15.12.2014

ZADANIA Z WYBRANYCH ZAGADNIEŃ MATEMATYKI

Metody algebry liniowej

Zadanie 1. Oblicz $\sin(\pi A)$, dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. Znajdź ogólne rozwiązanie równania rekurencyjnego:

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 0, \qquad (n \geq 2).$$

Operatory samosprzężone

Zadanie 3. Niech A będzie macierzą operatora $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ w bazie standardowej. Znajdź bazę ortonormalną $\mathbb{C}^3$ diagonalizującą ten operator dla

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$,

b) $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$,

c) $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$,

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -4 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Iloczyn skalarny.

Zadanie 4. W przestrzeni $V = \mathbb{R}_2[\,\cdot\,]$ określmy iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)$ oraz operator $T\colon V \to V$ wzorami $(v|w) = \int_{-1}^{+1} v(t)w(t)\,dt$, $(Tv)(t) = v(t+1)$. Znajdź:

a) bazę podprzestrzeni $W^{\perp}$ dla $W = \{w \in V \,|\, w(0) = w(1)\}$,
b) rzut prostopadły wektora v_0 na W dla $v_0(t) = t^2$,
c) jakąś ortonormalną bazę podprzestrzeni $U^{\perp}$ dla $U = \mathbb{R}_0[\,\cdot\,]$,
d) wektor $F^* v_0$.

Elementarny rachunek prawdopodobieństwa

Zadanie 5 (Poker)**.** Z talii 24 kart ("od dziewiątek") losowo wybieramy pięć. Jaka jest szansa, że otrzymamy dwie pary?

Zadanie 6. Rzucamy trzema kostkami do gry równocześnie. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia trzech trójek, jeśli wiadomo, że suma wyrzuconych oczek wynosi 9?

Zadanie 7. Ponownie rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie wypadła żadna szóstka, jeśli na każdej wypadła inna liczba oczek?

Zadanie 8. Wśród n monet k jest asymetrycznych, orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. W wyniku rzutu wybraną losowo monetą wypadł orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ta moneta jest asymetryczna?

Zmienne losowe i rozkłady

Zadanie 9. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości $\{1,\dots,10\}$, a jej rozkład

$$\rho\colon \{1,\dots,10\} \longrightarrow [0,1]$$

jest dany przez:

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \tfrac{1}{10}, & \rho(6) &= \tfrac{1}{40},\\ \rho(2) &= \tfrac{1}{20}, & \rho(7) &= \tfrac{1}{40},\\ \rho(3) &= \tfrac{2}{10}, & \rho(8) &= \tfrac{1}{20},\\ \rho(4) &= \tfrac{3}{10}, & \rho(9) &= \tfrac{1}{10},\\ \rho(5) &= \tfrac{1}{20}, & \rho(10) &= \tfrac{1}{10}. \end{aligned}$$

Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję X oraz jej odchylenie standardowe.

Zadanie 10. Niech X będzie ilością wyrzuconych orłów przy rzucie trzema monetami. Znajdź $\mathbb{E}\,X$ i $\mathbb{D}^2\,X$.

Zadanie 11. Rzucamy piłką do kosza aż do chwili pierwszego trafienia. Niech Y będzie liczbą rzutów. Oblicz $\mathbb{E}\,Y$ i $\mathbb{D}^2\,Y$, jeśli prawdopodobieństwo trafienia w pojedynczym rzucie wynosi $p \in]0,1[$.

Zadanie 12. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w $\mathbb{R}$, których rozkłady mają gęstości ρ_X i ρ_Y. Oblicz gęstość rozkładu zmiennej $X+Y$, jeśli

$$\rho_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad \rho_Y(t) = \frac{1}{2}\begin{cases} 1 & |t| \le 1,\\ 0 & |t| > 1. \end{cases}$$

Łańcuchy Markowa

Zadanie 13. Niech macierz przejścia dla procesu markowa o trzech stanach ma postać

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

W zależności od n oblicz prawdopodobieństwo przejścia ze stanu 1. do 3. w n krokach.

Zadanie 14. Rozważmy łańcuch Markowa o dwóch stanach 1. i 2. oraz macierzy przejścia
$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$
Sprawdź czy stany 1. i 2. są powracające czy chwilowe.

Zadanie 15. Niech macierz przejścia łańcucha Markowa o N stanach będzie taka:
$$\frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$
Czy łańcuch ten ma jakieś stany chwilowe?