(x) = \tilde{g}(x)$. Aby rozwiązać $(\bigstar\bigstar\bigstar)$ ustalmy $k \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ t.że $\int_{\mathbb{R}} k(x)dx = 1$. Wówczas

$$T(f) = T(f - c \cdot k + c \cdot k) = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}}(f - c \cdot k) = 0 \\ c = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \end{array} \right\}. = cT(k) = T(k)T_1(f)$$

Zatem T spełniające $(\bigstar\bigstar)$ są postaci $t = \theta(x) + a$ dla $a \in \mathbb{R}$.

Drugi sposób rozwiązania równania $T' = \delta_0$: zastosujmy transformatę Fouriera do $(\bigstar\bigstar)$ (w kontekście $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$)

$$\mathcal{F}(\delta_0)(f) = \delta_0(\mathcal{F}(f)) = (\mathcal{F}(f)(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1(f)$$

$$\text{ik } \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(T') = \mathcal{F}(\delta_0) = 1$$

RORJ

$$\mathcal{F}(T') = 0 \Rightarrow \mathcal{F}(T) = a\delta_0 \quad a \in \mathbb{R} \text{ i } T = \frac{a}{2\pi} \cdot 1$$

RSRNJ

$$\text{Wyliczmy } \mathcal{F}(\theta)(f) = \theta(\mathcal{F}(f)) = \int_0^{\infty} (\mathcal{F}f)(k)dk = \int_0^{\infty} dk \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \right] =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx \right] dk = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \quad \underbrace{\left[\int_0^{\infty} f(x)e^{-\epsilon k}e^{-ikx}dk \right]}_{\int_0^{\infty} e^{-(\epsilon + ix)k} = -\frac{1}{\epsilon + ix} e^{-(ix+\epsilon)k} \Big|_{0=k}^{\infty = k}} \quad dx =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int \frac{1}{i(x - i\epsilon)} f(x) = \left(\frac{1}{i(x - 0^+)} \right)(f)$$

RSRNJ

$$T = \frac{1}{i(k - 0^+)}$$

Zatem $\mathcal{F}(\theta) = \frac{1}{i(k-0^+)}$.

W dalszym ciągu będziemy rozważać r-nia postaci:

$$W\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) T = f \tag{5}$$

gdzie

$$T \in S'(\mathbb{R}^n) \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$W(\xi_1, ..., \xi_n) - \text{wielomian } n \text{ zmiennych}$$

np.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}T - \frac{\partial^2}{\partial x^2}T = f}_{\text{równanie dyfuzji}}$$

Ogólniej

$$\frac{\partial}{\partial t}T - \frac{\partial^2}{\partial x^2}T = S$$

gdzie S ustalonoa dystrybucja, np. $S = \delta_0$.

Stosując transformatę Fouriera do (5) otrzymujemy:

$$W(ik_1, ..., ik_n)\,\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(f) \;\text{ idea: }\; \underbrace{T = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(f)}{W(ik_1, ..., ik_n)}\right)}_{\text{sposób na otrzymanie jakiegoś RSRNJ}}$$

np. równanie dyfuzji przyjmuje postać:

$$(i\omega + k^2)\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(f)$$

Definicja 23.5. Niech $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, splotem f i g nazywamy funkcję $f \star g \in S(\mathbb{R}^n)$ gdzie $f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$

24 Wykład 27.01.2017.

Splot:

$$f, g \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = (y = x - \tilde{y}; x - y = \tilde{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\tilde{y})g(x - \tilde{y})d\tilde{y} = g \star f(x)$$

Stwierdzenie 24.1. Zachodzi wzór:

$$\mathcal{F}(f \star g)(k) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)(k)$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g)(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} d^n x d^n y e^{-ikx} f(x-y)g(y) \\
&= (\tilde{x} = x - y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} d^n \tilde{x}\, d^n y e^{-ik(\tilde{x}+y)} f(\tilde{x})g(y) \\
&= (\mathcal{F}f)(k)(\mathcal{F}g)(k)
\end{aligned}$$

□

Wniosek 24.2. Wniosek: $f \star g$ jest operacją łączną.

