Uniwersytet Warszawski

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Wydział Fizyki

Praca doktorska

Kwantowa Grupa Lorentza z relacjami komutacyjnymi Heisenberga

Paweł Kasprzak

Warszawa 2007

Praca przygotowana pod opieką prof. dr. hab. S.L. Woronowicza

Pracę tę dedykuję mojej rodzinie

Spis treści

ROZDZIAŁ 1

Wstęp.

1. O metodzie.

W trakcie powstawania tego doktoratu metoda, którą używałem do konstrukcji kwantowej grupy Lorentza z relacjami komutacyjnymi Heisenberga uległa dość istotnej zmianie. Zostało to wymuszone niemożnoscią rozwiązania pewnych problemów przy użyciu metody zaproponowanej mi przez opiekuna naukowego. Różnicę między pierwotnym i końcowym podejściem opiszę w niniejszym rozdziale.

Przez grupę Lorentza będziemy rozumieli jej podwójne nakrycie, czyli grupę $SL(2,\mathbb{C})$:

$$SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C} \text{ oraz } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}.$$

Algebra wielomianów od zmiennych $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ oraz ich zespolonych sprzężeń jest $*$-algebrą Hopfa oznaczaną $\mathcal{O}(SL(2,\mathbb{C}))$. Komnożenie, koodwrotność oraz kojedynka działają na generatorach w następujący sposób:

$$\begin{array}{lll} \Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \gamma & \kappa(\alpha) = \delta & \varepsilon(\alpha) = 1 \\ \Delta(\beta) = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \delta & \kappa(\beta) = -\beta & \varepsilon(\beta) = 0 \\ \Delta(\gamma) = \gamma \otimes \alpha + \delta \otimes \gamma & \kappa(\gamma) = -\gamma & \varepsilon(\gamma) = 0 \\ \Delta(\delta) = \gamma \otimes \beta + \delta \otimes \delta & \kappa(\delta) = \alpha & \varepsilon(\delta) = 1. \end{array} \tag{1}$$

Klasyfikacja deformacji $*$-algebry Hopfa $\mathcal{O}(SL(2,\mathbb{C}))$ została podana w pracy [**20**]. Znając tę klasyfikację rozpoczęto próby konstrukcji C*-algebraicznych wersji opisanych w niej przypadków. W roku 2002, gdy zacząłem interesować się teorią Grup Kwantowych, znane były C*-algebraiczne wersje dwóch z nich. Były to Kwantowa Grupa Lorentza z rozkładem Iwasawy [**12**] oraz Kwantowa Grupa Lorentza z rozkładem Gaussa [**21**]. W pracy magisterskiej obronionej w 2003 roku starałem się wykazać istnienie C*-algebraicznej wersji kolejnego przypadku tzw. Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza. Na poziomie algebraicznym, jest ona opisana przez rodzinę $*$-algebr Hopfa numerowanych rzeczywistym parametrem $s \in \mathbb{R}$, generowanych przez czwórkę elementów $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ spełniających relacje:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}\hat{\beta} &= \hat{\beta}\hat{\alpha} \\ \hat{\alpha}\hat{\gamma} &= \hat{\gamma}\hat{\alpha} \\ \hat{\beta}\hat{\delta} &= \hat{\delta}\hat{\beta} \\ \hat{\gamma}\hat{\delta} &= \hat{\delta}\hat{\gamma} \\ \hat{\beta}\hat{\gamma} &= \hat{\gamma}\hat{\beta} \\ \hat{\alpha}\hat{\delta} &= \hat{\delta}\hat{\alpha} \\ \hat{\alpha}\hat{\delta} &= 1 + \hat{\beta}\hat{\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
\hat\alpha\hat\alpha^* + s\hat\gamma\hat\gamma^* = \hat\alpha^*\hat\alpha & & & \\
\hat\alpha\hat\beta^* + s\hat\gamma\hat\delta^* = \hat\beta^*\hat\alpha & \hat\beta\hat\beta^* + s\hat\delta\hat\delta^* = \hat\beta^*\hat\beta + s\hat\alpha^*\hat\alpha & & \\
\hat\alpha\hat\gamma^* = \hat\gamma^*\hat\alpha & \hat\beta\hat\gamma^* = \hat\gamma^*\hat\beta & \hat\gamma\hat\gamma^* = \hat\gamma^*\hat\gamma & \\
\hat\alpha\hat\delta^* = \hat\delta^*\hat\alpha & \hat\beta\hat\delta^* = \hat\delta^*\hat\beta + s\hat\gamma^*\hat\alpha & \hat\gamma\hat\delta^* = \hat\delta^*\hat\gamma & \hat\delta\hat\delta^* = \hat\delta^*\hat\delta + s\hat\gamma\hat\gamma^*
\end{array} \tag{2}$$

Komnożenie, koodwrotność oraz kojedynka działają na generatorach w sposób standardowy:

$$\begin{array}{lll}
\Delta(\hat\alpha) = \hat\alpha\otimes\hat\alpha + \hat\beta\otimes\hat\gamma & \kappa(\hat\alpha) = \hat\delta & \varepsilon(\hat\alpha) = 1 \\
\Delta(\hat\beta) = \hat\alpha\otimes\hat\beta + \hat\beta\otimes\hat\delta & \kappa(\hat\beta) = -\hat\beta & \varepsilon(\hat\beta) = 0 \\
\Delta(\hat\gamma) = \hat\gamma\otimes\hat\alpha + \hat\delta\otimes\hat\gamma & \kappa(\hat\gamma) = -\hat\gamma & \varepsilon(\hat\gamma) = 0 \\
\Delta(\hat\delta) = \hat\gamma\otimes\hat\beta + \hat\delta\otimes\hat\delta, & \kappa(\hat\delta) = \hat\alpha & \varepsilon(\hat\delta) = 1.
\end{array} \tag{3}$$

Jednym ze sposobów opisu Grup Kwantowych na poziomie C*-algebr (tzw. Lokalnie Zwartych Grup Kwantowych) jest podejście stawiające w centrum uwagi operator multyplikatywny unitarny. W przypadku klasycznej grupy G jest nim operator Kaca-Takesakiego $V \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\otimes L^2(G)\big)$:

$$Vf(g,g') = f(gg',g')$$

dla wszystkich $f \in L^2(G)\otimes L^2(G)$. Algebrę funkcji ciągłych otrzymujemy przez ślajsowanie"pierwszej nogi operatora V to znaczy:

$$\mathrm{C}_\infty(G) = \overline{\{(\omega\otimes\mathrm{id})V : \omega\in\mathrm{B}(L^2(G))_*\}}^{\|\cdot\|}. \tag{4}$$

Komnożenie jest implementowane przez V:

$$\Delta(f) = V(f\otimes 1)V^*.$$

Operator Kaca-Takesakiego spełnia równanie pentagonalne:

$$V_{12}V_{13} = V_{23}V_{12}V_{23}^*.$$

Niech teraz H będzie dowolną przestrzenią Hilberta. Operator unitarny W działający na $H\otimes H$ nazywamy operatorem multyplikatwnym unitarnym jeśli spełnia on równanie pentagonalne.

Prof. S.L. Woronowicz zasugerował mi, że Lokalnie Zwarta Kwantowa Grupa Heisenberga - Lorentza powinna być otrzymana w procedurze zwanej Deformacją Rieffela. Startuje ona z podgrupy abelowej $\Gamma\subset G$ oraz bicharakteru Ψ na grupie dualnej $\hat\Gamma$. Używając tych danych można skręcić operator Kaca Takesakiego $V\in\mathrm{B}\big(L^2(G)\otimes L^2(G)\big)$ i otrzymać nowy operator multyplikatywny unitarny $W\in\mathrm{B}\big(L^2(G)\otimes L^2(G)\big)$. Sprawa wydawała się więc prosta. Wybierając podgrupę $\Gamma\subset SL(2,\mathbb{C})$ oraz odpowiedni bicharakter Ψ należało skonstruować generatory $\hat\alpha,\hat\beta,\hat\gamma,\hat\delta$ C*-algebry powstającej ze slajsowania pierwszej nogi operatora W :

$$A = \overline{\{(\omega\otimes\mathrm{id})W : \omega\in\mathrm{B}(L^2(SL(2,\mathbb{C})))_*\}}^{\|\cdot\|} \tag{5}$$

i pokazać, że spełniają one relacje (2).

Wyniki, które otrzymałem w pracy magisterskiej były nieco formalne. Potwierdzały one jednak podejrzenia, że Lokalnie Zwarta Kwantowa Grupa Heisenberga-Lorentza powinna być otrzymywana w Deformacji Rieffela. Głównym narzędziem z którego wtedy korzystałem było odwzorowanie kwantyzacji, które funkcji $f = (\omega \otimes \mathrm{id})V \in \mathrm{C}_\infty(SL(2,\mathbb{C}))$ przyporządkowuje operator $\hat{f} = (\omega \otimes \mathrm{id})W \in A$. Rozszyfrujmy ten przepis. Niech $R_g \in \mathrm{B}(L^2(SL(2,\mathbb{C}))$ będzie prawą reprezentacją regularną. Jeśli dla funkcji $f \in \mathrm{C}_\infty(SL(2,\mathbb{C}))$ istnieje funkcjonał $\omega_f \in \mathrm{B}(L^2(SL(2,\mathbb{C})))_*$ taki, że $f(g) = \omega_f(R_g)$, to kwantyzacja takiej funkcji dana jest wzorem

$$\hat{f} = (\omega_f \otimes \mathrm{id})W \in A. \tag{6}$$

Załóżmy na chwilę, że istnieje funkcjonał ω_α taki, że $\alpha(g) = \omega_\alpha(R_g)$. Wzór (6) prowadziłby wtedy do formuły $\hat{\alpha} = (\omega_\alpha \otimes \mathrm{id})W$. Analogicznie, jeśli istniałyby funkcjonały $\omega_\beta, \omega_\gamma, \omega_\delta$ takie, że

$$\beta(g) = \omega_\beta(R_g), \quad \gamma(g) = \omega_\gamma(R_g), \quad \delta(g) = \omega_\delta(R_g),$$

to pozostałe generatory dane byłyby wzorami:

$$\hat{\beta} = (\omega_\beta \otimes \mathrm{id})W, \quad \hat{\gamma} = (\omega_\gamma \otimes \mathrm{id})W, \quad \hat{\delta} = (\omega_\delta \otimes \mathrm{id})W.$$

Problem w tym, że ograniczone funkcjonały $\omega_\alpha, \ldots, \omega_\delta$ o powyższych własnościach nie istnieją. Nie przejmując się zbytnio tym faktem można wykonać formalne rachunki. Poniżej opiszemy ich wynik.

Abelową podgrupą $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$ użytą do konstrukcji operatora W jest podgrupa macierzy górnotrójkątnych:

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\} \subset SL(2,\mathbb{C}),$$

a bicharakter dany jest formułą $\Psi(z_1, z_2) = \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{i}\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)\right)$ gdzie $s \in \mathbb{R}$ jest parametrem rzeczywistym występującym w relacjach (2). Niech T_l oraz T_r będą lewo- i prawo-stronnymi operatorami różniczkowania wzdłuż podgrupy Γ. We współrzędnych α, γ, δ są one dane wzorami

$$T_l = -2\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha} \quad T_r = 2\gamma\frac{\partial}{\partial\delta}.$$

Odwzorowanie kwantyzacji zastosowane do funkcji $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ daje następującą czwórkę operatorów:

$$\begin{array}{ll} \hat{\alpha} = \alpha - \frac{s}{4}\gamma T_l^* & \hat{\beta} = \beta - \frac{s}{4}\delta T_l^* - \frac{s}{4}\alpha T_r^* + \frac{s^2}{16}\gamma T_l^* T_r^* \\ \hat{\gamma} = \gamma & \hat{\delta} = \delta - \frac{s}{4}\gamma T_r^*. \end{array} \tag{7}$$

Dobrą wiadomością jest to, że spełniają one relacje (2). Zła jest taka, że nie wiadomo jaki jest ich związek z C*-algebrą A. W trakcie studiów doktoranckich starałem się wykazać, że są one jej generatorami. Bazując na formule (5) pokazałem, że $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ są stowarzyszone z A. (Pojęcie stowarzyszenia wprowadzam w następnym rozdziale.) Próbując pokazać, że $\hat{\beta}$ także jest stowarzyszony oraz, że czwórka $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ generuje A napotykałem na techniczne problemy związane z nieoperatywnością definicji (5). Głównym problemem jest trudność w sprawdzeniu czy dana funkcja jest kwantowalna. W końcu doszedłem do wniosku, że potrzebny jest nowy opis C*-algebry A. Jest on oparty na następującym spostrzeżeniu. Elementy (7) są kombinacjami szóstki elementów $\alpha, \beta, \gamma, \delta, T_l, T_r$. W takim razie $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$

powinny być stowarzyszone z C*-algebrą B generowaną przez tę szóstkę. Ponadto naturalnym jest żądanie aby A zanurzało się w $\mathrm{M}(B)$. C*-algebrą B spełniającą powyższe wymagania jest $B = \mathrm{C}_\infty(SL(2,\mathbb{C})) \rtimes_\rho \Gamma^2$ gdzie działanie ρ jest dane wzorem

$$\rho_{\gamma_1,\gamma_2} f(g) = f(\gamma_1^{-1} g \gamma_2).$$

Jest jasne, że operatory $\alpha, \beta, \gamma, \delta, T_l, T_r$ generują B. Pozostaje jeszcze problem zanurzenia C*-algebry A w $\mathrm{M}(B)$. Aby zobaczyć jak go rozwiązać przypomnijmy, że $\mathrm{C}_\infty(SL(2,\mathbb{C}))$ zanurza się w $\mathrm{M}(B)$. Kryterium na to, czy $b \in \mathrm{M}(B)$ jest także elementem $\mathrm{C}_\infty(SL(2,\mathbb{C}))$ jest dane przez tak zwane warunki Landstada. Jednym z nich jest niezmienniczość na działanie grupy dualnej $\hat{\rho} : \hat{\Gamma}^2 \to \mathrm{Aut}(B)$. W szczególności elementy nieograniczone $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ są niezmiennicze. Nasuwa to pomysł by tak zdeformować działanie grupy dualnej $\hat{\rho}$ aby to elementy $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ były niezmiennicze na nowe działanie (oznaczane z powodów, które dalej staną się jasne, symbolem $\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$) oraz by algebra Landstada dla zdeformowanego działania była izomorficzna z A. Rozwiązaniem jest działanie $\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ które na generatorach $\alpha, \beta, \gamma, \delta, T_l, T_r$ dane jest wzorem:

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}(\alpha) &= \alpha + \frac{s}{4}\bar{z}_1\gamma \\
\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}(\beta) &= \beta + \frac{s}{4}\bar{z}_1\delta + \frac{s}{4}\bar{z}_2\alpha + \frac{s^2}{16}\bar{z}_1\bar{z}_2\gamma \\
\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}(\gamma) &= \gamma \\
\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}(\delta) &= \delta + \frac{s}{4}\bar{z}_2\gamma \\
\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}(T_l) &= T_l + z_1 \\
\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}(T_r) &= T_r + z_2,
\end{aligned}$$

gdzie utożsamiliśmy grupę dualną $\hat{\Gamma}^2$ z addytywną grupą $\mathbb{C}^2$. Utożsamienie algebry A z algebrą Landstada dla działania $\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ umożliwia nam użycie teorii iloczynów krzyżowych Landstada do jej badania. W szczególności elementy A otrzymujemy całkując skręcone działanie grupy dualnej $\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$:

$$\int_{\mathbb{C}^2} dz_1 dz_2 \hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}(b) \in A,$$

gdzie $b \in B$. Nikogo więc nie zdziwi fakt, że dla gładkich kwantowalnych funkcji $f \in \mathrm{C}_\infty(SL(2,\mathbb{C}))$ można znaleźć element $b_f \in B$ taki, że

$$\hat{f} = \int_{\mathbb{C}^2} dz_1 dz_2 \hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}(b_f).$$

Używając powyższego wzoru oraz funktorialnych własności algebry niezmienników Landstada udało mi się wykazać, że $\hat{\beta}$ jest stowarzyszony z C*-algebrą A oraz czwórka $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ ją generuje. Ponadto korzystając z faktu, że A jest algebrą niezmienników Landstada łatwo było wykazać istnienie kojedynki na C*-algebrze A, co doprowadziło do kompletnego opisu teorii jej reprezentacji. Ostatnim wynikiem zamykającym badanie Lokalnie Zwartej Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza było pokazanie, że kodziałanie na A jest dane wzorem (3).

2. Struktura Pracy.

W rozdziale 2 ustalamy podstawowe konwencje notacyjne oraz dość szczegółowo opisujemy pojęcia z teorii C*-algebr używane dalej w pracy. Ponadto cytujemy twierdzenia dotyczące związku operatorów multyplikatywnych unitarnych z Lokalnie Zwartymi Grupami Kwantowymi.

Rozdział 3 zawiera podstawowe informacje dotyczące grupy Heisenberga. Jego najważniejsza część dotyczy własności generatorów algebry grupowej grupy Heisenberga.

Rozdział 4 poświęcony jest Deformacji Rieffela C*-algebr oraz Grup Lokalnie Zwartych. Zaczynamy od omówienia pojęcia Γ-produktu. Następnie pokazujemy jak Deformacja Rieffela może być opisana w terminach deformacji odpowiedniego Γ-produktu. Pozwala to łatwo dowodzić jej funktorialnych własności. Na końcu rozdziału pokazujemy jak w języku Γ-produktów opisać Deformacje Rieffela Grup Lokalnie Zwartych oraz badamy odwzorowanie kwantyzacji.

W rozdziale 5 opisujemy Kwantową Grupę Heisenberga-Lorentza na różnych poziomach. Zaczynamy od powtórzenia opisu poziomu $*$-algebr Hopfa. Następnie przechodzimy do poziomu przestrzeni Hilberta, który sprowadza się do wyróżnienia interesujących reprezentacji związków komutacyjnych spełnianych przez generatory $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ za pomocą operatorów działających na H (H jest tu oczywiście przestrzenią Hilberta). Okazuje się, że struktura komnożenia ma swoje odbicie również na tym poziomie. Ostatnią i najważniejszą częścią pracy jest opis Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza na poziomie C*-algebr. Jak wspominaliśmy w poprzednim rozdziale jej konstrukcja opiera się na Deformacji Rieffela. Pokazujemy, że otrzymana C*-algebra A^s generowana jest przez czwórkę elementów $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$. Opisujemy też związek A^s z Kwantową Grupą Heisenberga Lorentza na poziomie przestrzeni Hilberta. W ostatniej części pracy sprawdzamy, że komnożenie działa na generatorach w sposób standardowy.

3. Podziękowania.

Praca ta nie powstałaby bez pomocy prof. S.L. Woronowicza za którą chciałbym wyrazić swoją głęboką wdzięczność. Czas który mi poświęcił, dyskusje i rady których mi udzielał są nie do przecenienia. Składam też podziękowania uczestnikom seminarium *Algebry Operatorów i Grupy Kwantowe* a w szczególności prof. dr. hab. J. Derezińskiemu, dr. hab. W. Puszowi oraz dr. P.M. Sołtanowi za czas, który zechcieli poświęcić na dyskusje związane z tematyką tej pracy. Oddzielne podziękowania składam dr. hab. P.M. Hajacowi. Finansowe wsparcie które otrzymałem przy okazji uczestnictwa w kierowanym przez niego programie *Noncommutative Geometry and Quantum Groups* pozwoliło mi się skupić na sprawach czysto naukowych, w tym na pisaniu tej pracy. Na koniec chciałbym podziękować mojej żonie za cierpliwość, wsparcie i zrozumienie, którymi mnie obdarza na codzień.

ROZDZIAŁ 2

Podstawowe definicje i notacja.

1. Przestrzenie Hilberta.

Iloczyn skalarny dwóch wektorów w przestrzeni Hilberta H oznaczany będzie symbolem $(x|y)$. Wszystkie przestrzenie Hilberta będą nad ciałem liczb zespolonych. Dla przestrzeni H przestrzeń zespolenie sprzężoną definiujemy jako $\bar{H} = \{\bar{x} : x \in H\}$ ze strukturą przestrzeni wektorowej oraz iloczynem skalarnym danymi przez:

$$\begin{aligned}\bar{x} + \bar{y} &= \overline{x + y}\\ \lambda\bar{x} &= \overline{\bar{\lambda} x}\\ (\bar{x}|\bar{y}) &= (y|x).\end{aligned}$$

Będziemy używać notacji numerującej nogi operatora. Jeśli V jest operatorem działającym na $H \otimes H$ to V_{12}, V_{13}, V_{23} są operatorami działającymi na $H \otimes H \otimes H$ wzorem

$$\begin{aligned}V_{12} &= V \otimes I\\ V_{23} &= I \otimes V\\ V_{13} &= (I \otimes \Sigma)(V \otimes I)(I \otimes \Sigma)\end{aligned}$$

gdzie I jest operatorem jednostkowym a Σ jest operatorem flipu:

$$\Sigma(x \otimes y) = y \otimes x.$$

Ważną rolę w pracy pełni przestrzeń funkcjonałów liniowych na $\mathrm{B}(H)$, będących granicami kombinacji liniowych funkcjonałów postaci

$$\mathrm{B}(H) \ni T \mapsto (x|Ty) \in \mathbb{C},$$

gdzie $x, y \in H$. Funkcjonały takie nazywamy normalnymi a ich zbiór oznaczamy symbolem $\mathrm{B}(H)_*$.

Dla $X \subset H$ symbolem X^{cls} będziemy oznaczać normowe domknięcie liniowej powłoki zbioru X. Niech B będzie przestrzenią Banacha oraz $Y \subset B$. Również w tym kontekście będziemy używać notacji Y^{cls}.

