II seria zadań domowych z Analizy I
18.11.2015

Zad. 1
Czy podzbiór $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right]$ zbioru $\mathbb{R}$ z metryką $d(x,y) = |x-y|$ jest otwarty ? Czy A jest zbiorem domkniętym ?
Zad. 2
Jak wyglądają otwarte, domknięte i spójne podzbiory $\mathbb{N}_+$ jeśli metryka określona jest wzorem $d(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Czy metryka $d_0(m,n) = |m-n|$ określa te same podzbiory otwarte w $\mathbb{N}_+$?
Zad. 3
Rozważmy metrykę „las" („Manhattan", „taxi") na płaszczyźnie $X = \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Sprawdzić, że „elipsy" (a właściwie wnętrza elips), czyli zbiory E postaci $E = \{\mathbf{x} \in X : d(\mathbf{x}, -\mathbf{c}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{c}) < 2a\}$ gdzie $\mathbf{c} = (0, c)$ i $0 < c < a$, są sześciokątami (c odpowiada tu mimośrodowi elipsy, czyli odległości ogniska od środka geometrycznego). Znaleźć wierzchołki tych sześciokątów, czyli wyrazić ich współrzędne przez mimośród c, półoś wielką a (i ewentualnie, dla wygody, półoś małą $b := \sqrt{a^2 - c^2}$.
Zad. 4 Wykazać z definicji, że

$$a)\ \lim_{x\to 1^-} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0; \qquad b)\ \lim_{x\to 1^+} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = \infty; \qquad c)\ \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Zad. 5 Obliczyć następujące granice :

$$a)\ \lim_{x\to -1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x+1}; \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}; \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}; \qquad d)\ \lim_{x\to 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}};$$

$$e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x}; \qquad f)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}; \qquad g)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}; \qquad h)\ \lim_{x\to 0} x \cot x;$$

$$i)\ \lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3 - 1}); \quad j)\ \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x-5}; \quad k)\ \lim_{x\to \pi} \frac{\tan(kx + x^2/\pi)}{\tan(nx + x^2/\pi)} \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Zad. 6
Obliczyć (jeśli istnieją) granice : lewo-, prawo- i dwustronne następujących funkcji w następujących punktach :

$$a)\ f(x) = e^{-1/x} \text{ w punkcie } x = 0; \qquad b)\ f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + x \text{ w punkcie } x = 1;$$

$$c)\ f(x) = \arctan \frac{1}{1-x} \text{ w punkcie } x = 1; \qquad d)\ f(x) = \frac{x}{x-2} \text{ w punkcie } x = 2;$$

$$e)\ f(x) = x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \text{ w punkcie } x = 0; \qquad f)\ f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{|x - \frac{\pi}{2}|} \text{ w punkcie } x = \frac{\pi}{2}.$$

Zad. 7
Dobrać parametry a, b, c tak, żeby funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone następująco :

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{dla } x < 0 \\ \frac{x^3-1}{x^2+x-2} & \text{dla } 0 \le x < 1 \\ c & \text{dla } x = 1 \\ \frac{x^2+(b-1)x-b}{x-1} & \text{dla } x > 1 \end{cases}; \qquad b)\ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{a/x}} & \text{dla } x \neq 0 \\ b & \text{dla } x = 0 \end{cases}.$$

były ciągłe na $\mathbb{R}$.
Zad. 8
Wykazać ciągłość poniższych funkcji w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ korzystając z definicji Heinego lub Cauchy'ego.

$$a)\ f(x) = 3x + 1; \qquad b)\ f(x) = \cos x; \qquad c)\ f(x) = \arctan x;$$

$$d)\ f(x) = e^x; \qquad d)\ f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 \neq 0; \qquad e)\ f(x) = \cos\frac{1}{x}, \quad x_0 \neq 0$$

Zad. 9
Opierając się na definicji jednostajnej ciągłości funkcji pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $[1, \infty)$, ale nie jest jednostajnie ciągła w przedziale $(0, \infty)$.
Zad. 11
Opierając się na definicji jednostajnej ciągłości funkcji pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $(0, 2)$, ale nie jest jednostajnie ciągła w przedziale $(0, \infty)$.
Zad. 12
Opierając się na definicji jednostajnej ciągłości funkcji pokazać, że funkcja $f(x) = |x|$ jest jednostajnie ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$.
Zad. 13
Wyznaczyć pochodne następujących funkcji :
a) $f(b) = \frac{ax+b}{a+b}$, ą) $f(x) = (x-a)(x-b)$, b) $y(x) = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$,
c) $f(x) = (x \sin t + \cos t)(x \cos t - \sin t)$, ć) $f(t) = (x \sin t + \cos t)(x \cos t - \sin t)$,
d) $y(x) = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$, e) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$, ę) $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$,
f) $f(x) = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$, g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, h) $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}$, i) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$,
j) $f(x) = \sqrt[n+m]{(1-x)^m (1+x)^n}$, k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$, l) $f(x) = \cos(2x) - 2\sin(x)$,
ł) $f(x) = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$, m) $f(x) = \frac{1}{\cos^n x}$, n) $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$,
ń) $y(x) = \tan(\frac{\sqrt{x}}{7})\cot(\frac{\sqrt{x}}{7})$, o) $f(x) = \frac{1}{\sin^2(x/a)} + \frac{1}{\cos^2(x/a)}$, ó) $f(t) = e^{-t^2}$,
p) $y(x) = e^{\tan(1/x)}$, q) $z(t) = \left(\frac{1-t^2}{2}\sin t - \frac{(1+t)^2}{2}\cos t\right)e^{-t}$, r) $f(x) = \frac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{ax}$,
s) $\xi(t) = t^{a^a} + a^{t^a} + a^{a^t}$, $(a > 0)$, ś) $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$, t) $y(x) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,
u) $f(x) = \frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$, $(k > 0)$, v) $r(t) = \sqrt{t+1} - \ln(1 + \sqrt{t+1})$,
w) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \operatorname{arcsinh} x$, x) $\phi(t) = \ln\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, y) $f(x) = \ln\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a + b\cos x}$,
$(0 < a < b)$, z) $f(t) = t(\sin(\ln t) - \cos(\ln t))$, ź) $y(x) = x + \sqrt{1-x^2}\arccos x$,
ż) $f(x) = x \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}$, α) $f(x) = \arcsin(\sin x)$, β) $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right)$,
γ) $y(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, δ) $y(t) = \arccos\left(\sin^2 t - \cos^2 t\right)$, ϵ) $f(x) = e^{m \arcsin x}(\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x))$, ζ) $f(x) = (\log x)^{\log_x x}$, η) $y(x) = \arctan(\tanh x)$, θ) $f(x) = \sqrt[x]{x}$,
ι) $f(x) = \sqrt[\ln x]{\ln x}$.