Obserwacja

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(f \star g)(x) = ((\frac{\partial}{\partial x^j} f) \star g)(x)$$

prosty wniosek z tw. o różniczkowaniu całki z parametrem.

O splocie dystrybucji

$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ to definiujemy $f \otimes g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ wzorem:

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$$

Jak tensorować dystrybucje?

$$T_{f\otimes g}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^m} f(x)g(y)h(x,y) = T_f(Tg(h(x,\cdot)))$$

Definicja 24.3. Jeśli $T \in D'(\mathbb{R}^n)$, $S \in D'(\mathbb{R}^m)$ to $T \otimes S \in D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ definiujemy wzorem: $(T \otimes S)(h) = T(S(h(x,\cdot)))$

Zauważmy, że $T_{f\star g}(l) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy f \underbrace{(x-y)}_{\widetilde{x}} g(y)l(x) = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} d\widetilde{x}\, dy f(\widetilde{x})g(y)l(\widetilde{x}+y) = T_{f\otimes g}(t^*l)$

gdzie $l(x+y) = (t^*l)(x,y)$

Uwaga: $t^*l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ i jeśli $l \neq 0$ to nośnik t^*l nie jest zwarty.

Splot dystrybucji definiujemy wzorem:

$$(D \star S)(l) = (D \otimes S)(t^*l)$$

Splot z deltą Diraca:

$f \in D(\mathbb{R}^n)$ i policzmy $(\delta_0 \star f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\delta_0(y)dy = f(x)$ zatem δ_0 jest jedynką splotową. Tak jak dla splotu funkcji, mamy:

$$\partial x_j(T \star S) = (\partial x_j T) \star S$$

Zastosowanie splotu: funkcje Greena:

$$(\bigstar) W(\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n})T = f$$

T jest dystrybucją, a f - funkcją.

Mówimy, że G jest funkcją Greena równania $(\bigstar)$ jeśli zachodzi wzór $W(\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n})G = \delta_0$.

Zauważmy, że jeśli G jest funkcją Greena to $G \star f$ jest rozwiązaniem $(\bigstar)$.

Rzeczywiście:

$$W(\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n})(G \star f) = (W(\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n})G) \star f = \delta_0 \star f = f$$

Przykład 24.4. Równanie dyfuzji:
$W(\partial_t, \partial_x) = \partial_t - \partial_x^2 \qquad \partial_t G - \partial_x^2 G = \delta(t,x)(\bigstar\bigstar)$
równanie dyfuzji: $\partial_t \varphi - \partial_x^2 \varphi = f(t,x)$
Sprawdźmy, że

$$G(t,x) = \Theta(t)\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{\frac{-x^2}{4t}} \qquad \text{spełnia } (\bigstar\bigstar).$$

Niech φ będzie funkcją próbną.

$$(\partial_t T_G - \partial_x^2 T_G)(\varphi) = -\underset{I}{T_G(\partial_t \varphi)} - \underset{II}{T_G(\partial_x^2 \varphi)}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}} \partial_t \varphi dt = \int_{-\infty}^{\infty} dx \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} -\partial_t (\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}) \varphi(t,x) + \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}} \varphi \Big|_{\epsilon}^{+\infty}$$
$$= - \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{\epsilon}^{\infty} (-\frac{1}{4\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi} t^{\frac{5}{2}}}) e^{\frac{-x^2}{4t}} \varphi(t,x) + \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}} \varphi \Big|_{\epsilon}^{+\infty}$$

$$II = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_x^2 (\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}) \varphi(t,x)$$

Skoro $\partial_x^2(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}) e^{\frac{-x^2}{4\epsilon}})$ to statecznie:

$$-I - II = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2\sqrt{\pi \epsilon}} e^{\frac{-x^2}{4t}} \varphi(\epsilon, x) = \varphi(0,0)$$