2. C^*-algebry.

W pracy tej będziemy używać teorii C^*-algebr. Dla C^*-algebry A, $\mathrm{M}(A)$ będzie oznaczał zbiór mnożników. Element $a \in \mathrm{M}(A)$ jest ograniczonymi odwzorowaniem liniowym na przestrzeni Banacha A (w skrócie, jest elementem $B(A)$) takim, że istnieje element $a^* \in \mathrm{B}(A)$ spełniający równanie:

$$b^*ac = (a^*b)^*c \tag{8}$$

dla wszystkich $b, c \in A$. Można pokazać że $\mathrm{M}(A)$ jest C*-algebrą z jedynką. Ponadto A zanurza się w $\mathrm{M}(A)$ jako istotny ideał. Mianowicie każdy element $a \in A$ wyznacza element $\mathrm{M}(A)$ dany przez mnożenie lewostronne przez a. Niech A^* będzie przestrzenią funkcjonałów na A. Dla $a_1, a_2, a \in A$ oraz $\omega \in A^*$ połóżmy $(a_1 \cdot \omega \cdot a_2)(a) = \omega(a_2 a a_1)$. Definiuje to funkcjonał $(a_1 \cdot \omega \cdot a_2) \in A^*$.

Naturalną topologią na $\mathrm{M}(A)$ jest tzw. *topologia stict.* Jest ona wyznaczona przez rodzinę półnorm

$$\mathrm{M}(A) \ni a \mapsto \|ax\| + \|a^* y\|$$

gdzie $x, y \in A$.

Omówimy teraz pojęcie morfizmu C*-algebr A i B. Homomorfizm $\pi : A \to \mathrm{M}(B)$ nazywamy morfizmem C*-algebr A i B jeśli zbiór $\pi(A)B$ jest gęstym podzbiorem B. Zbiór morfizmów oznaczany będzie symbolem $\mathrm{Mor(A;B)}$. Można pokazać, że morfizm $\pi \in \mathrm{Mor(A;B)}$ rozszerza się do homomorfizmu $\pi : \mathrm{M}(A) \to \mathrm{M}(B)$. Rozwiązuje to kwestię ich składania: dla $\pi \in \mathrm{Mor(A;B)}$ oraz $\rho \in \mathrm{M}(B;C)$ istnieje morfizm $\rho \circ \pi \in \mathrm{Mor(A;C)}$.

Przykład 1. Niech J będzie ideałem w C*-algebrze A. Dla $a \in A$ oraz $j \in J$ połóżmy

$$\pi_J(a)j = aj \in J. \tag{9}$$

Formuła ta definiuje odwzorowanie $\pi_J : A \to \mathrm{M}(J)$. Łatwo zobaczyć, że $\pi_J \in \mathrm{Mor(A;J)}$.

Przejdźmy do omówienia pojęcia elementu stowarzyszonego z C*-algebrą. Zostało ono wprowadzone i zbadane przez S.L. Woronowicza w pracy **[17]**. Zacznijmy od definicji:

Definicja 1. Niech A będzie C*-algebrą oraz T będzie liniowym odwzorowaniem określonym na gęstej dziedzinie $D(T) \subset A$. Mówimy, że T jest elementem stowarzyszonym z A i piszemy $T \,\eta\, A$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje element $z \in \mathrm{M}(A)$ taki, że $\|z\| \leq 1$ oraz

$$\begin{pmatrix} x \in D(T), \\ y = Tx \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Istnieje } a \in A \text{ taki, że} \\ x = (1 - z^*z)^{\frac{1}{2}} a \text{ oraz } y = za. \end{pmatrix}$$

Można pokazać, że element $z \in \mathrm{M}(A)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez T. Będziemy go oznaczać symbolem z_T i nazywać z-transformatą elementu T. Element $z_T^* \in \mathrm{M}(A)$ jest z-transformatą elementu stowarzyszonego, który będzie oznaczany symbolem T^*. Zbiór elementów stowarzyszonych z C*-algebrą A oznaczamy symbolem A^η.

Niech A, B będą C*-algebrami, $\pi \in \mathrm{Mor(A;B)}$. Okazuje się, że $\pi(z_T) \in \mathrm{M}(B)$ wyznacza element stowarzyszony z C*-algebrą B, oznaczany dalej symbolem $\pi(T) \,\eta\, B$. Można pokazać, że $\pi(T^*) = \pi(T)^*$.

Przejdziemy teraz do opisu elementu stowarzyszonego $T \,\eta\, A$ w terminach jego wykresu $\mathrm{Graph}(T) \subset A \oplus A$. Zauważmy, że C*-algebra $A \oplus A$ jest jednocześnie modułem Hilbertowskim nad C*-algebrą A. Struktura modułu dana jest wzorem $(a_1, a_2)a = (a_1 a, a_2 a)$ dla wszystkich $a_1, a_2, a \in A$. Iloczyn skalarny o wartościach w A dany jest formułą:

$$\langle (a_1, a_2) | (a_1', a_2') \rangle = a_1^* a_1' + a_2^* a_2'.$$

Bardzo dobrym źródłem informacji, dotyczącym modułów Hilbertowskich jest książka [7]. Wykres elementu stowarzyszonego T jest domkniętym podmodułem w $A \oplus A$. Ponadto

$$\mathrm{Graph}(T)^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} -T^* a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathrm{D}(T^*) \right\}$$

oraz $\mathrm{Graph}(T) \oplus \mathrm{Graph}(T)^{\perp} = A \oplus A$. Stwierdzenie 2.2 z pracy [19] pokazuje, że jest to kompletna charakterystyka podmodułów pochodzących od elementów stowarzyszonych:

Stwierdzenie 1. *Niech A będzie C^*-algebrą oraz $G \subset A \oplus A$ będzie domkniętym podmodułem. Niech p_1 (p_2) będzie rzutem na pierwszą (drugą) składową w C^*-algebrze $A \oplus A$. Załóżmy że $p_1 G$, $p_2 G^{\perp}$ są gęstymi podzbiorami w A oraz $G \oplus G^{\perp} = A \oplus A$. Wtedy G jest wykresem elementu stowarzyszonego $T \,\eta\, A$.*

Niech T będzie domkniętym operatorem określonym na gęstej dziedzinie $\mathrm{D}(T) \subset A$. Załóżmy, że dziedzina $\mathrm{D}(T)$ jest prawym modułem w A oraz $T(bc) = T(b)c$ dla wszystkich $b \in \mathrm{D}(T)$ oraz $c \in A$. Przypuśćmy, że istnieje gęsto określony operator T^+ taki, że:

1. $\mathrm{D}(T^+)$ jest prawym modułem w A oraz $T^+(bc) = T^+(b)c$ dla wszystkich $b \in \mathrm{D}(T^+)$, $c \in A$.
2. $a^* T b = (T^+ a)^* b$ dla wszystkich $a \in \mathrm{D}(T^+)$ oraz $b \in \mathrm{D}(T)$.

Łatwo zobaczyć, że T^+ jest operatorem domykalnym oraz jego domknięcie także spełnia powyższe warunki. Od tej pory będziemy zakładać, że T^+ jest domknięty. Zauważmy, że jeśli T jest elementem stowarzyszonym z C^*-algebrą A to $T^+ = T^*$ spełnia powyższe założenia. Poniżej pokażemy, że przy pewnych dodatkowych założeniach prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne. W tym celu rozważmy operator T^+T. Jego dziedziną jest zbiór

$$D(T^+T) = \{b \in \mathrm{D}(T) : Tb \in \mathrm{D}(T^+)\},$$

oraz dla $x \in \mathrm{D}(T^+T)$ kładziemy $T^+T(x) = T^+(T(x))$.

Lemat 1. *Niech T oraz T^+ będą operatorami działającymi na C^*-algebrze A o własnościach opisanych powyżej. Jeśli zbiór $(1 + T^+T)\,\mathrm{D}(T^+T)$ jest gęsty w A to element T jest stowarzyszony z A oraz $T^* = T^+$.*

Dowód. Łatwo sprawdzić że $\mathrm{Graph}(T)$ jest domknięty podmodułem w $A \oplus A$ oraz

$$\left\{ \begin{pmatrix} -T^+ a \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathrm{D}(T^+) \right\} \subset \mathrm{Graph}(T)^{\perp}.$$

W takim razie $\mathrm{D}(T^+) \subset p_2(\mathrm{Graph}(T)^{\perp})$ stąd $p_2(\mathrm{Graph}(T)^{\perp})$ jest zbiorem gęstym w A.

Sprawdzimy teraz, że $\mathrm{Graph}(T) \oplus \mathrm{Graph}(T)^{\perp} = A \oplus A$. Niech ω, ω' będą funkcjonałami działającym na A takimi, że $\omega \oplus \omega'$ zeruje się na $\mathrm{Graph}(T) \oplus \mathrm{Graph}(T)^{\perp}$. W szczególności

$$\omega(a - T^+(b)) + \omega'(T(a) + b) = 0, \tag{10}$$

dla wszystkich $a \in \mathrm{D}(T)$ oraz $b \in \mathrm{D}(T^+)$. Niech $a \in \mathrm{D}(T^+T)$. Połóżmy $b = -T(a)$. Wtedy równanie (10) daje $\omega(a + T^+T(a)) = 0$. Z gęstości zbioru $(1 + T^+T)\,\mathrm{D}(T^+T)$ w A dostajemy $\omega = 0$. Kładąc $a = 0$ w (10) dostajemy $\omega'(b) = 0$ dla wszystkich $b \in \mathrm{D}(T^+)$, co pokazuje że $\omega' = 0$. W takim razie $\omega \oplus \omega' = 0$ oraz $\mathrm{Graph}(T) \oplus \mathrm{Graph}(T)^{\perp} = A \oplus A$. Widzimy więc, że Graph(T) spełnia założenia Stwierdzenia 1 czyli T jest elementem stowarzyszonym z A. $\square$

Poniższe Twierdzenie (Twierdzenie 2.3 **[19]**) daje użyteczne narzędzie służące do konstrukcji elementów stowarzyszonych.

Twierdzenie 1. *Niech A będzie* C**-algebrą,* $a, b, c, d \in \mathrm{M}(A)$ *oraz* $Q = \begin{pmatrix} d, & -c^* \\ b, & a^* \end{pmatrix}$.
Załóżmy że:

$$\begin{gathered} ab = cd \\ a^*A \text{ jest gęste w } A \\ dA \text{ jest gęste w } A \\ Q(A \oplus A) \text{ jest gęste w } A \oplus A. \end{gathered}$$

Wtedy istnieje element stowarzyszony $T \,\eta\, A$ taki, że

1. *dA jest istotną dziedziną T oraz*
$$Tdx = bx$$
dla wszystkich $x \in A$.
2. *Dla wszystkich $x, y \in A$ mamy*
$$\begin{pmatrix} x \in D(T) \\ \text{oraz } y = Tx \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Big(ay = cx\Big).$$

Jeśli Q jest elementem odwracalnym to $\mathrm{D}(T) = dA$.

Niech T_1, T_2 będzie parą operatorów stowarzyszonych z A. Mówimy, że T_1 i T_2 silnie komutują jeśli z_{T_1} komutuje z z_{T_2} oraz z $z_{T_2}^*$. Zdefiniujmy złożenie silnie komutujących elementów. Dziedziną złożenia jest zbiór $\mathrm{D}(T_1T_2) = \{x \in A : x \in \mathrm{D}(T_1), T_1x \in \mathrm{D}(T_2)\}$ oraz $T_1T_2(x) = T_1(T_2(x))$ dla wszystkich $x \in \mathrm{D}(T_1T_2)$. Okazuje się, że złożenie T_1T_2 silnie komutujących elementów stowarzyszonych jest odwzorowaniem domykalnym. Korzystając z Twierdzenia 1 pokażemy, że odpowiednie domknięcie jest elementem stowarzyszonym z A. Fakt ten jest uogólnieniem Twierdzenia 6.1 z pracy **[10]**, w którym opisano konstrukcję iloczynu tensorowego elementów stowarzyszonych.

Twierdzenie 2. *Niech A będzie* C**-algebrą oraz $T_1, T_2 \,\eta\, A$ będzie parą silnie komutujących elementów stowarzyszonych. Operator T_1T_2 z dziedziną* $\mathrm{D}(T_1T_2)$ *jest domykalny oraz jego domknięcie jest stowarzyszone z A. Ponadto, jeśli $\mathcal{D}$ jest istotną dziedziną dla T_2 to $(1 + T_1^*T_1)^{-1}\mathcal{D}$ jest istotną dziedziną dla T_1T_2.*

Dowód. Zauważmy, że zbiór $(1 - z_{T_2}^* z_{T_2})^{\frac{1}{2}}(1 - z_{T_1}^* z_{T_1})^{\frac{1}{2}}A$ jest podzbiorem $\mathrm{D}(T_1T_2)$ oraz

$$T_1T_2(1 - z_{T_2}^* z_{T_2})^{\frac{1}{2}}(1 - z_{T_1}^* z_{T_1})^{\frac{1}{2}}x = z_{T_1} z_{T_2} x. \tag{11}$$

Spostrzeżenie to nasuwa następującą postać operatora Q (patrz poprzednie twierdzenie):

$$Q = \begin{pmatrix} (1 - z_{T_2}^* z_{T_2})^{\frac{1}{2}}(1 - z_{T_1}^* z_{T_1})^{\frac{1}{2}} & -z_{T_1}^* z_{T_2}^* \\ z_{T_1} z_{T_2} & (1 - z_{T_1} z_{T_1}^*)^{\frac{1}{2}}(1 - z_{T_2} z_{T_2}^*)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Można sprawdzić, że Q spełnia założenia Twierdzenia 1. Sprawdźmy np. że $Q(A \oplus A)$ jest zbiorem gęstym w A. W tym celu liczymy QQ^*:

$$QQ^* = \begin{pmatrix} (1 - z^*_{T_2} z_{T_2})(1 - z^*_{T_1} z_{T_1}) + z^*_{T_2} z_{T_2} z^*_{T_1} z_{T_1} & 0 \\ 0 & (1 - z_{T_1} z^*_{T_1})(1 - z_{T_2} z^*_{T_2}) + z_{T_1} z^*_{T_1} z_{T_2} z^*_{T_2} \end{pmatrix}$$

Korzystając ze Stwierdzenia 6.2 z pracy **[10]** łatwo pokazać, że QQ^* ma gęsty obraz w $A \oplus A$ skąd Q także ma gęsty obraz.

Niech T będzie elementem stowarzyszonym danym przez macierz operatorów Q w sensie Twierdzenia 1. Jego istotną dziedziną jest zbiór $(1 - z^*_{T_2} z_{T_2})^{\frac{1}{2}}(1 - z^*_{T_1} z_{T_1})^{\frac{1}{2}} A$. Z równania (11) wynika, że T w obcięciu do swojego rdzenia $(1 - z^*_{T_2} z_{T_2})^{\frac{1}{2}}(1 - z^*_{T_1} z_{T_1})^{\frac{1}{2}} A$ pokrywa się z operatorem $T_1 T_2$. W takim razie do wykazania, że domknięcie $T_1 T_2$ jest równe T wystarczy pokazać, że $\mathrm{D}(T_1 T_2) \subset \mathrm{D}(T)$. Korzystając z punktu 2 Twierdzenia 1 widzimy, że własność ta wynika z poniższego ciągu równości:

$$\begin{aligned} (1 - z_{T_1} z^*_{T_1})^{\frac{1}{2}}(1 - z_{T_2} z^*_{T_2})^{\frac{1}{2}}(T_1 T_2)x &= (1 - z_{T_2} z^*_{T_2})^{\frac{1}{2}}(1 - z_{T_1} z^*_{T_1})^{\frac{1}{2}} T_1(T_2 x) \\ &= z_{T_1}((1 - z_{T_2} z^*_{T_2})^{\frac{1}{2}} T_2 x = z_{T_1} z_{T_2} x, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $(1 - z_{T_i} z^*_{T_i})^{\frac{1}{2}} T_i y = z_{T_i} y$ dla wszystkich $y \in \mathrm{D}(T_i)$ oraz $i = 1, 2$.

Przejdźmy do dowodu drugiej części twierdzenia. Łatwo zobaczyć że jeśli $\mathcal{D}'$ jest zbiorem gęstym w A to podzbiór $(1 + T_1^* T_1)^{-\frac{1}{2}}(1 + T_2^* T_2)^{-\frac{1}{2}} \mathcal{D}'$ jest istotną dziedziną dla $T_1 T_2$. Niech teraz $\mathcal{D}$ będzie istotną dziedziną dla T_2. Wtedy $\mathcal{D}' = (1 + T_1^* T_1)^{-\frac{1}{2}}(1 + T_2^* T_2)^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}$ jest podzbiorem gęstym w A. W takim razie podzbiór

$$(1 + T_1^* T_1)^{-\frac{1}{2}}(1 + T_2^* T_2)^{-\frac{1}{2}}(1 + T_1^* T_1)^{-\frac{1}{2}}(1 + T_2^* T_2)^{\frac{1}{2}} \mathcal{D} = (1 + T_1^* T_1)^{-1} \mathcal{D}$$

jest istotną dziedziną dla $T_1 T_2$. Kończy to dowód twierdzenia. $\square$

Niech A będzie C^*-algebrą oraz $\gamma \,\eta\, A$ będzie elementem stowarzyszonym takim, że $z_\gamma \in \mathrm{M}(A)$ jest elementem centralnym. Rozważmy ideał $A_\gamma \equiv \overline{z_\gamma A}^{\|\cdot\|}$. Korzystając z Przykładu 1 wiemy, że istnieje morfizm $\pi_{A_\gamma} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}; \mathrm{A}_\gamma)$. Stosując go do elementu $\gamma \,\eta\, A$ otrzymujemy element stowarzyszony $\pi_{A_\gamma}(\gamma) \,\eta\, A_\gamma$.

Lemat 2. *Niech A będzie C^*-algebrą oraz $\gamma \,\eta\, A$ będzie elementem stowarzyszonym z A takim, że $z_\gamma \in \mathrm{M}(A)$ jest elementem centralnym, $A_\gamma \subset A$ będzie ideałem oraz $\pi_{A_\gamma}(\gamma) \,\eta\, A_\gamma$ będzie elementem stowarzyszonym rozważanym powyżej. Wtedy $\pi_{A_\gamma}(\gamma)$ jest elementem odwracalnym oraz odwrotność $\pi_{A_\gamma}(\gamma)^{-1}$ jest elementem stowarzyszonym z A_γ.*

Dowód. Element stowarzyszony odwrotny do $\pi_{A_\gamma}(\gamma)$ będziemy dalej oznaczali symbolem γ^{-1}. Zdefiniujemy go przez wprowadzenie jego z-transformaty. Okazuje się, że ma ona następującą postać $z_{\gamma^{-1}} = \mathrm{Phase}(\gamma)^* \pi_{A_\gamma}\left((1 + \gamma^*\gamma)^{-\frac{1}{2}}\right)$ gdzie $\mathrm{Phase}(\gamma) \in \mathrm{M}(A_\gamma)$ jest unitarnym elementem, który wprowadzimy poniżej.

Rozważmy następującą funkcję:

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto f(z) = \mathrm{Phase}(z) z (1 + |z|^2)^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{C}.$$

Łatwo zobaczyć, że jest ona ciągła i ograniczona. Ponadto

$$(f(\gamma)a_1)^* f(\gamma)a_2 = (z_\gamma a_1)^* z_\gamma a_2$$

dla wszystkich $a_1, a_2 \in A$. W takim razie odwzorowanie $A_\gamma \ni z_\gamma a \mapsto f(\gamma)a \in A_\gamma$ rozszerza się do bijektywnej izometrii działającej na A_γ którą oznaczamy symbolem $\mathrm{Phase}(\gamma)$. Korzystając ze Stwierdzenia 0.1 z pracy **[19]** widzimy, że $\mathrm{Phase}(\gamma)$ jest unitarnym elementem $\mathrm{M}(A_\gamma)$.

□

Udowodnimy jeszcze jeden użyteczny

Lemat 3. *Niech A będzie C^*-algebrą oraz $T \,\eta\, A$. Niech $\mathcal{D}$ będzie podzbiorem gęstym w A. Wtedy $(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{D}$ jest dziedziną istotną dla T.*

Dowód. Niech $x \in \mathrm{D}(T)$. Połóżmy $y = (1+T^*T)^{\frac{1}{2}}x$. Istnieje ciąg $y_i \in \mathcal{D}$ zbieżny do y. W takim razie $(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}y_i$ zbiega do x oraz $T(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}y_i = z_T y_i$ zbiega do $z_T y = Tx$. □

Wniosek 1. Niech A będzie C^*-algebrą oraz $T \,\eta\, A$. Niech $\mathcal{D}$ będzie podzbiorem gęstym w A. Wtedy $(1+T^*T)^{-1}\mathcal{D}$ jest dziedziną istotną dla T.

Dowód. Zauważmy, że jeśli $\mathcal{D}$ jest zbiorem gęstym w A to $(1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{D}$ jest również zbiorem gęstym. Stosując Lemat 3 do zbioru $\mathcal{D}' = (1+T^*T)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{D}$ dostajemy nasz wniosek.

□

Kolejnym pojęciem używanym w tej pracy jest C^*-*algebra generowana przez zbiór elementów stowarzyszonych.* Zostało ono wprowadzone przez S.L. Woronowicza w pracy **[17]**.

