Zadania do wykładu algebra z geometrią

seria 2

Zad.1 Dane permutacje przedstawić w postaci złożenia cykli rozłącznych: *i)* (1234)(3456)(5678)(7890), *ii)* $(ABCD)(DCB)(BCDE)(EDC)(CDEF)(FED)(DEFG)$, *iii)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 3 & 6 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Zad.2 W grupie S_4 znaleźć permutacje przemienne odpowiednio z *i)* (12), *ii)* (123), *iii)* (1234), *iv)* (12)(34). Czy zbiory te tworzą podgrupy?

Zad.3 Ponumerować wierzchołki kwadratu od 1 do 4. Wyznaczyć wszystkie permutacje $\sigma \in S_4$, którym odpowiadają izometrie płaszczyzny przeprowadzające kwadrat na siebie. Czy permutacje te tworzą podgrupę?

Zad.4 Sprawdzić, że wzór $\sigma(x) = 3x + 3 - 25E(\frac{x}{8})$ określa permutację zbioru $X = \{0, 1, \ldots, 24\}$. Znaleźć rozkład σ i σ^4 na cykle rozłączne. Obliczyć znak i rząd permutacji σ.

Zad.5 Niech σ będzie dowolną permutacją zbioru $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Pokazać, że relacja określona wzorem

$$k \sim l \Leftrightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} \sigma^n(k) = l$$

jest relacją równoważności.

Zad.6 Zbadać liniową niezależność układów $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ dla:

a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$

b) $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix},$

c) $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$

W każdym przypadku podać jakąś bazę $\mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

Zad.7 Znaleźć jakąś bazę układu wektorów i za pomocą tej bazy wyrazić pozostałe wektory układu

a) $v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

b) $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}.$

Zad.8 Niech X będzie przestrzenią wektorową i niech $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. Wykazać, że jeśli istnieje $y \in X$, który można przedstawić jako kombinację liniową $\{x_1, \ldots, x_n\}$ na dokładnie jeden sposób, to układ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ jest liniowo niezależny.

Zad.9 Niech U i V będą podprzestrzeniami $\mathbb{R}^n$ zdefiniowanymi jako:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\},$$
$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1 = x_2 = \cdots = x_n \right\}.$$

Udowodnić, że $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ i znaleźć rozkłady wektorów bazy standardowej na składowe należące do U i V.

Zad.10 Podać jakieś bazy sumy i części wspólnej podprzestrzeni $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ i $W = \operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\}$ w $\mathbb{R}^5$ dla

a) $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$

b) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Zad.11 Wyznaczyć wymiary sumy i części wspólnej podprzestrzeni:

a) $\operatorname{span}\{v_1, v_2\}$ i $\operatorname{span}\{w_1, w_2\}$ dla $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ i $\operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\}$ dla

$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Zad.12 Podać bazy sumy i części wspólnej podprzestrzeni $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ i $\operatorname{span}\{w_1, w_2, w_3\}$ dla

a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$

b) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Zad.13 Dane są dwie podprzestrzenie $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$V_1 = \left\{ X : \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} X = 0 \right\},$$
$$V_2 = \left\{ X : X \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Znaleźć bazę $V_1 \cap V_2$ i równania opisujące $V_1 + V_2$.