Ostatnią równość uzasadniamy następująco: weźmy $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$. Wówczas $\int_{\mathbb{R}} f(x) = 1$. Zatem ciąg funkcyjny $f_n(x) = nf(nx)$ zbiega do δ_0. Kładąc za n $\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$ widzimy, że

$$\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} e^{\frac{-x^2}{4\epsilon}} \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \delta_0$$

Kilka słów o bazach ortonormalnych

$$L^2([0,2\pi]) = \{f : [0,2\pi] : \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty\}$$

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \in L^2([0,2\pi])$$

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$$

oraz $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ jest układem ortonormalnym.

Szeregi Fouriera:
$c_n = (e_n|f)$ - współczynniki Fouriera
Jeśli

$$f \in L^2([0,2\pi])$$

to

$$f = \sum_{n\in Z} c_n e_n$$

oraz

$$\int_0^{2\pi} |f|^2(x)dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Ogólniejsza sytuacja: Niech ρ będzie funkcją na $[a,b]$ ściśle dodatnie:

$$L^2([a,b],\rho) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} : \int_a^b \rho(x)|f(x)|^2 dx < \infty\}$$

Iloczyn skalarny

$$(f|g) := \int_a^b \rho(x) \tilde{f}(x) g(x) dx$$

Nierówność Cauchy-Schwartza $|(f|g)| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$ gdzie $\|f\| = (f|f)^{\frac{1}{2}}$.
Założymy, że $\forall_n$ funkcja $x^n \in L^2([a,b],\rho)$.
Nich $\{P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots\}$ będzie rodziną wielomianów powstających w procedurze ortogonalizacji G-S z układu $\{1, x, x^2, \ldots\}$. Oczywiście $(P_n|P_m) = \delta_{nm}$.

Przykład: $a = -\infty$, $b = \infty$, $\rho(x) = e^{-x^2}$
Wówczas: $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są to tzw. wielomiany Hermite'a.

Pytanie 24.5. Przy jakich warunkach na ρ układ $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest bazą $L^2([a,b],\rho)$?

Jeśli wiemy że $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest bazą to $\forall_{f\in L^2([a,b],\rho)}$ mamy

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n P_n$$

gdzie $c_n = (P_n|f)$.
Okazuje się, że $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest bazą $\Leftrightarrow$ zachodzi $((x^n|f) = 0$ dla każdego n to $f = 0)$.

Twierdzenie 24.6. Przypuśćmy, że istnieje $\epsilon > 0$ t.że $\int_a^b \rho(x)e^{\epsilon|x|}dx < \infty$.
Wówczas układ $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest bazą $L^2([a,b],\rho)$.
Przykład $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}) \Rightarrow$ wielomiany Hermite'a dają bazę.

Dowód. **Szkic dowodu:** Niech $f \in L^2([a,b],\rho)$. Rozważmy całkę

$$F(z) := \int_a^b \rho(x)e^{izx}f(x)dx$$

która jest zbieżna jeśli $|Im(z)| < \frac{\epsilon}{2}$
Ponadto F jest holomorficzna na $\{z : |Im(z)| < \frac{\epsilon}{2}\}$
Przypuśćmy, że $(x^n|f) = 0 \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$. Wówczas

$$\frac{d^n}{dz^n}F(z)\Big|_{z=0} = (i)^n \int_a^b \rho(x)x^n f(x)dx = (x^n|f) = 0$$

dla wszystkich n.

Zatem z teorii funkcji holomorficznych $F \equiv 0$.
Kładąc $z \in \mathbb{R}$ widzimy, że $\mathcal{F}(\rho \cdot f\Big|_{[a,b]}) = 0 \Rightarrow \rho \cdot f = 0$ na $[a,b]$.
Skoro $\rho > 0$ to $f = 0$ na $[a,b]$. □