Definicja 2. Niech $T_1, T_2, \ldots, T_N$ będą elementami stowarzyszonymi z C^*-algebrą A. Mówimy, że A jest generowana przez $T_1, T_2, \ldots, T_N$ jeśli dla każdej przestrzeni Hilberta H, C^*-algebry B działającej na H w sposób niezdegenerowany oraz reprezentacji $\pi \in \mathrm{Rep}(A;H)$ mamy

$$\left(\begin{array}{c} \pi(T_i)\,\eta\, B \text{ dla wszystkich} \\ i = 1,2\ldots,N \end{array} \right) \Rightarrow \left(\pi \in \mathrm{Mor(A;B)} \right)$$

Ciąg elementów stowarzyszonych $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ jest elementem stowarzyszonym z C^*-algebrą $\mathbb{C}^n \otimes A$. Nasuwa to następujące uogólnienie powyższej definicji:

Definicja 3. Niech A i C będą C^*-algebrami oraz T będzie elementem stowarzyszonym z $C \otimes A$. Mówimy, że A jest generowana przez T jeśli dla każdej przestrzeni Hilberta H, każdej C^*-algebry B działającej na H w niezdegenerowany sposób oraz każdej reprezentacji $\pi \in \mathrm{Rep}(A;H)$ mamy

$$\left(((\mathrm{id} \otimes \pi)T)\,\eta\, C \otimes B \right) \Rightarrow \left(\pi \in \mathrm{Mor(A;B)} \right)$$

Twierdzenie 4.2 z pracy **[17]** daje kryterium pozwalające odpowiedzieć na pytanie kiedy element $T \,\eta\, C \otimes A$ generuje C^*-algebrę A.

Twierdzenie 3. *Niech A, C będą* C^**-algebrami oraz T będzie elementem stowarzyszonym z $C \otimes A$. Załóżmy że:*

I. *T rozdziela reprezentacje co oznacza, że jeśli $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Rep}(A; H)$ są różnymi reprezentacjami to $(\mathrm{id} \otimes \varphi_1)(T) \neq (\mathrm{id} \otimes \varphi_2)(T)$.*

II. *Istnieje* C^**-algebra F oraz element $r \in \mathrm{M}(F \otimes A)$ spełniające następujące dwa warunki:*

1. Dla każdej przestrzeni Hilberta H, C^**-algebry B działającej na H w niezdegenerowany sposób oraz $\pi \in \mathrm{Rep}(A; H)$ mamy*

$$\Big(((\mathrm{id} \otimes \pi)T)\ \eta\ C \otimes B \Big) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} (\mathrm{id} \otimes \pi)r \in \mathrm{M}(F \otimes B) \\ \textit{oraz } [(\mathrm{id} \otimes \pi)r](F \otimes B) \\ \textit{jest gęsty w } F \otimes B. \end{array} \right)$$

2. Istnieje niezerowy funkcjonał ω na F taki że $(\omega \otimes \mathrm{id})(r(f \otimes I)) \in A$ dla wszystkich $f \in F$.

Wtedy A jest generowane przez T.

Używając powyższego twierdzenia można podać następujące kryterium na to kiedy elementy stowarzyszone $T_1, T_2, \ldots, T_N$ generują C^*-algebrę:

Twierdzenie 4. *Niech $T_1, T_2 \ldots, T_n$ będą elementami stowarzyszonymi z* C^**-algebrą A. Podzbiór $\mathrm{M}(A)$ złożony z elementów postaci $(1 + T_i^* T_i)^{-1}$, $(1 + T_i T_i^*)^{-1}$, $\exp(-T_i^* T_i)$, $\exp(-T_i T_i^*)$ będzie oznaczany przez Ω. Załóżmy że:*

I. *$T_1, T_2 \ldots, T_n$ rozdzielają reprezentacje: jeśli $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Rep}(A; H)$ są różnymi reprezentacjami, wtedy istnieje $i \in 1, \ldots, N$ takie, że: $(\mathrm{id} \otimes \varphi_1)(T_i) \neq (\mathrm{id} \otimes \varphi_2)(T_i)$.*

II. *Istnieją elementy $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \Omega$ takie, że iloczyn $r_1 r_2 \ldots r_k \in A$.*

Wtedy A jest generowana przez $T_1, T_2, \ldots, T_N$.

3. Grupy Kwantowe.

Lokalnie zwarte grupy kwantowe są skomplikowanymi obiektami matematycznymi. Jeden z eleganckich sposobów ich opisu bazuje na operatorze multyplikatywnym unitarnym. Podejście to zostało zapoczątkowane przez Baaj'a i Skandalis'a w pracy [**1**]. Lepiej pasującą do opisu lokalnie zwartych grup kwantowych wersję teorii operatorów multyplikatywnych unitarnych podał S.L. Woronowicz w pracy [**18**]. Poniższe twierdzenia i definicje, w większości pochodzą właśnie z niej.

Definicja 4. Niech H będzie przestrzenią Hilberta, W będzie unitarnym operatorem działającym na $H \otimes H$. Mówimy, że W jest operatorem multyplikatywnym unitarnym jeśli spełnia on równanie pentagonalne:

$$W_{23} W_{12} = W_{12} W_{13} W_{23}.$$

Definicja 5. Niech H będzie przestrzenią Hilberta, $W \in \mathrm{B}(H \otimes H)$ będzie operatorem multyplikatywnym unitarnym. Mówimy, że W jest poręczny jeśli istnieje samosprzężony, dodatni operator Q działający na H oraz unitarny operator $\widetilde{W}$ działający na $\overline{H} \otimes H$ taki, że $\ker Q = \{0\}$, $W(Q \otimes Q)W^* = Q \otimes Q$ oraz

$$(x \otimes u|W|z \otimes y) = (\bar{z} \otimes Q(u)|\widetilde{W}|\bar{x} \otimes Q^{-1}(y))$$

dla wszystkich $x, z \in H$, $y \in D(Q^{-1})$ i $u \in D(Q)$.

Twierdzenie 5. *Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta, $W \in \mathrm{B}(H \otimes H)$ będzie poręcznym multyplikatywnym unitarnym operatorem. Niech*

$$A = \overline{\{(\omega \otimes id)W : \omega \in \mathrm{B}(H)_*\}}^{\|\cdot\|},$$

$$\hat{A} = \overline{\{(id \otimes \omega)(W^*) : \omega \in \mathrm{B}(H)_*\}}^{\|\cdot\|}.$$

Wtedy

1. *A oraz $\hat{A}$ są ośrodkowymi C^*-algebrami działającym na H w niezdegenerowany sposób.*
2. *$W \in M(\hat{A} \otimes A)$.*
3. *Istnieje dokładnie jeden morfizm $\Delta \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}; \mathrm{A} \otimes \mathrm{A})$ taki, że*

   $$(id \otimes \Delta)W = W_{12}W_{13}.$$

   Δ jest kołączny: $(id \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes id)\Delta$. Ponadto $\{\Delta(a)(I \otimes b) : a, b \in A \otimes A\}$ oraz $\{(a \otimes I)\Delta(b) : a, b \in A \otimes A\}$ są liniowo gęstymi podzbiorami w $A \otimes A$.
4. *Istnieje dokładnie jeden domknięty operator κ działający na przestrzeni Banach A, taki że $\{(\omega \otimes id)W : \omega \in \mathrm{B}(H)_*\}$ jest istotną dziedziną κ oraz*

   $$\kappa\big((\omega \otimes id)W\big) = (\omega \otimes id)(W^*)$$

   dla każdego $\omega \in \mathrm{B}(H)_*$. Dziedzina $D(\kappa)$ jest podalgebrą A oraz κ jest antimultiplikatywne: $\kappa(ab) = \kappa(b)\kappa(a)$ dla wszystkich $a, b \in D(\kappa)$. Obraz $\kappa(D(\kappa))$ pokrywa się z $D(\kappa)^*$ oraz $\kappa(\kappa(a)^*)^* = a$ dla wszystkich $a \in D(\kappa)$.

   Operator κ posiada rozkład biegunowy:

   $$\kappa = R \circ \tau_{\frac{i}{2}}$$

   gdzie $\tau_{\frac{i}{2}}$ jest analitycznym generatorem jednoparametrowej grupy $(\tau_t)_{t \in \mathbb{R}}$ automorfizmów C^*-algebry A oraz R jest inwolutywnym antyautomorfizmem komutującym z automorfizmami τ_t dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. W szczególności $D(\kappa) = D(\tau_{\frac{i}{2}})$. R oraz τ_t są jednoznacznie wyznaczone przez κ.
5. *Niech $\widetilde{W}$ oraz Q będą operatorami z Definicji 5. Wtedy dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz $a \in A$ mamy:*

   $$\tau_t(a) = Q^{2it} a Q^{-2it}.$$

   Ponadto, używając notacji eksponencjalnej dla R, spełnione jest równanie

   $$W^{T \otimes R} = \widetilde{W}^*.$$

Definicja 6. Niech H będzie przestrzenią Hilberta, A będzie C^*-algebrą działającą na H w niezdegenerowany sposób oraz $\Delta \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}; \mathrm{A} \otimes \mathrm{A})$ będzie kołącznym morfizmem.

Para (A, Δ) będzie nazywana grupą kwantową, jeśli istnieje poręczny, multyplikatywny unitarny operator $W \in \mathrm{B}(H \otimes H)$ taki, że

$$A = \overline{\{(\omega \otimes \mathrm{id})W : \omega \in \mathrm{B}(H)_*\}}^{\|\cdot\|},$$
$$\Delta(a) = W(a \otimes I)W^*.$$

Następujące Twierdzenie (punkt 6 Twierdzenia 1.6, **[18]**) będzie użyteczne w dalszej części pracy:

Twierdzenie 6. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, $W \in \mathrm{B}(H \otimes H)$ będzie poręcznym multyplikatywnym unitarnym operatorem, $\hat{A}, A$ będą grupami kwantowymi danymi przez W (patrz Twierdzenie 5). Niech H' będzie przestrzenią Hilberta, $\pi \in \mathrm{Rep}(\hat{A}; H')$ będzie reprezentacją C^*-algebry $\hat{A}$ na H' oraz $D \in \mathrm{B}(H')$ będzie ośrodkową C^*-algebrą działającą w niezdegenerowany sposób na H'. Wtedy*

$$\Big((\pi \otimes \mathrm{id})W \in \mathrm{M}(D \otimes A)\Big) \Rightarrow \Big(\pi \in \mathrm{Mor}(\hat{\mathrm{A}}; \mathrm{D})\Big).$$

Powyższe Twierdzenie jest równoważne temu, że element $\Sigma W^* \Sigma \in \mathrm{M}(A \otimes \hat{A})$ generuje C^*-algebrę $\hat{A}$.

ROZDZIAŁ 3

Grupa Heisenberga.

W niniejszym rozdziale zbierzemy informacje dotyczące grupy Heisenberga. Będą one potrzebne przy konstrukcji Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza. Zacznijmy od ogólnych wiadomości na temat reprezentacji grup Liego w C^*-algebrach.

1. Reprezentacje grup Liego w C^*-algebrach.

Podane poniżej fakty, pochodzą w większości z rozdziału drugiego pracy [**10**].

Niech G będzie grupą Liego oraz A będzie C^*-algebrą. Mówimy, że odwzorowanie $u : G \mapsto \mathrm{M}(A)$ jest unitarną reprezentacją grupy G jeśli:

1. $u(g)$ jest elementem unitarnym dla wszystkich $g \in G$.
2. $u(g_1 g_2) = u(g_1)u(g_2)$ dla wszystkich $g_1, g_2 \in G$.
3. Dla wszystkich $a \in A$, odwzorowanie $G \ni g \mapsto u(g)a \in A$ jest ciągłe w normie.

Uwaga 1. Niech $\mathrm{C}^*(G)$ będzie C^*-algebrą grupową grupy G. Wiadomo, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między unitarnymi reprezentacjami G w algebrze A a morfizmami $\mathrm{Mor}(\mathrm{C}^*(\mathrm{G}); \mathrm{A})$. Niech π będzie morfizmem: $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}^*(\mathrm{G}); \mathrm{A})$. Konstrukcja unitarnej reprezentacji u_π polega na obcięciu morfizmu π do grupy G, która jest zanurzona w $\mathrm{M}(\mathrm{C}^*(G))$: $u_\pi(g) = \pi(g)$. Ponadto dla każdej reprezentacji unitarnej u grupy G na C^*-algebrze A istnieje dokładnie jeden morfizm $\pi_u \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}^*(\mathrm{G}); \mathrm{A})$ taki, że $\pi_u(g) = u(g)$.

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego grupy G oraz $\mathcal{E}$ będzie algebrą obwiednią. Z definicji, $\mathfrak{g}$ jest zbiorem prawo-niezmienniczych pól wektorowych. Podobnie $\mathcal{E}$ jest zbiorem prawo-niezmienniczych operatorów różniczkowych. Na $\mathcal{E}$ istnieje antyliniowa, antymultyplikatywna operacja inwolucji: $\mathcal{E} \ni M \mapsto M^+ \in \mathcal{E}$ taka że $X^+ = -X$ dla wszystkich $X \in \mathfrak{g}$.

Niech u będzie reprezentcją unitarną grupy Liego G na C^*-algebrze A. Mówimy, że $a \in A$ jest elementem gładkim jeśli odwzorowanie $G \ni g \mapsto u(g)a \in A$ jest gładkie. Zbiór elementów gładkich oznaczamy symbolem $\mathrm{D}^\infty(u)$. Dla $M \in \mathcal{E}$ definiujemy operator $du(M)$ działający na $\mathrm{D}^\infty(u)$ wzorem:

$$du(M)a = Mu(g)a\Big|_{g=e}.$$

Można pokazać, że $du(M)$ jest operator domykalnym. Od tej pory przez $du(M)$ będziemy rozumieli odpowiednie domknięcie. Powstaje pytanie: kiedy $du(M)$ jest elementem stowarzyszonym z A? Warunek wystarczający opisuje Twierdzenie 2.1 z pracy [**10**]:

Twierdzenie 7. *Niech u będzie unitarną reprezentacją grupy G na C^*-algebrze A i niech $M \in \mathcal{E}$. Załóżmy, że jedynym gładkim, ograniczonym rozwiązaniem równania* *różniczkowego* $M^+Mf = -f$ *jest funkcja tożsamościowo równa zeru. Wtedy* $du(M)\ \eta\ A$, $du(M^+)\ \eta\ A$ *oraz* $du(M)^* = du(M^+)$.

Innym kryterium rozstrzygającym problem stowarzyszenia jest następujące:

Twierdzenie 8. *Niech u będzie unitarną reprezentacją grupy G w C^*-algebrze A. Ustalmy $M \in \mathcal{E}$ oraz załóżmy, że zbiór $(1 + du(M^+)du(M))\,\mathrm{D}^\infty(u)$ jest gęsty w A. Wtedy $du(M), du(M^+)\ \eta\ A$ oraz $du(M)^* = du(M^+)$.*

Dowód. Dowód jest zastosowaniem Stwierdzenia 1 gdzie $T = du(M)$ oraz $T^+ = du(M^+)$. □

Uwaga 2. Łatwo jest pokazać, że elementy algebry Liego $\mathfrak{g}$ spełniają założenia Twierdzenia 7. Niech X_i będzie bazą algebry Liego $\mathfrak{g}$. Operator Nelsona $\Delta = \sum_{i=1}^n X_i^+ X_i \in \mathcal{E}$ także spełnia założenia Twierdzenia 8.

2. Grupa Heisenberga i jej algebra Liego.

Niech $\mathbb{H}$ będzie grupą Heisenberga. Jest to grupa Liego z rozmaitością grupową postaci $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ oraz mnożeniem:

$$(z,t)(z',t') = (z + z', t + t' + \mathrm{Im}(z\bar{z}')).$$

Algebra Liego $\mathfrak{h}$ grupy Heisenberga $\mathbb{H}$ jest rzeczywistą przestrzenią wektorową rozpiętą przez trzy elementy X, Y, Z spełniające następujące relacje komutacyjne

$$[X,Y] = Z \quad [X,Z] = [Y,Z] = 0.$$

Elementy X, Y, Z są polami wektorowymi danymi przez prawostronne różniczkowania zadane przez jednoparametrowe podgrupy Γ_X, Γ_Y, Γ_Z odpowiednio, gdzie

$$\begin{aligned}\Gamma_X &= \{(t,0) : t \in \mathbb{R}\}\\ \Gamma_Y &= \{(-it,0) : t \in \mathbb{R}\}\\ \Gamma_Z &= \{(0,2t) : t \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Można sprawdzić, że $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial t}$, $Y = -\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial t}$, $Z = 2\frac{\partial}{\partial t}$.

Wprowadźmy pola wektorowe $a = X + iY \in \mathcal{E}$ oraz $\lambda = 2iZ \in \mathcal{E}$. Zauważmy, że λ jest elementem samosprzężonym algebry obwiedniej: $\lambda^+ = \lambda$ oraz spełniony jest następujący związek komutacyjny: $[\,a, a^+] = \lambda$.

Niech f będzie funkcją ciągła na $\mathbb{H}$. Symbolem $R_{(z,t)}$ będziemy oznaczać operator prawego przesunięcia funkcji:

$$R_{(z,t)}f(z',t') = f\left((z',t')(z,t)\right).$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy że, $af = 2\frac{\partial}{\partial z}R_{(z,0)}f|_{z=0}$ dla każdej funkcji gładkiej f. Podobnie, dla C^*-algebry A, reprezentacji grupy Heisenberga u na A oraz elementu gładkiego $x \in \mathrm{D}^\infty(u)$ mamy:

$$du(a)x = 2\frac{\partial}{\partial z}u(z,0)x\big|_{z=0}. \tag{12}$$

3. Algebra Grupowa Grupy Heisenberga.

Niech $\mathrm{C}^*(\mathbb{H})$ będzie algebrą grupową grupy Heisenberga oraz U będzie kanoniczną reprezentacją grupy $\mathbb{H}$ w algebrze grupowej: $\mathbb{H} \ni (z,t) \mapsto U(z,t) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$. Reprezentacja dU jest wierna, co pozwala utożsamiać element $T \in \mathcal{E}$ z operatorem $dU(T)$. Korzystając z Uwagi 2 widzimy, że $\lambda \in \mathcal{E}$ jest stowarzyszony z C*-algebrą $\mathrm{C}^*(\mathbb{H})$. Zauważmy że :

$$U(z+z',0) = U(z,0)U(z',0)\exp\left(\frac{\lambda}{4}\mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right). \tag{13}$$

Dalej pokażemy, że także $a \in \mathcal{E}$ jest stowarzyszony z $\mathrm{C}^*(\mathbb{H})$. Powołując się na Twierdzenie 8 widzimy, iż w tym celu wystarczy wykazać, że podzbiór

$$(1 + a^+a)\,\mathrm{D}^\infty(U) \subset \mathrm{C}^*(H) \tag{14}$$

jest gęsty. Dowód powyższego zawierania poprzedzimy konstrukcją półgrupy operatorów $\exp(-ta^+a) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$. Rozpocznijmy od wprowadzenia kilku pomocniczych obiektów. Dla $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ połóżmy

$$h_t(z,x) = \frac{x\exp tx}{4\sinh tx}\exp\left(-\frac{|z|^2 x\coth tx}{4}\right) \in \mathbb{R}_+. \tag{15}$$

Wzór ten definiuje jednoparametrową rodzinę ciągłych funkcji $h_t \in \mathrm{C}(\mathbb{C}\times\mathbb{R})$.

Lemat 4. *Niech h_t będzie rodziną funkcji rozważaną powyżej. Wtedy:*

1. *Dla ustalonych $x \in \mathbb{R}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ funkcja $h_t(\cdot\,,x) : \mathbb{C} \ni z \mapsto h_t(z,x) \in \mathbb{R}_+$ jest całkowalna oraz*
$$\|h_t(\cdot\,,x)\|_1 = \frac{\exp tx}{\cosh tx}.$$
2. *Ustalmy $z \in \mathbb{C}$ oraz $x \in \mathbb{R}$. Odwzorowanie $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto h_t(z,x) \in \mathbb{R}_+$ jest różniczkowalne oraz*
$$\frac{\partial}{\partial t}h_t(z,x) = \left(\frac{|z|^2x^2}{4\sinh^2(tx)} + x(1-\coth(tx))\right)h_t(z,x). \tag{16}$$
3. *Niech $t,t' \in \mathbb{R}_+$ oraz $t \in \left[\frac{t'}{2}, t'\right]$. Wtedy*
$$\|h_t(\cdot\,,x) - h_{t'}(\cdot\,,x)\|_1 \leq 4\frac{t'}{t^2}\left(1+\frac{t'}{t}\right)(t'-t) \tag{17}$$
dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
4. *Dla ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$ mamy*
$$\lim_{x\to x'}\|h_t(\cdot\,,x) - h_t(\cdot\,,x')\|_1 = 0$$
5. $\lim_{t\to 0} h_t(z,x) = \delta(z)$ *gdzie δ jest deltą Diraca.*

Dowód. Punkty 1,2 i 5 sprowadzają się do wykonania bezpośredniego rachunku. Zajmijmy się punktem 3 dla $x \geq 0$ (przypadek $x < 0$ dowodzimy analogicznie.) Korzystając z punktu 2 oraz z Twierdzenia Lagrange'a widzimy, że

$$|h_t(z,x) - h_{t'}(z,x)| \leq (t'-t) \sup_{t'' \in [t,t']} \left| \left(\frac{|z|^2 x^2}{4 \sinh^2(t''x)} + x(1 - \coth(t''x)) \right) h_{t''}(z,x) \right|.$$

Łatwo zobaczyć, że

$$\begin{aligned} &\sup_{t'' \in [t,t']} \left| \left(\frac{|z|^2 x^2}{4 \sinh^2(t''x)} + x(1 - \coth(t''x)) \right) h_{t''}(z,x) \right| \\ &\qquad \leq \left(\frac{|z|^2 x^2}{4 \sinh^2(tx)} + x(\coth(tx) - 1) \right) \frac{x \exp(t'x)}{4 \sinh(tx)} \exp\left(- \frac{|z|^2 x \coth t'x}{4} \right). \end{aligned}$$

Scałkowanie powyższej nierówności ze względu na zmienną z daje

$$\begin{aligned} &\|h_t(\cdot\,,x) - h_{t'}(\cdot\,,x)\|_1 \\ &\qquad \leq \left(\frac{x \exp(-tx)}{\sinh(tx)} \frac{\exp(t'x)}{\sinh(tx)\coth(t'x)} + \frac{x}{\sinh(tx)} \frac{\exp(t'x)}{\sinh^2(tx)\coth^2(t'x)} \right)(t'-t) \\ &\qquad \leq 4 \left(\frac{t'}{t^2} + \frac{t'^2}{t^3} \right)(t'-t) \end{aligned}$$

jeśli tylko $\frac{t'}{2} \leq t \leq t'$. Punkt 4 wynika z Twierdzenia Lebesgeua o zbieżności zmajoryzowanej. $\square$

Uwaga 3. W ostatnim kroku powyższego oszacowania wykorzystaliśmy następujące nierówności:

$$\frac{x}{\sinh tx} \leq \frac{1}{t}, \quad \frac{\sinh(t'x)}{\sinh(tx)} \leq \frac{t'}{t} \exp(t'-t)x, \quad \frac{\exp(t'x)}{\cosh(t'x)} \leq 2$$

z których wynikają poniższe oszacowania:

$$\frac{x \exp(-tx)}{\sinh(tx)} \frac{\exp(t'x)}{\sinh(tx)\coth(t'x)} \leq 2 \frac{t'}{t^2} \exp((t'-2t)x))$$

$$\frac{x}{\sinh(tx)} \frac{\exp(t'x)}{\sinh^2(tx)\coth^2(t'x)} \leq 4 \frac{t'^2}{t^3} \exp((t'-2t)x).$$

Korzystając z założenia $t' - 2t \leq 0$ oraz $x \geq 0$ dostajemy tezę punktu 3 naszego Lematu.

