

Zadania do wykładu algebra z geometrią

seria 5

Zad.1 Które z wymienionych funkcji dwóch argumentów są formami dwuliniowymi na odpowiednich przestrzeniach wektorowych:

- a) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$, gdzie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$,
- b) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \mathbf{y}^T$, gdzie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$,
- c) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2$, gdzie $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

Zad.2 Znaleźć macierze form dwuliniowych $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$:

- a) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - x_2y_2$ ($V = \mathbb{R}^2$) w bazie kanonicznej oraz bazie $f_1 = (1, 1)^T$, $f_2 = (1, -1)^T$,
- a) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ ($V = \mathbb{R}^3$) w bazie bazie $f_1 = (1, 1, 1)^T$, $f_2 = (1, 1, -1)^T$, $f_3 = (1, -1, -1)^T$.

Zad.3 Dla danej formy dwuliniowej $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 5x_2y_1 + x_2y_2,$$

znaleźć formy dwuliniowe symetryczną b_1 oraz antysymetryczną b_2 takie, że $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Zad.4 Znaleźć formę kwadratową dla formy $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2.$$

Zad.5 Następujące formy kwadratowe $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ sprowadzić do postaci diagonalnej oraz znaleźć bazy diagonalizujące oraz signature:

- a) $Q_1(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3$, $Q_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$ dla $V = \mathbb{R}^3$,
- b) $Q_1(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, $Q_2(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4$ dla $V = \mathbb{R}^4$.

Zad.6 Dla jakich wartości λ następujące formy kwadratowe są dodatnio określone

- a) $Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,
- b) $Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$,
- c) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,
- d) $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Zad.7 Wykonać z zainteresowaniem i zrozumieniem zadania 334, 335, 362, 365, 367 ze zbioru zadań "Od liczb zespolonych do kwadryk. Zbiór zadań z algebry z rozwiązaniami", J. Jezierski et al.