Dla $x \in \mathbb{R}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ położmy

$$\widetilde{H}_t(x) = \int_{\mathbb{C}} dz h_t\left(z, \frac{1}{2}x\right) U(z,0) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H})). \tag{18}$$

Z Lematu 4 wynika, że powyższa całka istnieje w sensie topologii strict na $\mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$ oraz $\widetilde{H}_t$ ma następujące własności :

1. $\|\widetilde{H}_t(x)\| \leq 2$.

2. Dla ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$, odwzorowanie $\mathbb{R} \ni x \mapsto \widetilde{H}_t(x) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$ jest ciągłe w normie.
3. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $\lim_{t\to 0} \widetilde{H}_t(x) = 1$ w sensie topologii strict na $\mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$.
4. Dla $t \in \left[\frac{t'}{2}, t'\right] \in \mathbb{R}_+$ mamy

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|\widetilde{H}_t(x) - \widetilde{H}_{t'}(x)\| \leq 4\frac{t'}{t^2}\left(1 + \frac{t'}{t}\right)(t' - t).$$

Z punktu 1 i 2 wynika, że odwzorowanie $\widetilde{H}_t : \mathbb{R} \ni x \mapsto \widetilde{H}_t(x) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$ jest ciągłe w normie i ograniczone. W takim razie jest ono elementem C^*-algebry $\mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$. Z punktu 4 widzimy, że odwzorowanie $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \widetilde{H}_t \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$ jest ciągłe w normie. Natomiast punkt 3 pokazuje, że $\lim_{t\to 0} \widetilde{H}_t = 1$ w sensie topologii strict na $\mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$.

Przejdźmy do konstrukcji półgrupy $\exp(-ta^+a) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$. Formalnie sprowadza się ona do zastąpienia zmiennej rzeczywistej x we wzorze (18) przez element samosprzężony $\lambda \,\eta\, \mathbb{H}$. Jednakże wiąże się to z pewnymi technicznymi problemami dotyczącymi zbieżności całek. Poniżej opiszemy elegancki sposób ich pokonania.

Operator $\lambda \,\eta\, \mathrm{C}^*(\mathbb{H})$ jest elementem centralnym, tzn. $f(\lambda) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$ komutuje ze wszystkimi elementami $\mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$ dla wszystkich $f \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{R})$. W takim razie odwzorowanie

$$\mathrm{C}_\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{C}^*(\mathbb{H}) \ni f \otimes x \mapsto f(\lambda)x \in \mathrm{C}^*(\mathbb{H})$$

rozszerza się do morfizmu $\pi_\lambda \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{C}^*(\mathbb{H}); \mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$. Dla liczby dodatniej $t \in \mathbb{R}_+$ połóżmy

$$H_t = \pi_\lambda(\widetilde{H}_t) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H})). \tag{19}$$

Niech $f \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{R})$ będzie funkcją ciągłą o zwartym nośniku oraz $y' \in \mathrm{C}^*(\mathbb{H})$. Wtedy dla $y = f(\lambda)y'$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$, odwzorowanie $\mathbb{C} \ni z \mapsto h_t\left(z, \frac{1}{2}\lambda\right) U(z,0)y \in \mathrm{C}^*(\mathbb{H})$ jest całkowalne w sensie normowym. Faktycznie

$$\begin{aligned}\left\|h_t\left(z, \frac{1}{2}\lambda\right) U(z,0)f(\lambda)y'\right\| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f(2x)\frac{x\exp tx}{4\sinh tx}\exp\left(-\frac{|z|^2 x\coth tx}{4}\right)\right| \|y'\| \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f(2x)\frac{x\exp tx}{4\sinh tx}\right| \exp\left(-\frac{|z|^2 \inf_{x\in\mathbb{R}} |x\coth tx|}{4}\right) \|y'\|.\end{aligned}$$

Zauważając, że $\inf_{x\in\mathbb{R}} |x\coth tx| > 0$ oraz $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f(2x)\frac{x\exp tx}{4\sinh tx}\right| < \infty$ dostajemy całkowalność. Łatwo sprawdzić, że

$$H_t y = \int_{\mathbb{C}} dz h_t\left(z, \frac{1}{2}\lambda\right) U(z,0)y. \tag{20}$$

Lemat 5. *Niech* $\mathbb{H}$ *będzie grupą Heisenberga,* $H_t \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$ *będzie rodziną elementów zdefiniowanych powyżej. Wtedy* H_t *jest normowo ciągłą półgrupą kontrakcji oraz* $\lim_{t\to 0} H_t = 1$ *w sensie topologii strict na* $\mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$.

Dowód. Niech $y = f(\lambda)y'$ gdzie $f \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{R})$ jest funkcją o zwartym nośniku oraz $y' \in \mathrm{C}^*(\mathbb{H})$. Pokażemy, że odwzorowanie $\mathbb{R} \ni t \mapsto H_t \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H})$ jest półgrupą operatorów. Korzystając z formuły (20) liczymy

$$\begin{aligned}
H_{t_1}H_{t_2}y &= \int_{\mathbb{C}^2} dzdz' h_{t_1}\left(z, \frac{1}{2}\lambda\right) h_{t_2}\left(z', \frac{1}{2}\lambda\right) U(z,0)U(z',0)y \\
&= \int_{\mathbb{C}^2} dzdz' h_{t_1}\left(z, \frac{1}{2}\lambda\right) h_{t_2}\left(z', \frac{1}{2}\lambda\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right) U(z+z',0)y \\
&= \int_{\mathbb{C}} dz \left(\int_{\mathbb{C}} dz' h_{t_1}\left(z-z', \frac{1}{2}\lambda\right) h_{t_2}\left(z', \frac{1}{2}\lambda\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right)\right) U(z,0)y.
\end{aligned}$$

Tożsamości dla funkcji hiperbolicznych oraz własności funkcji Gaussa dają:

$$\int_{\mathbb{C}} dz' h_{t_1}\left(z-z', \frac{1}{2}\lambda\right) h_{t_2}\left(z', \frac{1}{2}\lambda\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right) = h_{t_1+t_2}\left(z, \frac{1}{2}\lambda\right).$$

W takim razie

$$H_{t_1}H_{t_2}y = \int_{\mathbb{C}} dz h_{t_1+t_2}\left(z, \frac{1}{2}\lambda\right) U(z,0)y = H_{t_1+t_2}y,$$

co pokazuje, że $H_{t_1+t_2} = H_{t_1}H_{t_2}$. Reszta własności półgrupy operatorów H_t wynika łatwo z własności operatorów $\widetilde{H}_t \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$ udowodnionych w Lemacie 4. □

Pokażemy teraz, że generatorem półgrupy H_t jest $-a^+a$.

Lemat 6. *Niech U będzie kanoniczną reprezentacją grupy Heisenberga w $\mathrm{C}^*(\mathbb{H})$, $H_t \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$ będzie półgrupą operatorów wprowadzoną powyżej, $f \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{R})$ będzie funkcją ciągłą o zwartym nośniku oraz $y' \in \mathrm{D}^\infty(U)$. Połóżmy $y = f(\lambda)y'$. Wtedy*

1. *Odwzorowanie $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto H_t y \in \mathrm{C}^*(\mathbb{H})$ jest różniczkowalne.*
2. *$H_t y \in \mathrm{D}^\infty(U)$.*
3. *$\frac{d}{dt}H_t y = -a^+aH_t y = -H_t(a^+ay)$*

Dowód. Z Lematu 4 wynika, że

$$\frac{d}{dt}H_t y = \int_{\mathbb{C}} dz \left(\frac{|z|^2\lambda^2}{16\sinh^2\left(\frac{t\lambda}{2}\right)} + \frac{\lambda}{2}\left(1 - \coth\left(\frac{t\lambda}{2}\right)\right)\right) h_t\left(z, \frac{1}{2}\lambda\right) U(z,0)y, \tag{21}$$

co dowodzi punkt 1 naszego lematu. Przejdźmy do punktu 2. Rozważmy odwzorowanie

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto U(z,0)H_t y \in \mathrm{C}^*(\mathbb{H}).$$

Zauważmy, że:

$$U(z,0)H_t y = \int_{\mathbb{C}} dz' h_t\left(z', \frac{1}{2}\lambda\right) U(z,0)U(z',0)y.$$

Korzystając z relacji (13) dostajemy

$$U(z,0)H_t y = \int_{\mathbb{C}} dz' h_t\left(z', \frac{1}{2}\lambda\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right) U(z+z',0)y.$$

Zamiana zmiennych $z' \mapsto z' - z$ prowadzi do formuły

$$U(z,0)H_t y = \int_{\mathbb{C}} dz' h_t\left(z'-z, \frac{1}{2}\lambda\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right) U(z',0)y.$$

Przypomnijmy, że dla $x \in \mathrm{D}^\infty(U)$ mamy $ax = 2\frac{\partial}{\partial z}U(z,0)x|_{z=0}$. Stąd

$$aH_t y = \int_{\mathbb{C}} dz' 2\frac{\partial}{\partial z}\left(h_t\left(z'-z, \frac{1}{2}\lambda\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right)\right)\Big|_{z=0} U(z',0)y.$$

Korzystając z (15) dostajemy

$$2\frac{\partial}{\partial z}\left(h_t\left(z'-z, \frac{1}{2}\lambda\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right)\right)\Big|_{z=0} = \frac{\lambda}{4}\left(\coth\left(\frac{t\lambda}{2}\right)-1\right)\bar{z}' h_t\left(z', \frac{1}{2}\lambda\right),$$

co pokazuje, że:

$$aH_t y = \frac{\lambda}{4}\left(\coth\left(\frac{t\lambda}{2}\right)-1\right)\int_{\mathbb{C}} dz' \bar{z}' h_t\left(z', \frac{1}{2}\lambda\right) U(z',0)y.$$

Równość $a^+x = -2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}U(z,0)x$ dla wszystkich $x \in \mathrm{D}^\infty(U)$ daje

$$\begin{aligned} a^+aH_t y = {} & \frac{\lambda}{4}\left(\coth\left(\frac{t\lambda}{2}\right)-1\right) \\ & \times \int_{\mathbb{C}} dz'\, 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left((\bar{z}'-\bar{z})h_t\left(z', \frac{1}{2}\lambda\right) \exp\left(-\frac{\lambda}{4}\mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right)\right)\Big|_{z=0} U(z',0)y. \end{aligned}$$

Różniczkując po $\bar{z}$ dostajemy

$$a^+aH_t y = \int_{\mathbb{C}} dz \left(-\frac{|z|^2\lambda^2}{16\sinh^2\left(\frac{t\lambda}{2}\right)} - \frac{\lambda}{2}\left(1-\coth\left(\frac{t\lambda}{2}\right)\right)\right) h_t\left(z, \frac{1}{2}\lambda\right) U(z,0)y.$$

Porównując powyższe wyrażenie z równaniem (21) widzimy, że

$$\frac{d}{dt}H_t y = -a^+aH_t y.$$

□

Z Lematu 5 wynika że odwzorowanie $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \exp(-t)H_t \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$ jest ciągłe w normie oraz całkowalne. Połóżmy $\Xi = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-t)H_t \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$.

Lemat 7. *Niech U będzie kanoniczną reprezentacją grupy Heisenberga w algebrze grupowej $\mathrm{C}^*(\mathbb{H})$ oraz $\Xi \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}))$ będzie elementem zdefiniowanym powyżej. Wtedy dla wszystkich $y \in \mathrm{D}^\infty(U)$ mamy $\Xi y \in \mathrm{D}^\infty(U)$ oraz*

$$(1+a^+a)\Xi y = y. \tag{22}$$

W szczególności zbiór $(1+a^+a)\,\mathrm{D}^\infty(U)$ jest gęsty w $\mathrm{C}^*(\mathbb{H})$ oraz $a \,\eta\, \mathrm{C}^*(\mathbb{H})$.

Dowód. Korzystając z punktu 3 Lematu 6 widzimy że

$$a^+ a\Xi y = -\int_{\mathbb{R}_+} \exp(-t)\frac{d}{dt}H_t y.$$

Całkowanie przez części daje

$$a^+ a\Xi y = y - \Xi y,$$

co dowodzi (22). Dowód drugiej części powyższego twierdzenia wynika z Twierdzenia 8. □

Na koniec tego rozdziału, udowodnimy użyteczne w dalszej części pracy

Stwierdzenie 2. *Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta oraz (a_1, λ_1) i (a_2, λ_2) będzie parą reprezentacji algebry Liego $\mathfrak{h}$ grupy Heisenberga na H całkowalnych do komutujących reprezentacji grupy Heisenberga. Wtedy operatory $a_1 + a_2$ oraz $\lambda_1 + \lambda_2$ są domykalne oraz $(a_1 \dot{+} a_2, \lambda_1 \dot{+} \lambda_2)$ jest całkowalną reprezentacją algebry Liego $\mathfrak{h}$. Ponadto jeśli $\lambda_1 = -\lambda_2$ oraz $\ker\lambda_1 = \{0\}$ to $a_1 \dot{+} a_2$ jest operatorem normalnym oraz $\ker(a_1 \dot{+} a_2) = \{0\}$.*

Dowód. Niech U^{a_1}, U^{a_2} będzie parą komutującymi reprezentacjami grupy Heisenberga prowadzących do reprezentacji (a_1, λ_1) oraz (a_2, λ_2). Dla $(z, t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$ połóżmy $U^{a_3}(z,t) = U^{a_1}(z,t)U^{a_2}(z,t) \in \mathrm{B}(H)$. Łatwo pokazać, że odwzorowanie

$$\mathbb{C}\times\mathbb{R} \ni (z,t) \mapsto U^{a_3}(z,t) \in \mathrm{B}(H)$$

jest reprezentacją grupy Heisenberga. Niech (a_3, λ_3) będą generatorami infinitezymalnymi tej reprezentacji. Z definicji reprezentacji U^{a_3} wynika, że $\lambda_1 \dot{+} \lambda_2 = \lambda_3$ oraz $a_1 \dot{+} a_2 \subset a_3$. Wykażemy, że także inkluzja przeciwna $a_3 \subset a_1 \dot{+} a_2$ jest prawdziwa. Zauważmy, że zbiór $\mathrm{D}(a_1)\cap\mathrm{D}(a_2)\cap\mathrm{D}(\lambda_1)\cap\mathrm{D}(\lambda_2)$ jest gęsty w H. Faktycznie, zbiór

$$(1 + a_1^* a_1)^{-1}(1 + a_2^* a_2)^{-1}(1 + \lambda_1^*\lambda_1)^{-1}(1 + \lambda_2^*\lambda_2)^{-1}H$$

jest podzbiorem $\mathrm{D}(a_1)\cap\mathrm{D}(a_2)\cap\mathrm{D}(\lambda_1)\cap\mathrm{D}(\lambda_2)$ gęstym w H. Z Wniosku 1 wynika, że $(1 + a_3^* a_3)^{-1}\left(\mathrm{D}(a_1)\cap\mathrm{D}(a_2)\cap\mathrm{D}(\lambda_1)\cap\mathrm{D}(\lambda_2)\right)$ jest istotną dziedziną dla a_3. W takim razie inkluzja $a_3 \subset a_1 \dot{+} a_2$ będzie dowiedziona jeśli pokażemy, że

$$(1 + a_3^* a_3)^{-1}\left(\mathrm{D}(a_1)\cap\mathrm{D}(a_2)\cap\mathrm{D}(\lambda_1)\cap\mathrm{D}(\lambda_2)\right) \subset \mathrm{D}(a_1)\cap\mathrm{D}(a_2). \tag{23}$$

Przypomnijmy, że $(1 + a_3^* a_3)^{-1} = \int_{\mathbb{R}_+} dt \exp(-t) H_t^{a_3}$ gdzie

$$H_t^{a_3} x = \int_{\mathbb{C}} dz h_t\left(z, \frac{1}{2}\lambda_3\right) U^{a_3}(z,0)x.$$

W takim razie

$$\begin{aligned} U^{a_1}(z,0)(1 + a_3^* a_3)^{-1}x = &\int_{\mathbb{R}_+} dt \exp(-t) \\ &\times \int_{\mathbb{C}} dz' h_t\left(z', \frac{1}{2}\lambda_3\right) \exp\left(\frac{\lambda_1}{2}\mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right) U^{a_3}(z',0)U^{a_1}(z,0)x. \end{aligned}$$

Pamiętając, że $a_1 y = 2\frac{\partial}{\partial z} U^{a_1}(z,0)z\Big|_{z=0}$ widzimy, że $(1+a_3^* a_3)^{-1}x \in \mathrm{D}(a_1)$ oraz

$$\begin{aligned} a_1(1+a_3^*a_3)^{-1}x &= (1+a_3^*a_3)^{-1}a_1 x \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+} dt \exp(-t) \int_{\mathbb{C}} dz' \bar{z}' h_t \left(z', \frac{1}{2}\lambda_3\right) \exp\left(\frac{\lambda_1}{2} \mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right) U^{a_3}(z',0) \frac{\lambda_1}{2} x. \end{aligned}$$

Podobnie pokazujemy, że $(1+a_3^*a_3)^{-1}x \in \mathrm{D}(a_2)$ co dowodzi (23).

Przejdźmy do dowodu drugiej części twierdzenia. Załóżmy, że $\lambda_1 = -\lambda_2$. Wtedy $\lambda_3 = 0$ więc $a_1 \dotplus a_2$ jest operatorem normalnym. Podobnie, operator

$$n \equiv \lambda_1^{-1}(a_1 - a_2)$$

jest normalny (gdzie przy jego definicji skorzystaliśmy z tego,że λ_1 jest odwracalny). Można sprawdzić, że unitarne operatory $\exp(i\mathrm{Im}(zn))$ implementują przesunięcia operatora $a_1 \dotplus a_2$:

$$\exp(i\mathrm{Im}(zn))(a_1 \dotplus a_2) \exp(-i\mathrm{Im}(zn)) = a_1 \dotplus a_2 - \bar{z}.$$

Jeśli $a_1 \dotplus a_2$ miałoby w spektrum zerową wartość własną, to z powyższego wzoru, wszystkie liczby zespolone byłyby wartościami własnymi tego operatora. Jednakże dla ośrodkowej przestrzeni Hilberta jest to niemożliwe, gdyż wektory własne operatorów normalnych są ortogonalne. W takim razie $\ker(a_1 \dotplus a_2) = \{0\}$. $\square$

ROZDZIAŁ 4

Deformacja Rieffela.

Deformacja Rieffela jest narzędziem służącym do konstrukcji kwantowych przestrzeni w tym kwantowych grup. Nasze podejście do tego zagadnienia różni się od podejścia Rieffela. Bazuje ono na teorii Landstada iloczynów krzyżowych i pozwala wprowadzić odpowiednie C^*-algebry bez użycia tzw. całek oscylacyjnych, które było głównym narzędziem używanym przez Rieffela.

1. Teoria Landstada iloczynów krzyżowych przez grupy abelowe.

W niniejszym rozdziale zaprezentujemy teorię Landstada iloczynów krzyżowych C^*-algebr przez lokalnie zwarte grupy abelowe. Szczegółowe ujęcie tematu można znaleźć w [**11**]. Zacznijmy od następującej definicji.

Definicja 7. Niech Γ będzie lokalnie zwartą grupą abelową, B będzie C^*-algebrą. Przypuśćmy, że mamy dany morfizm λ z grupy Γ w grupę unitarnych mnożników $\mathrm{M}(B)$ ciągły w topologii strict oraz działanie $\hat{\rho}$ grupy dualnej $\hat{\Gamma}$ na C^*-algebrze B. Jeśli spełniony jest warunek:

$$\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(\lambda_\gamma) = \langle\hat{\gamma}, \gamma\rangle\lambda_\gamma$$

to trójkę $(B, \lambda, \hat{\rho})$ nazywamy Γ-produktem.

Korzystając z Uwagi 1 widzimy, że unitarna reprezentacja $\lambda : \Gamma \to \mathrm{M}(B)$ indukuje morfizm $\lambda \in \mathrm{Mor}\big(C^*(\Gamma); \mathrm{B}\big)$. Pokażemy, że λ jest injektywne. Używając transformaty Fouriera możemy utożsamić algebrę grupową $C^*(\Gamma)$ z algebrą funkcji na grupie dualnej $C_\infty(\hat{\Gamma})$. Prowadzi to do morfizmu $\lambda \in \mathrm{Mor}\big(C_\infty(\hat{\Gamma}); \mathrm{B}\big)$. Dla $\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}$ oraz $f \in C_\infty(\hat{\Gamma})$ połóżmy $\tau_{\hat{\gamma}}(f)(\hat{\gamma}') = f(\hat{\gamma}' + \hat{\gamma})$. Formuła ta definiuje grupę automorfizmów $\tau_{\hat{\gamma}} \in \mathrm{Aut}(C_\infty(\hat{\Gamma}))$. Morfizm λ splata automorfizmy $\hat{\rho}$ i τ:

$$\lambda(\tau_{\hat{\gamma}}(f)) = \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(\lambda(f)) \text{ dla wszysktich } f \in C_\infty(\hat{\Gamma}). \tag{24}$$

Równanie (24) wystarczy sprawdzić na charakterach $u_\gamma \in \mathrm{M}\big(C_\infty(\hat{\Gamma})\big)$ zadanych przez elementy $\gamma \in \Gamma$:

$$u_\gamma(\hat{\gamma}') = \langle\gamma, \hat{\gamma}'\rangle \text{ dla wszystkich } \hat{\gamma}' \in \hat{\Gamma}.$$

Zauważmy, że

$$\tau_{\hat{\gamma}}(u_\gamma)(\hat{\gamma}') = u_\gamma(\hat{\gamma} + \hat{\gamma}') = \langle\gamma, \hat{\gamma} + \hat{\gamma}'\rangle = \langle\gamma, \hat{\gamma}\rangle u_\gamma(\hat{\gamma}').$$

W takim razie

$$\tau_{\hat{\gamma}}(u_\gamma) = \langle\gamma, \hat{\gamma}\rangle u_\gamma. \tag{25}$$

Z drugiej strony $\lambda(u_\gamma) = \lambda_\gamma \in \mathrm{M}(B)$ oraz

$$\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}\big(\lambda(u_\gamma)\big) = \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(\lambda_\gamma) = \langle \gamma, \hat{\gamma} \rangle \lambda(u_\gamma). \tag{26}$$

Równania (25),(26) dają (24).

Własność splatania reprezentacji $\hat{\rho}$ i τ przez λ pokazuje, że $\ker \lambda \subset \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})$ jest niezmiennicze na przesunięcia. Ponadto $\ker \lambda$ jest ideałem w $\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})$ więc jest ono zawarte w pewnym nietrywialnym ideale maksymalnym. W takim razie istnieje element $\hat{\gamma}_0 \in \hat{\Gamma}$ taki, że jeśli $\lambda(f) = 0$ to $f(\hat{\gamma}_0) = 0$. Dzięki niezmienniczości $\ker \lambda$ na przesunięcia dostajemy $f(\hat{\gamma}) = 0$ dla każdego $\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}$ więc $f = 0$. Stąd $\ker \lambda = \{0\}$ czyli morfizm λ zanurza $\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})$ w algebrę mnożników $\mathrm{M}(B)$. W dalszej części pracy będziemy zazwyczaj traktować $\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})$ jak podalgebrę $\mathrm{M}(B)$.

Definicja 8. Niech $(B, \lambda, \hat{\rho})$ będzie Γ-produktem oraz $x \in \mathrm{M}(B)$ będzie elementem algebry mnożników. Mówimy, że $x \in \mathrm{M}(B)$ spełnia warunki Landstada jeśli

$$\begin{cases} (i) & \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(x) = x \text{ dla wszystkich } \hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}, \\ (ii) & \text{Odwzorowanie } \gamma \mapsto \lambda_\gamma x \lambda_\gamma^* \text{ jest normowo ciągłe,} \\ (iii) & fxg \in B \text{ dla } f, g \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}). \end{cases} \tag{27}$$

Symbolem A będzie oznaczać zbiór elementów spełniających powyższe warunki.

W konkretnych rachunkach wygodnie jest żozsmarowaćżeprezentację $\lambda_\gamma \in \mathrm{M}(B)$ przy pomocy funkcji $h \in L^1(\Gamma)$: $\lambda_h = \int_\Gamma h(\gamma)\lambda_\gamma d\gamma \in \mathrm{M}(B)$. Zauważmy, że $\lambda_h \in \mathrm{M}(B)$ pokrywa się z transformatą Fouriera $\mathfrak{F}(h) \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}) \subset \mathrm{M}(B)$.

Pokażemy, że nasza definicja jest równoważna definicji Landstada, w której trzeci warunek miał następującą postać:

$$\lambda_f x, \ \ x\lambda_f \in B \text{ dla wszystkich } f, g \in L^1(\Gamma). \tag{28}$$

Poniższy argument jest wersją rozumowania z pracy **[13]**. Warunek (iii) z (27) jest słabszy niż oryginalny warunek Landstada. Jednak wraz z pozostałymi dwoma implikuje on (28). Rzeczywiście, niech $x \in \mathrm{M}(B)$ spełnia warunki Landstada (27). Ustalmy $\varepsilon \geq 0$. Korzystając z warunku (ii) (27), możemy znaleźć otoczenie $\mathcal{O}$ elementu neutralnego $e \in \Gamma$ takie, że

$$\|\lambda_\gamma x - x\lambda_\gamma\| \leq \varepsilon \text{ dla wszystkich } \gamma \in \mathcal{O}.$$

Niech $\chi_{\mathcal{O}}$ oznacza znormalizowaną funkcję charakterystyczną zbioru $\mathcal{O}$:

$$\chi_{\mathcal{O}}(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{vol\mathcal{O}} & \text{jeśli } \gamma \in \mathcal{O} \\ 0 & \text{jeśli } \gamma \in \Gamma \setminus \mathcal{O} \end{cases}$$

Wtedy $\|\lambda_{\chi_{\mathcal{O}}} x - x\lambda_{\chi_{\mathcal{O}}}\| \leq \varepsilon$. Biorąc mniejsze otoczenie jeśli to konieczne, możemy założyć, że $\|\lambda_f \lambda_{\chi_{\mathcal{O}}} - \lambda_f\| \leq \varepsilon$. Poniższy rachunek

$$\lambda_f x = \lambda_f x - \lambda_f \lambda_{\chi_{\mathcal{O}}} x + \lambda_f \lambda_{\chi_{\mathcal{O}}} x = (\lambda_f x - \lambda_f \lambda_{\chi_{\mathcal{O}}} x) + (\lambda_f \lambda_{\chi_{\mathcal{O}}} x - \lambda_f x \lambda_{\chi_{\mathcal{O}}}) + \lambda_f x \lambda_{\chi_{\mathcal{O}}}$$

pokazuje, że $\|\lambda_f x - \lambda_f x \lambda_{\chi_{\mathcal{O}}}\| \leq \varepsilon(\|x\| + \|\lambda_f\|)$. Czyli $\lambda_f x$ możemy przybliżyć elementami postaci $\lambda_f x \lambda_{\chi_{\mathcal{O}}} \in B$. W takim razie $\lambda_f x \in B$. Symetryczny argument pokazuje że $x\lambda_f \in B$.

Można sprawdzić, że elementy $A \subset \mathrm{M}(B)$ tworzą C*-algebrę oraz formuła

$$A \ni a \mapsto \rho_\gamma(a) = \lambda_\gamma a \lambda_\gamma^* \in A$$

zadaje ciągłe działanie grupy Γ na A. C*-algebra A będzie nazywana algebrą Landstada. Okazuje się że włożenie A w $\mathrm{M}(B)$ jest morfizmem C*-algebr. W takim razie algebra mnożników $\mathrm{M}(A)$ zanurza się w $\mathrm{M}(B)$. Warunki Landstada dla mnożników $M(A)$ mają postać:

$$\left(x \in \mathrm{M}(A) \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ll} (i) & \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(x) = x \text{ dla wszystkich } \hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}; \\ (ii) & \text{Dla wszystkich } a \in A, \text{ odwzorowanie} \\ & \gamma \mapsto \lambda_\gamma x \lambda_\gamma^* a \text{ jest ciągłe w normie.} \end{array} \right) \tag{29}$$

Zauważmy, że pierwszy i drugi warunek (27) implikuje warunki (29).

Przykłady Γ-produktów pojawiają się przez konstrukcję iloczynu krzyżowego. Niech A będzie C*-algebrą oraz $\rho : \Gamma \ni \gamma \mapsto \rho_\gamma \in \mathrm{Aut}(A)$ będzie ciągłym działaniem grupy Γ na A. Iloczyn krzyżowy $A \rtimes_\rho \Gamma$ ma następujące własności:

- Istnieją morfizmy $\iota_A \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}, \mathrm{A} \rtimes_\rho \Gamma)$ oraz $\lambda \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}), \mathrm{A} \rtimes_\rho \Gamma)$ takie, że

$$\overline{\iota_A(A)\lambda(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}))}^{\|\cdot\|} = \overline{\lambda(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}))\iota_A(A)}^{\|\cdot\|} = A \rtimes_\rho \Gamma.$$

- Istnieje działanie grupy dualnej $\hat{\rho}$ na $A \rtimes_\rho \Gamma$ takie, że

$$\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(a) = a \text{ dla każdego } a \in A,$$

$$\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(\lambda(x)) = \lambda(\tau_{\hat{\gamma}}(x)) \text{ dla każdego } x \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}),$$

  gdzie $\tau_{\hat{\gamma}} \in \mathrm{Aut}(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}))$ jest automorfizmem przesunięcia o element $\hat{\gamma}$.

Jak opisaliśmy w Uwadze 1 morfizm λ pochodzi od reprezentacji grupy Γ w $A \rtimes_\rho \Gamma$, którą także będziemy oznaczali symbolem λ. Łatwo sprawdzić, że trójka $(A \rtimes_\rho \Gamma, \lambda, \hat{\rho})$ jest Γ-produktem.

Niech $(B, \lambda, \hat{\rho})$ będzie Γ-produktem, (A, ρ) będzie algebrą Landstada z działaniem ρ grupy Γ implementowanym przez λ. Okazuje się, że Γ-produkt $(B, \lambda, \hat{\rho})$ jest izomorficzny ze standardowym Γ-produktem na iloczynie krzyżowym $A \rtimes_\rho \Gamma$. Mówiąc precyzyjnie można udowodnić następujące

Twierdzenie 9. *Trójka $(B, \lambda, \hat{\rho})$ jest Γ-produktem wtedy i tylko wtedy gdy istnieje* C*-*system dynamiczny (A, Γ, ρ) taki, że $B = A \rtimes_\rho \Gamma$. System ten jest jedyny z dokładnością do współzmienniczego izomorfizmu. Algebra A jest algebrą Landstada Γ-produktu $(B, \lambda, \hat{\rho})$ a ρ dane jest wzorem $\rho_\gamma(a) = \lambda_\gamma a \lambda_\gamma^*$.*

Uwaga 4. Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w **[11]**. Głównym problemem jest pokazanie istnienia dostatecznie wielu elementów spełniających warunki Landstada. Rozwiązanie dane jest przez całkowanie działania $\hat{\rho}$ po grupie dualnej. Mówimy, że element $x \in \mathrm{M}(B)_+$ jest $\hat{\rho}$-całkowalny jeśli istnieje element $y \in \mathrm{M}(B)_+$ taki, że

$$\omega(y) = \int \omega(\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(x)) d\hat{\gamma}$$

dla wszystkich $\omega \in \mathrm{M}(B)^*$. Element y oznaczany będzie przez $\mathfrak{E}(x)$. Podobnie, dowolny element $x \in \mathrm{M}(B)$ nazywamy $\hat{\rho}$-całkowalnym, jeśli jest on kombinacją liniową dodatnich, $\hat{\rho}$-całkowalnych elementów. Zbiór elementów $\hat{\rho}$-całkowalnych będziemy oznaczać symbolem $D(\mathfrak{E})$. Odwzorowanie uśredniania rozszerzamy przez liniowość do $D(\mathfrak{E})$:

$$\mathfrak{E} : D(\mathfrak{E}) \to \mathrm{M}(B).$$

Dla dużej klasy elementów $x \in D(\mathfrak{E})$, $\mathfrak{E}(x)$ jest elementem algebry Landstada A. Jest tak dla elementów postaci $f_1 b f_2$ gdzie $b \in B$ oraz $f_1, f_2 \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}) \cap L^2(\hat{\Gamma})$. Ponadto, odwzorowanie

$$B \ni b \mapsto \mathfrak{E}(f_1 b f_2) \in \mathrm{M}(B) \tag{30}$$

jest ciągłe i mamy następujące oszacowanie norm:

$$\|\mathfrak{E}(f_1 b f_2)\| \leq \|f_1\|_2 \|b\| \|f_2\|_2 \tag{31}$$

gdzie $\|\cdot\|_2$ jest normą L^2. Udowodnimy teraz następującą równość

$$\left\{\mathfrak{E}(f_1 b f_2) : \ b \in B, \ f_1, f_2 \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}) \cap L^2(\hat{\Gamma})\right\}^{\mathrm{cls}} = A. \tag{32}$$

Niech $a \in A$ oraz f_1, f_2, f_3, f_4 będą ciągłymi funkcjami o zwartych nośnikach na Γ. Rozważmy element $x = \lambda_{f_1}\lambda_{f_2} a \lambda_{f_3}\lambda_{f_4}$. Zauważmy, że

$$x = \mathfrak{F}(f_1)\mathfrak{F}(f_2) a \mathfrak{F}(f_3)\mathfrak{F}(f_4) \text{ oraz } \mathfrak{F}(f_1), \ldots, \mathfrak{F}(f_4) \in L^2(\hat{\Gamma}).$$

Korzystając z (30) widzimy, że $x \in D(\mathfrak{E})$. Liczymy:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}(x) &= \int \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(\lambda_{f_1}\lambda_{f_2} a \lambda_{f_3}\lambda_{f_4}) d\hat{\gamma} \\
&= \int d\hat{\gamma} \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}\Big(\int d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 d\gamma_4 f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2) \lambda_{\gamma_1+\gamma_2} a \lambda_{\gamma_3+\gamma_4} f_3(\gamma_3) f_4(\gamma_4)\Big) \\
&= \int d\hat{\gamma} \int d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 d\gamma_4 \langle \hat{\gamma}, \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4\rangle f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2) \lambda_{\gamma_1+\gamma_2} a \lambda_{\gamma_3+\gamma_4} f_3(\gamma_3) f_4(\gamma_4).
\end{aligned}$$

Z własności transformaty Fouriera dostajemy:

$$\mathfrak{E}(x) = \int d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 \rho_{\gamma_1+\gamma_2}(a) f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2) f_3(\gamma_3) f_4(-\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3).$$

Jeśli teraz f_1, f_2, f_3 dążą do delty Diraca oraz $f_4(0) = 1$ to $\mathfrak{E}(\lambda_{f_1}\lambda_{f_2} a \lambda_{f_3}\lambda_{f_4})$ dąży do a w normie. Dowodzi to (32).

Poniższy lemat będzie użyteczny w dalszej części pracy:

Lemat 8. *Niech $(B, \lambda, \hat{\rho})$ będzie Γ-produktem oraz $\mathcal{V} \subset A$ będzie ρ-niezmienniczym podzbiorem algebry Landstada takim, że $(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})\mathcal{V}\,\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}))^{\mathrm{cls}} = B$. Wtedy $\mathcal{V}^{\mathrm{cls}} = A$.*

Dowód. Dowód powyższego lematu jest podobny do dowodu formuły (32). Niech f_1, f_2, f_3, f_4 będą ciągłymi funkcjami na Γ o zwartych nośnikach. Z (32) wynika, że

$$\{\mathfrak{E}(\lambda_{f_1}(\lambda_{f_2} v \lambda_{f_3})\lambda_{f_4}) : v \in \mathcal{V}\}^{\mathrm{cls}} = A. \tag{33}$$

Prosty rachunek pokazuje, że

$$\mathfrak{E}(\lambda_{f_1}(\lambda_{f_2} v \lambda_{f_3})\lambda_{f_4}) = \int d\gamma_1 d\gamma_2 d\gamma_3 \rho_{\gamma_1+\gamma_2}(v) f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2) f_3(\gamma_3) f_4(-\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3).$$

Funkcja podcałkowa

$$\Gamma^3 \ni (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) \mapsto \rho_{\gamma_1+\gamma_2}(v) f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2) f_3(\gamma_3) f_4(-\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3) \in \mathcal{V}$$

jest normowo ciągła i ma zwarty nośnik, więc

$$\mathfrak{E}(\lambda_{f_1}(\lambda_{f_2} v \lambda_{f_3})\lambda_{f_4}) \in \mathcal{V}^{\mathrm{cls}}.$$

W takim razie, z równania (33) dostajemy $\mathcal{V}^{\mathrm{cls}} = A$. □

Pokażemy teraz, że morfizmy Γ-produktów zachowujące wszystkie struktury indukują morfizmy algebr Landstada.

Stwierdzenie 3. *Niech $(B,\lambda,\hat{\rho})$ oraz $(B',\lambda',\hat{\rho}')$ będą Γ-produktami z algebrami Landstada A, A'. Załóżmy, że $\pi \in \mathrm{Mor(B,B')}$ jest morfizmem o następujących własnościach*

- $\pi(\lambda_\gamma) = \lambda'_\gamma$
- $\pi\big(\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(b)\big) = \hat{\rho}'_{\hat{\gamma}}\big(\pi(b)\big)$.

Wtedy $\pi(A) \subset \mathrm{M}(A')$. Ponadto $\pi|_A \in \mathrm{Mor(A,A')}$. Jeśli $\pi(B) \subset B'$ to $\pi(A) \subset A'$. Jeśli $\pi(B) = B$ to $\pi(A) = A'$.

Dowód. Pokażemy najpierw, że $\pi(A) \subset \mathrm{M}(A')$.
Niech $a \in A$. Wtedy

$$\hat{\rho}'_{\hat{\gamma}}(\pi(a)) = \pi(\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(a)) = \pi(a).$$

W takim razie $\pi(a)$ jest $\hat{\rho}'$-niezmiennicze. Odwzorowanie

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto \lambda'_\gamma \pi(a) \lambda'^*_\gamma = \pi(\lambda_\gamma a \lambda^*_\gamma) \in \mathrm{M}(A')$$

jest ciągłe w normie więc $\pi(a)$ spełnia pierwszy i drugi warunek Landstada (27), co pokazuje, że $\pi(a) \in \mathrm{M}(A')$.

Wykażemy teraz, że zbiór $\pi(A)A'$ jest gęsty w A'. Wiemy, że zbiór $\pi(B)B'$ jest gęsty w B'. W takim razie $\pi(\mathrm{C}^*(\Gamma)A)A'\,\mathrm{C}^*(\Gamma) = \mathrm{C}^*(\Gamma)\pi(A)A'\,\mathrm{C}^*(\Gamma)$ jest liniowo gęstym podzbiorem B'. Ponadto

$$\lambda'_\gamma \pi(a) a' \lambda'^*_\gamma = \pi(\lambda_\gamma a \lambda^*_\gamma)\lambda'_\gamma a' \lambda'^*_\gamma,$$

więc zbiór $\pi(A)A'$ jest zamknięty na działanie ρ. W takim razie zbiór $\pi(A)A'$ spełnia założenia Lematu 8 więc jest on gęsty w A'.

Jak do tej pory udowodniliśmy, że $\pi|_A \in \mathrm{Mor(A,A')}$. Załóżmy teraz, że $\pi(B) \subset B'$. Niech $a \in A$ spełnia warunki Landstada (27). Wtedy, jak pokazaliśmy na początku dowodu, $\pi(a)$ spełnia pierwszy i drugi warunek Landstada (27). Ponadto

$$f\pi(a)g = \pi(fag) \in B' \text{ dla wszystkich } f,g \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}).$$

W takim razie $\pi(A)$ spełnia również trzeci warunek Landstada co pokazuje, że $\pi(a) \in A'$.
Jeśli $\pi(B) = B'$ to równość

$$\mathfrak{E}(f_1\pi(b)f_2) = \pi(\mathfrak{E}(f_1 b f_2)) \tag{34}$$

oraz własność (32) pokazują że $\pi(A) = A'$.

Aby udowodnić (34) weźmy $\omega \in \mathrm{M}(B')^*$. Wtedy

$$\begin{aligned}\omega(\pi(\mathfrak{E}(f_1 b f_2))) &= \omega \circ \pi(\mathfrak{E}(f_1 b f_2))) \\ &= \int d\hat{\gamma}\omega(\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(f_1\pi(b)f_2)) \\ &= \omega(\int d\hat{\gamma}\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(f_1\pi(b)f_2)) = \omega(\mathfrak{E}(f_1\pi(b)f_2)).\end{aligned}$$

Więc $\pi(\mathfrak{E}(f_1 b f_2)) = \mathfrak{E}(f_1\pi(b)f_2)$. □

Niech $(B, \lambda, \hat{\rho})$, $(B', \lambda', \hat{\rho}')$ będą Γ-produktami oraz $\pi \in \mathrm{Mor(B;B')}$ będzie surjektywnym morfizmem spaltającym $\hat{\rho}$ z $\hat{\rho}'$ takim, że $\pi(\lambda_\gamma) = \lambda'_\gamma$. Morfizm π prowadzi do ciągu dokładnego C*-algebr:

$$0 \to \ker\pi \to B \xrightarrow{\pi} B' \to 0,$$

oraz do kanonicznego morfizmu $\alpha \in \mathrm{Mor(B;ker}\pi)$ związanego z włożeniem ideału (patrz Przykład 1). Jądro $\ker\pi$ jest niezmiennicze na działanie $\hat{\rho}$ oraz trójka $(\ker\pi, \alpha\circ\lambda, \hat{\rho}|_{\ker\pi})$ jest Γ-produktem.

Stwierdzenie 4. *Niech $(B, \lambda, \hat{\rho})$, $(B', \lambda', \hat{\rho}')$ będą Γ-produktami z algebrami Landstada A, A', $\pi \in \mathrm{Mor(B, B')}$ będzie surjektywnym morfizmem splatającym $\hat{\rho}$ z $\hat{\rho}'$ takim, że $\pi(\lambda_\gamma) = \lambda'_\gamma$. Niech $\bar{\pi} \in \mathrm{Mor(A;A')}$ będzie indukowanym przez π morfizmem algebr Landstada oraz niech $\alpha \in \mathrm{Mor(B;ker}\pi)$ będzie kanonicznym morfizmem związanym z włożeniem ideału* $\mathrm{ker}\pi$ *w algebrę B.*

Trójka $(\mathrm{ker}\pi, \alpha\circ\lambda, \hat{\rho}|_{\ker\pi})$ *jest Γ-produktem. Niech $J \subset \mathrm{M(ker}\pi)$ będzie jej algebrą Landstada. Istnieje ciąg dokładny*

$$0 \to J \to A \xrightarrow{\bar{\pi}} A' \to 0.$$

Ciąg ten jest Γ-współzmienniczy.

Dowód. Istnienie surjektywnego morfizmu $\bar{\pi} \in \mathrm{Mor(A;A')}$ wynika z poprzedniego stwierdzenia. Aby wykazać istnienie powyższego ciągu dokładnego pokażemy, że morfizm $\alpha \in \mathrm{Mor(B;ker}\pi)$ utożsamia $\ker\bar{\pi} \subset \mathrm{M}(B)$ z $J \subset \mathrm{M}(\ker\pi)$.

Niech więc $x \in \ker\bar{\pi}$ oraz $\alpha(x) = 0$. Element x spełnia warunki Landstada, w szczególności $xf \in B$ dla wszystkich $f \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})$. Stąd $xf \in \ker\pi$ oraz $\alpha(xf) = 0$ Jednakże α w obcięciu do $\ker\pi$ jest identycznością a więc $xf = 0$ skąd $x = 0$. Dostajemy więc injektywność α na $\ker\bar{\pi}$.

Surjektywność dostajemy ze wzoru $\alpha\mathfrak{E}(b) = \mathfrak{E}(\alpha(b))$ dla wszystkich $b \in \mathrm{D}(\mathfrak{E})$ oraz z równania (32). □

2. Deformacja C^*-algebry z działaniem grupy abelowej oraz 2-kocyklem na grupie dualnej.

W poprzednim rozdziale omówiliśmy pojęcie Γ-produktu. W tym, pokażemy jak deformując Γ-produkty otrzymywać deformacje ich algebr Landstada. Niech więc $(B, \lambda, \hat{\rho})$ będzie Γ-produktem.

Ciągłą funkcję $\Psi : \hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma} \to \mathbb{T}^1$ nazywamy 2-kocyklem jeśli spełnia ona następujące równanie:

$$\Psi(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_3)\Psi(\hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3) = \Psi(\hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3)\Psi(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2).$$

Dla $\hat{\gamma}, \hat{\gamma}_1$ połóżmy $\Psi_{\hat{\gamma}}(\hat{\gamma}_1) = \Psi(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma})$. Prowadzi to do rodziny funkcji ciągłych $\Psi_{\hat{\gamma}} : \hat{\Gamma} \mapsto \mathbb{T}^1$. Używając włożenia $\lambda \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}); \mathrm{B})$ otrzymujemy rodzinę elementów unitarnych $U_{\hat{\gamma}} = \lambda(\Psi_{\hat{\gamma}}) \in \mathrm{M}(B)$. Warunek 2-kocyklu daje następujący warunek na $U_{\hat{\gamma}}$:

$$U_{\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2} = \overline{\Psi(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)} U_{\hat{\gamma}_1} \hat{\rho}_{\hat{\gamma}_1}(U_{\hat{\gamma}_2}). \tag{35}$$

Twierdzenie 10. *Niech $(B, \lambda, \hat{\rho})$ będzie Γ-produktem oraz Ψ będzie 2-kocyklem na $\hat{\Gamma}$. Odwzorowanie*

$$\hat{\rho}^\Psi_{\hat{\gamma}} : B \ni b \mapsto \hat{\rho}^\Psi_{\hat{\gamma}}(b) = U^*_{\hat{\gamma}} \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(b) U_{\hat{\gamma}} \in B$$

jest automorfizmem C^*-algebry B dla wszystkich $\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}$. Ponadto

$$\hat{\rho}^\Psi : \hat{\Gamma} \ni \hat{\gamma} \mapsto \hat{\rho}^\Psi_{\hat{\gamma}} \in \mathrm{Aut(B)}$$

jest mocno ciągłym działaniem grupy $\hat{\Gamma}$ na B oraz trójka $(B, \lambda_\gamma, \hat{\rho}^\Psi)$ jest Γ-produktem.

Dowód. Z równania (35) wynika, że

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}^\Psi_{\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2}(b) &= U^*_{\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2} \hat{\rho}_{\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2}(b) U_{\hat{\gamma}_1+\hat{\gamma}_2} \\
&= \overline{\Psi(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)} U^*_{\hat{\gamma}_1} \hat{\rho}_{\gamma_1}(U_{\hat{\gamma}_2})^* \hat{\rho}_{\hat{\gamma}_1}(\hat{\rho}_{\hat{\gamma}_2}(b)) \hat{\rho}_{\gamma_1}(U_{\hat{\gamma}_2}) U_{\hat{\gamma}_1} \Psi(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) \\
&= U^*_{\hat{\gamma}_1} \hat{\rho}_{\gamma_1}(U^*_{\hat{\gamma}_2} \hat{\rho}_{\hat{\gamma}_2}(b) U_{\hat{\gamma}_2}) U_{\hat{\gamma}_1} = \hat{\rho}^\Psi_{\hat{\gamma}_1}(\hat{\rho}^\Psi_{\hat{\gamma}_2}(b)).
\end{aligned}$$

Widzimy więc, że $\hat{\rho}^\Psi$ jest działaniem $\hat{\Gamma}$ na B.

Przyłóżmy $\hat{\rho}^\Psi$ do λ_γ :

$$\hat{\rho}^\Psi_{\hat{\gamma}}(\lambda_\gamma) = U^*_{\hat{\gamma}} \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(\lambda_\gamma) U_{\hat{\gamma}} = \langle \hat{\gamma}, \gamma \rangle U^*_{\hat{\gamma}} \lambda_\gamma U_{\hat{\gamma}} = \langle \hat{\gamma}, \gamma \rangle \lambda_\gamma.$$

Ostatnie równanie wynika z przemienności Γ. W takim razie, $(B, \lambda_\gamma, \hat{\rho}^\Psi)$ jest Γ-produktem. □

Korzystając z powyższego twierdzenia możemy opisać procedurę Deformacji Rieffela. Danymi potrzebnymi do deformacji C^*-algebry jest trójka (A, ρ, Ψ) składająca się z C^*-algebry A, działania ρ lokalnie zwartej abelowej grupy Γ oraz 2-kocyklu Ψ na $\hat{\Gamma}$. Zdeformowana C^*-algebra będzie oznaczana przez A^Ψ. Takie trójki będziemy nazywać danymi Rieffela. Deformację przeprowadzamy w trzech krokach.

(1) Konstruujemy iloczyn krzyżowy $B = A \rtimes_\rho \Gamma$. Niech $(B, \lambda, \hat{\rho})$ będzie standardową strukturą Γ-produktu na iloczynie krzyżowym.

(2) Korzystając z Twierdzenia 10 wprowadzamy zdeformowaną strukturę Γ-produktu $\left(B, \lambda, \hat{\rho}^{\Psi}\right)$.
(3) Algebra A^{Ψ} jest algebrą Landstada Γ-produktu $\left(B, \lambda, \hat{\rho}^{\Psi}\right)$.

Niech $x \in A^{\Psi}$. Zauważmy, że formuła

$$\rho_{\gamma}^{\Psi}(x) = \lambda_{\gamma} x \lambda_{\gamma}^{*}. \tag{36}$$

definiuje działanie ρ^{Ψ} grupy Γ na A^{Ψ}. Co ciekawe to nie formuła definiująca działanie się zmienia lecz, jedynie dziedzina na której to działanie jest zdefiniowane. Trójka $(A^{\Psi}, \Gamma, \rho^{\Psi})$ będzie nazywana *skręconym systemem dynamicznym.* Z Twierdzenia 9 łatwo wynika

Stwierdzenie 5. *Niech trójka (A, ρ, Ψ) będzie danymi Rieffela, $(A^{\Psi}, \Gamma, \rho^{\Psi})$ będzie skręconym systemem dynamicznym. Wtedy*

$$A \rtimes_{\rho} \Gamma = A^{\Psi} \rtimes_{\rho^{\Psi}} \Gamma.$$

Powyższe stwierdzenie implikuje dwa ciekawe wnioski.

Wniosek 2. Niech trójka (A, ρ, Ψ) będzie danymi Rieffela prowadzącymi do C*-algebry A^{Ψ}. Zdeformowana C*-algebra A^{Ψ} jest nuklearna wtedy i tylko wtedy gdy A jest nuklearna.

Dowód powyższego wniosku wynika ze Stwierdzenia 5 oraz z następującego, dobrze znanego

Twierdzenie 11. *Niech A będzie* C**-algebrą z działaniem ρ grupy abelowej Γ. A jest nuklearną* C**-algebrą wtedy i tylko wtedy gdy $A \rtimes_{\rho} \Gamma$ jest nuklearna.*

Drugi wniosek opisuje zachowanie sie $\mathcal{K}$-grup w przypadku $\Gamma = \mathbb{R}^n$.

Wniosek 3. Niech ρ będzie działaniem grupy $\mathbb{R}^n$ na algebrze A, trójka (A, ρ, Ψ) będzie danymi Rieffela oraz A^{Ψ} będzie algebrą Landstada zdeformowanego $\mathbb{R}^n$-produktu. Wtedy $\mathcal{K}_i(A) = \mathcal{K}_i(A^{\Psi})$.

Do dowodu powyższego wniosku użyjemy następującego Twierdzenia:

Twierdzenie 12. *Niech A będzie* C**-algebrą z działaniem ρ grupy $\mathbb{R}^n$. Wtedy*

$$\mathcal{K}_i(A) = \mathcal{K}_{i+1}(A \rtimes_{\rho} \mathbb{R}^n).$$

Powyższa równość $\mathcal{K}$-grup jest nazywana izomorfizmem Connesa-Thoma. Dowód został podany w pracy [**4**]. Połączenia izomorfizmu Connesa-Thoma ze Stwierdzeniem 5 daje poniższy ciąg równości:

$$\mathcal{K}_i(A) = \mathcal{K}_{i+1}(A \rtimes_{\rho} \mathbb{R}^n) = \mathcal{K}_{i+1}(A^{\Psi} \rtimes_{\rho^{\Psi}} \mathbb{R}^n) = \mathcal{K}(A^{\Psi}),$$

który pokazuje prawdziwość Wniosku 3.

3. Morfizmy, reprezentacje i ciągi dokładne skręconych algebr Landstada.

Niech (B, λ, ρ) będzie Γ-produktem, Ψ będzie 2-kocyklem na grupie dualnej $\hat{\Gamma}$, H będzie przestrzenią Hilberta oraz $\pi \in \mathrm{Rep}(B; H)$ będzie reprezentacją. Rozszerza się ona do algebry mnożników $M(B)$. W szczególności możemy ją ograniczyć do algebry A oraz A^{Ψ}.

Twierdzenie 13. *Niech (B, λ, ρ) będzie Γ-produktem, Ψ będzie 2-kocyklem na grupie dualnej $\hat{\Gamma}$ oraz $\pi \in \mathrm{Rep}(B; H)$. Reprezentacja π jest różnowartościowa na algebrze A wtedy i tylko wtedy gdy jest ona różnowartościowa na algebrze A^{Ψ}.*

Dowód. Idea dowodu jest następująca: załóżmy że $a \in A^{\Psi}$ jest zerowane przez π oraz π jest różnowartościowe na A. Wtedy można pokazać, że "Transformata Fourieraęlementu a:

$$a_{\gamma} = \int \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(a\lambda_{-\gamma})d\hat{\gamma}$$

jest zero. Stąd $a = 0$.

Mówiąc ściślej, niech $a \in A^{\Psi}$ oraz $\pi(a) = 0$. Z niezmienniczości a na skręcone działanie $\hat{\rho}^{\Psi}$ wynika, że $\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(a) = U_{\hat{\gamma}} a U^*_{\hat{\gamma}}$. W takim razie

$$\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(f) U_{\hat{\gamma}} a U^*_{\hat{\gamma}} \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(g f^* \lambda_{-\gamma}) = \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(f a g f^* \lambda_{-\gamma}). \tag{37}$$

dla wszystkich $f, g \in \mathrm{C}_{\infty}(\hat{\Gamma})$. Pamiętając, że element a należy do $\ker\pi$, dostajemy

$$\pi\big(\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(f) U_{\hat{\gamma}} a U^*_{\hat{\gamma}} \hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(g f^* \lambda_{-\gamma})\big) = 0,$$

co wraz z równaniem (37) daje $\pi\big(\hat{\rho}_{\hat{\gamma}}(f a g f^* \lambda_{-\gamma})\big) = 0$. Niech $f, g \in L^2(\hat{\Gamma})$ oraz $\mathfrak{E}$ będzie odwzorowaniem uśredniania względem nieskręconego działania grupy dualnej $\hat{\rho}$. Pokażemy, że $\mathfrak{E}(f a g f^* \lambda_{-\gamma}) = 0$. Rzeczywiście, dla $\omega \in \mathrm{B}(H)_*$ mamy

$$\begin{aligned} \omega\Big(\pi\big(\mathfrak{E}(f a g f^* \lambda_{-\gamma})\big)\Big) &= \omega \circ \pi\big(\mathfrak{E}(f a g f^* \lambda_{-\gamma})\big) \\ &= \int d\hat{\gamma}\, \omega\Big(\pi\big(\hat{\rho}(f a g f^* \lambda_{-\gamma})\big)\Big) = 0. \end{aligned}$$

W takim razie

$$\omega\Big(\pi\big(\mathfrak{E}(f a g f^* \lambda_{-\gamma})\big)\Big) = 0 \text{ dla wszystkich } \omega \in \mathrm{B}(H)_*,$$

co pokazuje, że $\pi\big(\mathfrak{E}(f a g f^* \lambda_{-\gamma})\big) = 0$. Ale $\mathfrak{E}(f a g f^* \lambda_{-\gamma}) \in A$ oraz π jest różnowartościowe na A więc

$$\mathfrak{E}(f a g f^* \lambda_{-\gamma}) = 0 \text{ dla wszystkich } f, g \in \mathrm{C}_{\infty}(\hat{\Gamma}^2) \cap L^2(\hat{\Gamma}^2). \tag{38}$$

Powyższa własność implikuje równość: $a = 0$. Faktycznie, niech f_{ϵ} będzie ciągiem funkcji zbieżnym do delty Diraca takim jak w Twierdzeniu (7.8.7) z książki [**11**]. Twierdzenie to gwarantuje, że dla y postaci $y = f a g f^*$ mamy:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \mathfrak{E}(y \lambda_{-\gamma}) \lambda_{\gamma} \lambda_{f_{\epsilon}} d\gamma = y.$$

Z równania (38) dostajemy $\mathfrak{E}(y\lambda_{-\gamma}) = \mathfrak{E}(f a g f^* \lambda_{-\gamma}) = 0$ więc

$$y = f a g f^* = 0 \text{ dla wszystkich } f, g \in L^2(\hat{\Gamma}^2) \cap \mathrm{C}_{\infty}(\hat{\Gamma}^2).$$

W takim razie $a = 0$. □

Pokażemy teraz, że pewne morfizmy algebr indukują morfizm ich Deformacji Rieffela.

Definicja 9. Niech (A, ρ, Ψ) będą danymi Rieffela z grupą Γ oraz (A', ρ', Ψ') będą danymi Rieffela z grupą Γ'. Niech $\phi : \Gamma \to \Gamma'$ będzie ciągłym surjektywnym homomorfizmem, $\phi^T : \hat{\Gamma}' \to \hat{\Gamma}$ będzie homomorfizmem dualnym oraz $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}; \mathrm{A}')$. Mówimy że para (π, ϕ) jest morfizmem danych Rieffela (A, ρ, Ψ) oraz (A', ρ', Ψ') jeśli spełnione są następujące warunki

(i) $\phi^*(\Psi) \equiv \Psi \circ (\phi^T \otimes \phi^T) = \Psi'$,
(ii) $\rho'_{\phi(\gamma)}\pi(a) = \pi(\rho_\gamma(a))$.

Korzystając z uniwersalnych własności iloczynu krzyżowego można pokazać, że morfizm (π, ϕ) danych Rieffela indukuje morfizm iloczynów krzyżowych: $\pi^\phi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A} \rtimes_\rho \Gamma; \mathrm{A}' \rtimes \rho' \Gamma')$. Działa on w następujący sposób:

$$\pi^\phi(a) = \pi(a), \quad \pi^\phi(f) = f \circ \phi^T$$

dla $a \in A$ oraz $f \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})$. Łatwo można sprawdzić, że π^ϕ spełnia założenia Stwierdzenia 3 z Γ-produktem $(A \rtimes_\rho \Gamma, \lambda, \hat{\rho}^\Psi)$ oraz Γ'-produktem $(A' \rtimes_{\rho'} \Gamma', \lambda', \hat{\rho}'^{\Psi'})$. Korzystając z Twierdzenia 13 oraz ze Stwierdzenia 3 dostajemy

Stwierdzenie 6. *Niech (π, ϕ) będzie morfizmem danych Rieffela (A, ρ, Ψ) i (A', Ψ', ρ') oraz $\pi^\phi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A} \rtimes_\rho \Gamma; \mathrm{A}' \rtimes \rho' \Gamma')$ będzie indukowanym morfizmem iloczynów krzyżowych. Wtedy $\pi^\phi(A^\Psi) \subset \mathrm{M}(A'^{\Psi'})$ oraz $\pi^\phi|_{A^\psi} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}^\Psi; \mathrm{A}'^{\Psi'})$. Morfizm $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}; \mathrm{A}')$ jest injektywny wtedy i tylko wtedy gdy injektywny jest morfizm $\pi^\phi|_{A^\psi} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}^\Psi; \mathrm{A}'^{\Psi'})$. Podobnie, $\pi(A) = A'$ wtedy i tylko wtedy gdy $\pi^\phi(A^\Psi) = A'^{\Psi'}$.*

Pokażemy teraz, że pewne ciągi dokładne C*-algebr pozostają dokładne po Deformacji Rieffela. Niech (J, Γ, ρ_J), (A, Γ, ρ), (A', Γ, ρ') będą układami dynamicznymi z grupą Γ oraz niech dany będzie Γ-współzmienniczy ciąg dokładny C*-algebr. :

$$0 \to J \to A \xrightarrow{\pi} A' \to 0 \tag{39}$$

Współzmienniczy morfizm π indukuje surjektywny morfizm iloczynów krzyżowych: $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A} \rtimes_\rho \Gamma; \mathrm{A}' \rtimes_{\rho'} \Gamma)$. Posyła on element $a \in A \subset \mathrm{M}(A \rtimes_\rho \Gamma)$ na $\pi(a)$, natomiast na C*-algebrze $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ działa identycznościowo. Jądro π może być utożsamione z $J \rtimes_{\rho_J} \Gamma$. Dostajemy więc następujący ciąg dokładny C*-algebr:

$$0 \to J \rtimes_{\rho_J} \Gamma \to A \rtimes_\rho \Gamma \xrightarrow{\pi} A' \rtimes_{\rho'} \Gamma \to 0. \tag{40}$$

Zauważmy, że $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A} \rtimes_\rho \Gamma; \mathrm{A}' \rtimes_{\rho'} \Gamma)$ spełnia założenia Stwierdzenia 4 z Γ-produktami $(A \rtimes_\rho \Gamma, \lambda, \hat{\rho})$ oraz $(A' \rtimes_{\rho'} \Gamma, \lambda', \hat{\rho}')$. Własność ta jest niezmiennicza na deformacje Γ-produktów przy pomocy bicharakteru Ψ. Korzystając więc ze Stwierdzenia 4 dla zdeformowanych Γ-produktów $(A \rtimes_\rho \Gamma, \lambda, \hat{\rho}^\Psi)$ oraz $(A' \rtimes_{\rho'} \Gamma, \lambda', \hat{\rho}'^\Psi)$ dostajemy następujące

Twierdzenie 14. *Niech (J, Γ, ρ_J), (A, Γ, ρ), (A', Γ, ρ') będą układami dynamicznymi z grupą Γ. Niech*

$$0 \to J \to A \xrightarrow{\pi} A' \to 0$$

będzie Γ-współzmienniczym ciągiem dokładnym C^**-algebr,* Ψ *będzie* 2*-kocyklem na grupie dualnej* $\hat{\Gamma}$ *oraz* J^Ψ*,* A^Ψ*,* A'^Ψ *będą algebrami Landstada otrzymanymi z danych Rieffela* (J, ρ_J, Ψ)*,* (A, ρ, Ψ)*,* (A', ρ', Ψ)*. Wtedy istnieje* Γ*-współzmienniczy ciąg dokładny*

$$0 \to J^\Psi \to A^\Psi \xrightarrow{\pi^\Psi} A'^\Psi \to 0$$

gdzie morfizm $\pi^\Psi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}^\Psi; \mathrm{A}'^\Psi)$ *jest obcięciem* $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A} \rtimes_\rho \Gamma, \mathrm{A}' \rtimes_{\rho'} \Gamma)$ *do algebry* $A^\Psi \subset \mathrm{M}(A \rtimes_\rho \Gamma)$*.*

Rozważmy teraz szczególny przypadek sytuacji opisanej powyżej. Załóżmy, że A jest algebrą przemienną z działaniem ρ grupy abelowej Γ. Niech $f \in \mathrm{M}(A)$ będzie elementem niezmienniczym na to działanie: $\rho_\gamma(f) = f$ dla każdego $\gamma \in \Gamma$. Rozważmy ideał J generowany przez f: $J = \overline{fA}^{\|\cdot\|}$. Jest on niezmienniczy na działanie grupy: $\rho_\gamma(J) = J$, w takim razie ciąg dokładny C^*-algebr

$$0 \to J \to A \xrightarrow{\pi} A/J \to 0$$

spełnia założenia Twierdzenia 14. Gwarantuje ono istnienie ciągu dokładnego skręconych C^*-algebr:

$$0 \to J^\Psi \to A^\Psi \xrightarrow{\pi^\Psi} (A/J)^\Psi \to 0.$$

Z niezmienniczości funkcji f na działania ρ wynika, że jest ona centralnym elementem $\mathrm{M}(A \rtimes_\rho \Gamma)$ spełniającym warunki Landstada (29). W szczególności f jest centralnym elementem $\mathrm{M}(A^\Psi)$. Niech $\overline{fA^\Psi}^{\|\cdot\|}$ będzie ideałem generowanym przez $f \in \mathrm{M}(A^\Psi)$. Naszym celem będzie wykazanie równości:

$$J^\Psi = \overline{fA^\Psi}^{\|\cdot\|}. \tag{41}$$

Z dowodu Stwierdzenia 4 wynika, że zbiór

$$\left\{\mathfrak{E}^\Psi(gjh) : j \in J \quad g, h \in L^2(\hat{\Gamma}) \cap C_\infty(\hat{\Gamma})\right\}$$

jest gęsty w J^Ψ. Ponadto $\mathfrak{E}^\Psi(g(fa)h) = f\mathfrak{E}^\Psi(gah)$ dla każdego $a \in A$. Z gęstości zbioru fA w J dostajemy (41).

Powyższe rozważania możemy podsumować następującym twierdzeniem.

Twierdzenie 15. *Niech* (A, ρ, Ψ) *będą danymi Rieffela z przemienną* C^**-algebrą* A*,* $f \in \mathrm{M}(A)$ *będzie elementem niezmienniczym na działanie* ρ *oraz* $J = \overline{fA}^{\|\cdot\|}$ *będzie ideałem generowanym przez* $f \in \mathrm{M}(A)$*. Wtedy* $f \in \mathrm{M}(A^\Psi)$*,* C^**-algebry* J^Ψ *i* $\overline{fA^\Psi}^{\|\cdot\|}$ *są izomorficzne oraz następujący ciąg jest dokładny:*

$$0 \to J^\Psi \to A^\Psi \xrightarrow{\pi^\Psi} (A/J)^\Psi \to 0.$$

Uwaga 5. Niech (A, ρ, Ψ) będą danymi Rieffela z przemienną C^*-algebrą A oraz $T \in A^\eta$ będzie elementem niezmienniczym na działanie ρ. Wtedy z_T jest niezmienniczy na działanie grupy ρ. Z definicji działania $\hat{\rho}^\Psi$ (patrz Twierdzenie 10) widać, że $z_T \in M(A^\Psi)$. Aby wykazać, że $T \,\eta\, A^\Psi$ rozważmy zbiór $\mathrm{C}^*(\Gamma)(1 + T^*T)^{-1} A^\Psi\, \mathrm{C}^*(\Gamma) =$

$(1 + T^*T)^{-1}\,\mathrm{C}^*(\Gamma)A^\Psi\,\mathrm{C}^*(\Gamma)$. Jest on niezmienniczy i gęsty w $A \rtimes_\rho \Gamma$. W takim razie, z Lematu 8 widzimy, że zbiór $(1 + T^*T)^{-1}A^\Psi$ jest gęsty w A^Ψ a więc $T\,\eta\,A^\Psi$.

4. Deformacja Rieffela grup lokalnie zwartych.

W niniejszym rozdziale zastosujemy procedurę deformacji Rieffela do algebry funkcji ciągłych na grupie lokalnie zwartej G. W rezultacie otrzymamy lokalnie zwartą grupę kwantową.

4.1. Od podgrupy abelowej z dualnym 2-kocyklem do lokalnie zwartej grupy kwantowej. Zacznijmy od ustalenia notacji. Niech $G \ni g \mapsto R_g \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)$ będzie prawą reprezentacją regularną, $\mathrm{C}_\infty(G) \subset \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)$ będzie algebrą funkcji ciągłych na G znikających w nieskończoności, $\mathrm{C}^*_r(G) \subset \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)$ będzie zredukowaną algebrą grupową generowaną przez prawe przesunięcia R_g oraz $V \in \mathrm{B}\big(L^2(G \times G)\big)$ będzie operatorem Kaca-Takesakiego: $Vf(g, g') = f(gg', g')$ dla wszystkich $f \in L^2(G \times G)$. Symbolem $\Delta_G \in \mathrm{Mor}\big(\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G}); \mathrm{C}_\infty(\mathrm{G}) \otimes \mathrm{C}_\infty(\mathrm{G})\big)$ oznaczać będziemy komnożenie na algebrze $\mathrm{C}_\infty(G)$. Jak wiadomo, operator Kaca-Takesakiego jest multyplikatywnym unitarnym poręcznym operatorem dla pary $(\mathrm{C}_\infty(G), \Delta_G)$ (patrz Definicja 6). W szczególności jest on elementem $\mathrm{M}\big(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes \mathrm{C}_\infty(G)\big)$ implementującym komnożenie:

$$\Delta_G(f) = V(f \otimes 1)V^* \text{ dla wszystkich } f \in \mathrm{C}_\infty(G).$$

Ponadto, ślajsowanie"jego pierwszej nogi daje podzbiór gęsty w $\mathrm{C}_\infty(G)$:

$$\mathrm{C}_\infty(G) = \overline{\{(\omega \otimes \mathrm{id})V : \omega \in \mathrm{B}(L^2(G))_*\}}^{\|\cdot\|}. \tag{42}$$

Jego poręczność wynika z następującego równania:

$$(x \otimes t|V|z \otimes y) = (\bar{z} \otimes t|V^*|\bar{x} \otimes y) \tag{43}$$

spełnionego dla wszystkich $x, y, z, t \in L^2(G)$.

Niech $\Gamma \subset G$ będzie domkniętą podgrupą abelową grupy G oraz $\hat{\Gamma}$ będzie jej grupą dualną. Morfizm $\Delta_{\hat{\Gamma}} \in \mathrm{Mor}\big(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}); \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}) \otimes \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})\big)$ oznaczać będzie komnożenie na $\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})$. Reprezentacja grupy Γ

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto R_\gamma \in \mathrm{M}\big(\mathrm{C}^*_r(G)\big)$$

indukuje morfizm $\pi^R \in \mathrm{Mor}\big(\mathrm{C}_\infty\big(\hat{\Gamma}\big); \mathrm{C}^*_r(G)\big)$ (patrz Uwaga 1).

Ustalmy 2-kocykl Ψ na grupie dualnej $\hat{\Gamma}$. Okazuje się, że działanie Γ^2 na algebrze $\mathrm{C}_\infty(G)$ przez prawe i lewe przesunięcia oraz odpowiednio dobrany dwukocykl na $\hat{\Gamma}^2$ dają dane Rieffela produkujące lokalnie zwartą grupę kwantową. Opiszemy tę sytaucję krok po kroku.

Dla każdego $\gamma \in \Gamma$ oraz $f \in \mathrm{C}_\infty(G)$ połóżmy

$$\rho^R_\gamma(f)(g) = f(g\gamma).$$

Wzór ten definiuje ciągłe działanie Γ na $\mathrm{C}_\infty(G)$. Niech B^R będzie C*-algebrą iloczynu krzyżowego $\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_{\rho^R} \Gamma$ oraz $(B^R, \lambda, \hat{\rho})$ będzie standardowym Γ-produktem na B^R. Standardowe zanurzenia C*-algebr $\mathrm{C}_\infty(G)$ i $\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})$ w $\mathrm{M}(B^R)$ umożliwiają rozpatrywanie następujących elementów:

$$V(\pi^R \otimes \mathrm{id})\Psi, V^*(1 \otimes f)V \in \mathrm{M}\big(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes B^R\big)$$

gdzie $f \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})$. Łatwo pokazać, że $V^*(1 \otimes \lambda_\gamma)V = R_\gamma \otimes \lambda_\gamma$ dla każdego $\gamma \in \Gamma$ co implikuje poniższą równość

$$V^*(1 \otimes f)V = (\pi^R \otimes \mathrm{id})\Delta_{\hat{\Gamma}}(f) \text{ dla wszystkich } f \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}). \tag{44}$$

Jak zostało opisane w poprzednim rozdziale możemy zdeformować standardową strukturę Γ-produktu na B^R do $(B^R, \lambda, \hat{\rho}^\Psi)$.

Stwierdzenie 7. *Niech trójka $(B^R, \lambda, \hat{\rho}^\Psi)$ będzie zdeformowanym Γ-produktem oraz $V(\pi^R \otimes \mathrm{id})\Psi \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes B^R)$ będzie unitarnym elementem rozpatrywanym powyżej. Wtedy $V(\pi^R \otimes \mathrm{id})\Psi$ jest niezmienniczy na działanie* $\mathrm{id} \otimes \hat{\rho}^\Psi$.

Dowód. Z równania dwukocyklu wynika, że

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \hat{\rho}^\Psi_{\hat{\gamma}})\Psi &= (\mathrm{id} \otimes \hat{\rho}_{\hat{\gamma}})\Psi \\ &= (I \otimes U_{\hat{\gamma}})^* \Delta_{\hat{\Gamma}}(U_{\hat{\gamma}})\Psi.\end{aligned}$$

Niezmienniczość drugiej nogi V na działanie $\hat{\rho}$ daje

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \hat{\rho}^\Psi_{\hat{\gamma}})V &= (I \otimes U^*_{\hat{\gamma}})((\mathrm{id} \otimes \hat{\rho}_{\hat{\gamma}})V)(I \otimes U_{\hat{\gamma}}) \\ &= (I \otimes U^*_{\hat{\gamma}})V(I \otimes U_{\hat{\gamma}}) = V(\pi^R \otimes \mathrm{id})\Delta_{\hat{\Gamma}}(U_{\hat{\gamma}})^*(I \otimes U_{\hat{\gamma}}).\end{aligned}$$

Ostatnia równość jest konsekwencją (44).

W końcu

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id} \otimes \hat{\rho}^\Psi_{\hat{\gamma}})[V(\pi^R \otimes \mathrm{id})\Psi] \\ &\qquad = V(\pi^R \otimes \mathrm{id})\Delta_{\hat{\Gamma}}(U_{\hat{\gamma}})^*(I \otimes U_{\hat{\gamma}})(I \otimes U_{\hat{\gamma}})^*(\pi^R \otimes \mathrm{id})\Delta_{\hat{\Gamma}}(U_{\hat{\gamma}})(\pi^R \otimes \mathrm{id})\Psi \\ &\qquad = V(\pi^R \otimes \mathrm{id})\Psi.\end{aligned}$$

$\square$

Grupa abelowa Γ działa na $\mathrm{C}_\infty(G)$ także przez lewe przesunięcia ρ^L:

$$\rho^L_\gamma(f)(g) = f(\gamma^{-1}g) \text{ dla wszystkich } f \in \mathrm{C}_\infty(G).$$

Niech B^L oznacza iloczyn krzyżowy $B^L = \mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_{\rho^L} \Gamma$ oraz $(B^L, \lambda, \hat{\rho})$ będzie standardową strukturą Γ-produktu. Dla każdego $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2 \in \hat{\Gamma}$ połóżmy

$$\Psi^\star(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) = \overline{\Psi(\hat{\gamma}_1, -\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)}.$$

W ten sposób dostajemy funkcję $\Psi^\star \in \mathrm{C}_b(\hat{\Gamma}^2)$. Standardowe zanurzenia $\mathrm{C}_\infty(G)$ oraz $\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})$ w $\mathrm{M}(B^L)$ umożliwiają rozpatrywanie następujących elementów:

$$(\pi^R \otimes \mathrm{id})(\Psi^\star)V \; , \; V(1 \otimes f)V^* \in \mathrm{M}\big(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes B^L\big)$$

gdzie $f \in \mathrm{C}_\infty(\hat\Gamma)$. Łatwo pokazać, że dla każdego $\gamma \in \Gamma$ mamy $V(1\otimes\lambda_\gamma)V^* = R_\gamma \otimes \lambda_\gamma$, co implikuje następującą równość:

$$V(1\otimes f)V^* = (\pi^R \otimes \mathrm{id})\Delta_{\hat\Gamma}(f) \text{ dla wszystkich } f \in \mathrm{C}_\infty(\hat\Gamma).$$

Niech $\widetilde\Psi$ będzie 2-kocyklem zdefiniowanym poniżej:

$$\widetilde\Psi(\hat\gamma_1,\hat\gamma_2) \equiv \overline{\Psi(-\hat\gamma_1,-\hat\gamma_2)} \text{ dla wszystkich } (\hat\gamma_1,\hat\gamma_2) \in \hat\Gamma^2.$$

Za jego pomocą deformujemy standardową strukturę Γ-produktu na B^L do $(B^L,\lambda,\hat\rho^{\widetilde\Psi})$.

Stwierdzenie 8. *Niech trójka* $(B^L,\lambda,\hat\rho^{\widetilde\Psi})$ *będzie zdeformowanym* Γ*-produktem oraz* $(\pi^R\otimes\mathrm{id})\,(\Psi^\star)\,V \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G)\otimes B^L)$ *będzie unitarnym elementem opisanym powyżej. Wtedy* $(\pi^R\otimes\mathrm{id})\,(\Psi^\star)\,V \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G)\otimes B^L)$ *jest niezmienniczy na działanie* $\mathrm{id}\otimes\hat\rho^{\widetilde\Psi}$.

Dowód. Łatwo zobaczyć, że

$$\Psi^\star(\hat\gamma_1,\hat\gamma_2+\hat\gamma) = \overline{\Psi(\hat\gamma_1,-\hat\gamma_1-\hat\gamma_2-\hat\gamma)} = \widetilde\Psi(\hat\gamma_2,\hat\gamma)\overline{\widetilde\Psi(\hat\gamma_1+\hat\gamma_2,\hat\gamma)}\Psi^\star(\hat\gamma_1,\hat\gamma_2).$$

W takim razie

$$(\mathrm{id}\otimes\hat\rho^{\widetilde\Psi}_{\hat\gamma})\,(\Psi^\star) = (I\otimes\widetilde U_{\hat\gamma})\Delta_{\hat\Gamma}(\widetilde U_{\hat\gamma})^*\Psi^\star.$$

Ponadto

$$(\mathrm{id}\otimes\hat\rho^{\widetilde\Psi}_{\hat\gamma})V = (I\otimes\widetilde U_{\hat\gamma})^*V(I\otimes\widetilde U_{\hat\gamma}) = (I\otimes\widetilde U_{\hat\gamma})^*(\pi^R\otimes\mathrm{id})\Delta_{\hat\Gamma}(\widetilde U_{\hat\gamma})V.$$

Kontynuując jak w dowodzie Stwierdzenia 7 dostajemy naszą tezę. □

Niech ρ będzie działaniem Γ^2 na $\mathrm{C}_\infty(G)$ przez prawe i lewe przesunięcia:

$$\rho_{\gamma_1,\gamma_2}(f)(g) = f(\gamma_1^{-1}g\gamma_2),$$

B będzie C^*-algebrą iloczynu krzyżowego $\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes_\rho\Gamma^2$ oraz $(B,\lambda,\hat\rho)$ będzie standardową strukturą Γ^2-produktu na B. Standardowe zanurzenie $\mathrm{C}_\infty(G)$ w $\mathrm{M}(B)$ pozwala traktować V jako element $\mathrm{M}\big(\mathrm{C}^*_r(G)\otimes B\big)$. Ponadto, mamy dwa zanurzenia λ^L,λ^R C^*-algebry $\mathrm{C}_\infty(\hat\Gamma)$ w $\mathrm{M}(B)$ pochodzące od lewego i prawego działania Γ. Dla wszystkich funkcji $f\in\mathrm{C}_\infty(\hat\Gamma)$ spełnione są następujące równości

$$\begin{array}{l} V(1\otimes\lambda^L(f))V^* = (\pi^R\otimes\lambda^{\mathrm{L}})\Delta_{\hat\Gamma}(f)\\ V^*(1\otimes\lambda^R(f))V = (\pi^R\otimes\lambda^{\mathrm{R}})\Delta_{\hat\Gamma}(f)\end{array}. \tag{45}$$

Można je wyprowadzić z następującej, prostej do sprawdzenia relacji

$$(\mathrm{id}\otimes\lambda_{\gamma_1,\gamma_2})V(\mathrm{id}\otimes\lambda^*_{\gamma_1,\gamma_2}) = (R_{-\gamma_1}\otimes I)V(R_{\gamma_2}\otimes I). \tag{46}$$

Wprowadźmy elementy Ψ^L, Ψ^R:

$$\Psi^L = (\pi^R\otimes\lambda^L)(\Psi^\star),\ \ \Psi^R = (\pi^R\otimes\lambda^R)(\Psi)\ \in\ \mathrm{M}\big(\mathrm{C}^*_r(G)\otimes B\big).$$

Mnożąc Ψ^L, V oraz Ψ^R otrzymujemy unitarny element

$$V^\Psi = \Psi^L V\Psi^R \in \mathrm{M}\big(\mathrm{C}^*_r(G)\otimes B\big).$$

Standardową strukturę Γ^2-produktu na B możemy zdeformować przy pomocy 2-kocyklu $\widetilde{\Psi} \otimes \Psi$ na $\hat{\Gamma}^2$, co prowadzi do Γ^2-produktu $(B, \lambda, \hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi})$. Algebra Landstada tego Γ^2-produktu będzie oznaczana symbolem $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$.

Stwierdzenie 9. *Niech* $(B, \lambda, \hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi})$ *będzie zdeformowanym* Γ^2*-produktem natomiast* $V^\Psi \in \mathrm{M}\big(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes B\big)$ *będzie unitarnym elementem wprowadzonym powyżej. Wtedy* V^Ψ *jest niezmienniczy na działanie* $\mathrm{id} \otimes \hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$*. Ponadto*

$$(\mathrm{id} \otimes \lambda_{\gamma_1,\gamma_2})\mathrm{V}^\Psi(\mathrm{id} \otimes \lambda^*_{\gamma_1,\gamma_2}) = (\mathrm{R}_{-\gamma_1} \otimes \mathrm{I})\mathrm{V}^\Psi(\mathrm{R}_{\gamma_2} \otimes \mathrm{I}). \tag{47}$$

dla wszystkich $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.

Dowód. Niezmienniczość V^Ψ na działanie $\mathrm{id} \otimes \hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ łatwo wynika ze Stwierdzeń 7, 8. Wykażemy wzór (47). Grupa Γ jest przemienna, więc

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \lambda_{\gamma_1,\gamma_2})V^\Psi(\mathrm{id} \otimes \lambda^*_{\gamma_1,\gamma_2}) &= (\mathrm{id} \otimes \lambda_{\gamma_1,\gamma_2})\Psi^L V \Psi^R(\mathrm{id} \otimes \lambda^*_{\gamma_1,\gamma_2}) \\ &= \Psi^L(\mathrm{id} \otimes \lambda_{\gamma_1,\gamma_2})V(\mathrm{id} \otimes \lambda^*_{\gamma_1,\gamma_2})\Psi^R.\end{aligned}$$

Z równania (46) wynika, że

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \lambda_{\gamma_1,\gamma_2})V^\Psi(\mathrm{id} \otimes \lambda^*_{\gamma_1,\gamma_2}) &= \Psi^L(R_{-\gamma_1} \otimes I)V(R_{\gamma_2} \otimes I)\Psi^R \\ &= (R_{-\gamma_1} \otimes I)\Psi^L V \Psi^R(R_{\gamma_2} \otimes I) \\ &= (R_{-\gamma_1} \otimes I)V^\Psi(R_{\gamma_2} \otimes I).\end{aligned}$$

Dowodzi to (47). □

Niech $V \in \mathrm{B}(L^2(G))$ będzie operatorem Kaca-Takesakiego. Wiadomo, że zbiór

$$\big\{(\omega \otimes \mathrm{id})V : \omega \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_*\big\}$$

jest gęsty w $\mathrm{C}_\infty(G)$. Naszym kolejnym celem będzie pokazanie, że zbiór

$$\big\{(\omega \otimes \mathrm{id})V^\Psi : \omega \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_*\big\}$$

jest gęsty w $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$.

Twierdzenie 16. *Niech* $(B, \lambda, \hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi})$ *będzie zdeformowanym* Γ^2*-produktem oraz* $V^\Psi \in \mathrm{M}\big(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes B\big)$ *będzie unitarnym elementem wprowadzonym powyżej. Wtedy*

$$\mathcal{V} = \big\{(\omega \otimes \mathrm{id})\mathrm{V}^\Psi : \omega \in \mathrm{B}\big(\mathrm{L}^2(\mathrm{G})\big)_*\big\}$$

jest gęstym podzbiorem $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$.

Dowód. Po pierwsze musimy pokazać, że $(\omega \otimes \mathrm{id})\mathrm{V}^\Psi$ spełnia warunki Landstada dla Γ^2-produktu $(B, \lambda, \hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi})$ gdzie $\omega \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_*$. Odpowiednią gęstością zajmiemy się w drugiej części dowodu.

Pierwszy warunek Landstada jest równoważny z niezmienniczością V^Ψ na działanie $\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ (Stwierdzenie 9).

Z Równania (47) wynika, że

$$\lambda_{\gamma_1,\gamma_2}[(\omega \otimes \mathrm{id})\mathrm{V}^\Psi]\lambda^*_{\gamma_1,\gamma_2} = (\mathrm{R}_{\gamma_2} \cdot \omega \cdot \mathrm{R}_{-\gamma_1} \otimes \mathrm{id})\mathrm{V}^\Psi \text{ dla wszystkich } \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma. \tag{48}$$

Normowa ciągłość odwzorowania $\Gamma^2 \ni (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto R_{\gamma_2} \cdot \omega \cdot R_{-\gamma_1} \in \mathrm{B}(L^2(G))_*$ pokazuje, że element $(\omega \otimes \mathrm{id})\mathrm{V}^\Psi$ spełnia drugi warunek Landstada.

Żeby sprawdzić trzeci warunek Landstada musimy pokazać, że

$$f_1[(\omega \otimes \mathrm{id})V^\Psi]f_2 \in B \text{ dla wszystkich } f_1, f_2 \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma}). \tag{49}$$

Rozważmy następujący zbiór

$$\mathcal{W} \equiv \left\{ f_1[(\omega \otimes \mathrm{id})V^\Psi]f_2 : f_1, f_2 \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma}) \right\}^{\mathrm{cls}}. \tag{50}$$

Pokażemy, że $\mathcal{W} = B$, co jest mocniejszą własnością niż (49). Łatwo zobaczyć, że

$$\begin{aligned}\mathcal{W} = \big\{ &\lambda^R(h_1)\lambda^L(h_2)[((\pi^R(h_3) \cdot \mu \cdot \pi^R(h_4)) \otimes \mathrm{id})(V^\Psi)]\lambda^R(h_5)\lambda^L(h_6) : \\ &\qquad h_1, h_2 \ldots, h_6 \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}), \mu \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_* \big\}^{\mathrm{cls}}.\end{aligned}$$

Dalej

$$\begin{aligned}&\lambda^R(h_1)\lambda^L(h_2)[((\pi^R(h_3) \cdot \mu \cdot \pi^R(h_4)) \otimes \mathrm{id})(V^\Psi)]\lambda^R(h_5)\lambda^L(h_6) \\ &\quad = \lambda^R(h_1)[(\mu \otimes \mathrm{id})(\pi_R \otimes \lambda^L)(\Psi^\star(h_3 \otimes h_2))V(\pi_R \otimes \lambda^R)(\Psi(h_4 \otimes h_5))]\lambda^L(h_6),\end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned}\mathcal{W} = \big\{ &\lambda^R(h_1)[(\mu \otimes \mathrm{id})(\pi_R \otimes \lambda^L)(\Psi^\star(h_3 \otimes h_2))V(\pi_R \otimes \lambda^R)(\Psi(h_4 \otimes h_5))]\lambda^L(h_6) \in B : \\ &\qquad h_1, h_2, \ldots, h_6 \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}), \mu \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_* \big\}^{\mathrm{cls}}.\end{aligned}$$

Dzięki unitarności Ψ i $\Psi^\star$ dostajemy

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \big\{ \lambda^R(h_1)[(\mu \otimes \mathrm{id})(\pi_R \otimes \lambda^L)(h_3 \otimes h_2)V(\pi_R \otimes \lambda^R)(h_4 \otimes h_5)]\lambda^L(h_6) \in B : \\ &\qquad h_1, h_2 \ldots, h_6 \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}), \mu \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_* \big\}^{\mathrm{cls}} \\ &= \big\{ \lambda^R(h_1)\lambda^L(h_2)[((\pi^R(h_3) \cdot \mu \cdot \pi^R(h_4)) \otimes \mathrm{id})(V)]\lambda^R(h_5)\lambda^L(h_6) : \\ &\qquad h_1, h_2 \ldots, h_6 \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}), \mu \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_* \big\}^{\mathrm{cls}}.\end{aligned}$$

Ponadto mamy

$$\begin{aligned}&\big\{ \lambda^R(h_1)\lambda^L(h_2)[((\pi^R(h_3) \cdot \mu \cdot \pi^R(h_2)) \otimes \mathrm{id})(V)(h_4 \otimes h_5)]\lambda^R(h_5)\lambda^L(h_6) : \\ &\qquad h_1, h_2 \ldots, h_6 \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}), \mu \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_* \big\}^{\mathrm{cls}} \\ &\quad = \big\{ f_1[(\omega \otimes \mathrm{id})V]f_2 : f_1, f_2 \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma}), \omega \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_* \big\}^{\mathrm{cls}}\end{aligned}$$

co daje

$$\mathcal{W} = \big\{ f_1[(\omega \otimes \mathrm{id})V]f_2 : f_1, f_2 \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma}), \omega \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_* \big\}^{\mathrm{cls}}. \tag{51}$$

Zbiór $\big\{(\omega \otimes \mathrm{id})V : \omega \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_*\big\}$ jest gęsty w $\mathrm{C}_\infty(G)$ w takim razie $\mathcal{W} = B$ co dowodzi prawdziwości formuły (50).

Pokazaliśmy, że elementy zbioru $\mathcal{V}$ spełniają warunki Landstada. Do udowodnienia gęstości $\mathcal{V}$ w $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ użyjemy Lematu 8. Z równania (48) wynika, że $\mathcal{V}$ jest zamknięty na działanie $\rho^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$. Ponadto równanie (51) pokazuje, że $\mathrm{C}^*(\Gamma^2)\mathcal{V}\,\mathrm{C}^*(\Gamma^2)^{\mathrm{cls}} = B$. W takim razie założenia Lematu 8 są spełnione co daje gęstość $\mathcal{V}$ w $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$. $\square$

Uwaga 6. Reprezentacja algebry $\mathrm{C}_\infty(G)$ na $L^2(G)$ jest współzmiennicza $\Big($działanie Γ^2 jest implementowane przez lewe i prawe przesunięcia: $L_{\gamma_1}, R_{\gamma_2} \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)\Big)$. W takim razie indukuje ona reprezentację C*-algebry $B = \mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \Gamma^2$. Jej wierność na $\mathrm{C}_\infty(G)$ jest oczywista, więc z Twierdzenia 13 dostajemy wierność na $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$. Wprowadzoną w ten sposób reprezentację $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ na $L^2(G)$ będziemy oznaczać π^{kan}. Tym samym symbolem będziemy oznaczać opisaną powyżej reprezentację B na $L^2(G)$.

Niech $\pi^{\mathrm{kan}} \in \mathrm{Rep}(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \Gamma^2; L^2(G))$ będzie reprezentacją wprowadzoną powyżej. Rozważmy następujący operator:

$$W = (\mathrm{id} \otimes \pi^{\mathrm{kan}})V^\Psi \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big).$$

Twierdzenie 17. *Operator unitarny $W \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big)$ wprowadzonym powyżej spełnia równanie pentagonalne:*

$$W_{12}^* W_{23} W_{12} = W_{13} W_{23}.$$

Dowód. Przypomnijmy, że

$$\Psi^R = (\pi^R \otimes \lambda^R)(\Psi),\ \ \Psi^L = (\pi^R \otimes \lambda^L)(\Psi^\star)\ \ \in\ \ \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G) \otimes B).$$

Wprowadźmy parę operatorów:

$$X = (\mathrm{id} \otimes \pi^{\mathrm{kan}})(\Psi^R),\ \ Y = (\mathrm{id} \otimes \pi^{\mathrm{kan}})(\Psi^L) \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big). \tag{52}$$

Podstawiając $\hat\gamma_3 \to (-\hat\gamma_1 - \hat\gamma_2 - \hat\gamma_3)$ do równania 2-kocyklu

$$\Psi(\hat\gamma_1, \hat\gamma_2 + \hat\gamma_3)\Psi(\hat\gamma_2, \hat\gamma_3) = \Psi(\hat\gamma_1 + \hat\gamma_2, \hat\gamma_3)\Psi(\hat\gamma_1, \hat\gamma_2)$$

i biorąc zespolone sprzężenie dostajemy

$$\overline{\Psi(\hat\gamma_1, -\hat\gamma_1 - \hat\gamma_3)\Psi(\hat\gamma_2, -\hat\gamma_1 - \hat\gamma_3 - \hat\gamma_2)} = \overline{\Psi(\hat\gamma_1, \hat\gamma_2)\Psi(\hat\gamma_1 + \hat\gamma_2, -\hat\gamma_1 - \hat\gamma_2 - \hat\gamma_3)}.$$

W takim razie

$$\Psi^\star(\hat\gamma_1, \hat\gamma_3)\Psi^\star(\hat\gamma_2, \hat\gamma_1 + \hat\gamma_3) = \overline{\Psi}(\hat\gamma_1, \hat\gamma_2)\Psi^\star(\hat\gamma_1 + \hat\gamma_2, \hat\gamma_3)$$

gdzie $\Psi^\star(\hat\gamma_1, \hat\gamma_2) = \overline{\Psi(\hat\gamma_1, -\hat\gamma_1 - \hat\gamma_2)}$. Operator V implementuje komnożenie co w połączeniu z powyższymi równościami oraz z (52) daje

$$X_{12}^* V_{12}^* Y_{23} V_{12} = Y_{13} V_{13} Y_{23} V_{13}^*$$
$$V_{12}^* X_{23} V_{12} X_{12} = V_{23}^* X_{13} V_{23} X_{23}.$$

Przejdźmy do sprawdzenia równania pentagonalnego:

$$\begin{aligned}
W_{12}^* W_{23} W_{12} &= X_{12}^* V_{12}^* Y_{12}^* W_{23} Y_{12} V_{12} X_{12} \\
&= X_{12}^* V_{12}^* Y_{23} V_{23} X_{23} V_{12} X_{12} \\
&= (X_{12}^* V_{12}^* Y_{23} V_{12})(V_{12}^* V_{23} V_{12})(V_{12}^* X_{23} V_{12} X_{12}) \\
&= (Y_{13} V_{13} Y_{23} V_{13}^*)(V_{13} V_{23})(V_{23}^* X_{13} V_{23} X_{23}) \\
&= Y_{13} V_{13} Y_{23} X_{13} V_{23} X_{23} = (Y_{13} V_{13} X_{13})(Y_{23} V_{23} X_{23}) = W_{13} W_{23}.
\end{aligned}$$

W drugiej równości wykorzystaliśmy komutację drugiej nogi Y z pierwszymi nogami X, Y oraz V. $\square$

Wzór na operator W został podany przez M. Enocka oraz L. Vainermana w pracy [**6**]. Niezależnie odkrył go też S.L. Woronowicz.

Dla $\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}$ połóżmy $u(\hat{\gamma}) = \Psi(-\hat{\gamma}, \hat{\gamma})$. Prowadzi to do funkcji $u \in \mathrm{C}_b(\hat{\Gamma})$. Aplikując $\pi^R \in \mathrm{Mor}\big(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}); \mathrm{C}_r^*(G)\big)$ do $u \in \mathrm{M}\big(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma})\big)$ dostajemy operator

$$J = \pi^R(u) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G)) \subset \mathrm{B}\big(L^2(G)\big). \tag{53}$$

Jak wiadomo, grupy kwantowe pochodzą od poręcznych operatorów unitarnych. Udowodnimy, że $W \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big)$ jest poręczny.

Twierdzenie 18. *Niech $W \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big)$ oraz $J \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)$ będą unitarnymi operatorami wprowadzonymi powyżej. Wtedy*

1. *W jest poręczny.*
2. *Operator Q jest równy 1, a operator $\widetilde{W}$ jest równy $(J \otimes 1)W^*(J^* \otimes 1)$ gdzie utożsamiliśmy $\overline{L^2(G)}$ z $L^2(G)$ za pomocą sprzężenia zespolonego.*

Dowód. Ustalmy $x, y, z, t \in L^2(G)$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \Gamma$.
Z poręczności operatora Kaca-Takesakiego (wzór (43)) dostajemy

$$\begin{aligned}(x \otimes t|(R_{\gamma_1} \otimes L_{\gamma_2})V|(R_{\gamma_3} \otimes R_{\gamma_4})|z \otimes y) &= (R_{-\gamma_1}x \otimes L_{-\gamma_2}t|V|R_{\gamma_3}z \otimes R_{\gamma_4}y)\\ &= (\overline{R_{\gamma_3}z} \otimes L_{-\gamma_2}t|V^*|\overline{R_{-\gamma_1}x} \otimes R_{\gamma_4}y)\\ &= (\overline{z} \otimes t|(R_{-\gamma_3} \otimes L_{\gamma_2})V^*|(R_{-\gamma_1} \otimes R_{\gamma_4})|\overline{x} \otimes y).\end{aligned}$$

Zastosowanie dobrze znanych równości

$$V^*(I \otimes R_g)V = R_g \otimes R_g$$

$$V(I \otimes L_g)V^* = R_g \otimes L_g$$

oraz przemienność Γ prowadzi do:

$$\begin{gathered}(\overline{z} \otimes t|(R_{-\gamma_3} \otimes L_{\gamma_2})V^*(R_{-\gamma_1} \otimes R_{\gamma_4})|\overline{x} \otimes y) =\\ (\overline{z} \otimes t|(R_{-\gamma_3+\gamma_4} \otimes R_{\gamma_4})V^*(R_{-\gamma_1+\gamma_2} \otimes L_{\gamma_2})|\overline{x} \otimes y).\end{gathered} \tag{54}$$

W takim razie:

$$\begin{gathered}(x \otimes t|(R_{\gamma_1} \otimes L_{\gamma_2})V(R_{\gamma_3} \otimes R_{\gamma_4})|z \otimes y) =\\ (\overline{z} \otimes t|(R_{-\gamma_3+\gamma_4} \otimes R_{\gamma_4})V^*(R_{-\gamma_1+\gamma_2} \otimes L_{\gamma_2})|\overline{x} \otimes y).\end{gathered} \tag{55}$$

Używając argumentów ciągłości rozszerzymy teraz powyższą równość. Niech u_γ będą unitarnymi generatorami $\mathrm{C}^*(\Gamma)$. Wprowadźmy następujące morfizmy

$$\begin{aligned}&\Phi_1^R \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}^*(\Gamma) \otimes \mathrm{C}^*(\Gamma); \mathrm{C}_r^*(G) \otimes \mathrm{C}_r^*(G)): \qquad \Phi_1^R(u_{\gamma_1} \otimes u_{\gamma_2}) = R_{\gamma_1} \otimes R_{\gamma_2}\\ &\Phi_1^L \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}^*(\Gamma) \otimes \mathrm{C}^*(\Gamma); \mathrm{C}_r^*(G) \otimes \mathrm{C}_l^*(G)): \qquad \Phi_1^L(u_{\gamma_1} \otimes u_{\gamma_2}) = R_{\gamma_1} \otimes L_{\gamma_2}\end{aligned}$$

oraz automorfizm $\Theta \in \mathrm{Aut}(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}^2))$:

$$\Theta(f)(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) = f(-\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2) \text{ dla wszystkich } f \in \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}^2).$$

Łatwo sprawdzić, że
$$\Theta(u_{\gamma_1} \otimes u_{\gamma_2}) = u_{-\gamma_1+\gamma_2} \otimes u_{\gamma_2}.$$
W takim razie, równanie (55) można przepisać w następującej formie :
$$\begin{aligned}(x \otimes t|(\Phi_1^L(u_{\gamma_1} \otimes u_{\gamma_2})V\Phi_1^R(u_{\gamma_3} \otimes u_{\gamma_4})|z \otimes y)\\ = (\overline{z} \otimes t|\Phi_1^R \circ \Theta(u_{\gamma_3} \otimes u_{\gamma_4})V^*\Phi_l^L \circ \Theta(u_{\gamma_1} \otimes u_{\gamma_2})|\overline{x} \otimes y).\end{aligned}$$
Zastosowanie liniowości i ciągłości daje:
$$(x \otimes t|\Phi_1^L(f)V\Phi_1^R(g)|z \otimes y) = (\overline{z} \otimes t|\Phi_1^R \circ \Theta(g)V^*\Phi_1^L \circ \Theta(f)|\overline{x} \otimes y)$$
dla wszystkich $f, g \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\Gamma) \otimes \mathrm{C}^*(\Gamma))$. W szczególności
$$\big(x \otimes t|\Phi_1^L(\Psi^\star)V\Phi_1^R(\Psi)|z \otimes y\big) = \big(\overline{z} \otimes t|\left(\Phi_1^R \circ \Theta(\Psi)\right)V^*\left(\Phi_1^L \circ \Theta(\Psi^\star)\right)|\overline{x} \otimes y\big). \tag{56}$$
Z równania (52) wynika, że $X = \Phi_1^R(\Psi)$, $Y = \Phi_1^L(\Psi^\star)$. Ponadto z warunku 2-kocyklu dostajemy
$$\Theta(\Psi)(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) = \Psi(-\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2) = \overline{\Psi}(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)\Psi(0, \hat{\gamma}_2)\Psi(-\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_1)$$
oraz
$$\Psi(0, \hat{\gamma}_2 + 0)\Psi(0, \hat{\gamma}_2) = \Psi(0 + 0, \hat{\gamma}_2)\Psi(0, 0).$$
W takim razie $\Psi(0, \hat{\gamma}_2) = \Psi(0, 0)$ co daje
$$\Phi_1^R \circ \Theta(\Psi) = \Phi_1^R(\overline{\Psi}(u \otimes I))\Psi(0, 0) = X^*(J \otimes I)\Psi(0, 0). \tag{57}$$
Podobnie pokazujemy, że:
$$\Phi_1^L \circ \Theta(\Psi^\star) = Y^*(J^* \otimes I)\overline{\Psi}(0, 0). \tag{58}$$
Wstawiając (57) oraz (58) do (56) dostajemy
$$(x \otimes t|YVX|z \otimes y) = (\overline{z} \otimes t|(J \otimes I)X^*V^*Y^*(J^* \otimes I)|\overline{x} \otimes y).$$
Pamiętając, że $W = YVX$ widzimy, że $\widetilde{W} = (J \otimes I)W^*(J^* \otimes I)$ i $Q = 1$. ☐

Niech $W \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big)$ będzie poręcznym multyplikatywnym unitarnym operatorem rozważanym powyżej. Niech $A \subset \mathrm{B}(L^2(G))$ będzie C*-algebrą otrzymaną ze ślajsowania"pierwszej nogi operatora W:
$$A = \overline{\left\{(\omega \otimes \mathrm{id})\mathrm{W} : \omega \in \mathrm{B}_*(\mathrm{L}^2(\mathrm{G}))\right\}}^{\|\cdot\|}.$$
Twierdzenie 5 zapewnia że jest to grupa kwantowa z komnożeniem zadanym wzorem:
$$A \ni a \mapsto W(a \otimes I)W^* \in \mathrm{M}(A \otimes A).$$
Z Twierdzenia 16 wynika, że obraz $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ w wiernej reprezentacji π^{kan} na $L^2(G)$ (patrz Uwaga 6) pokrywa się z C*-algebrą A. Widzimy więc, że $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ posiada strukturę grupy kwantowej pochodzącą z A.

Naszym kolejnym celem będzie podanie wzoru na komnożenie $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ który nie korzysta z operatora multyplikatywnego unitarnego W. Przypomnijmy, że ρ oznacza działanie grupy Γ^2 na C*-algebrze $\mathrm{C}_\infty(G)$ przez prawe i lewe przesunięcia. Komnożenie Δ_G ma następującą własność współzmienniczości:

$$\Delta_G\big(\rho_{\gamma_1,\gamma_2}(f)\big) = (\rho_{\gamma_1,0}\otimes\rho_{0,\gamma_2})\big(\Delta_G(f)\big)$$

dla wszystkich $f\in\mathrm{C}_\infty(G)$, W takim razie Δ_G indukuje morfizm iloczynów krzyżowych:

$$\Delta\in\mathrm{Mor}\big(\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes\Gamma^2;\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes\Gamma^2\otimes\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes\Gamma^2\big).$$

Działa on na $f\in\mathrm{C}_\infty(G)$ jak komnożenie

$$\Delta(f)=\Delta_G(f)\in\mathrm{M}\big(\mathrm{C}_\infty(G)\otimes\mathrm{C}_\infty(G)\big)\subset\mathrm{M}\big(\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes\Gamma^2\otimes\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes\Gamma^2\big)$$

oraz funkcje $h\in\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}^2)$ posyła na

$$\Delta(h)=(\lambda^L\otimes\lambda^R)h\in\mathrm{M}\big(\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes\Gamma^2\otimes\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes\Gamma^2\big).$$

Przypomnijmy, że $\Psi^\star\in\mathrm{M}\big(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}^2)\big)$ jest dane wzorem

$$\Psi^\star(\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2)=\overline{\Psi(\hat{\gamma}_1,-\hat{\gamma}_1-\hat{\gamma}_2)}.$$

Używając unitarnego elementu $\Upsilon\in\mathrm{M}\big(\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes\Gamma^2\otimes\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes\Gamma^2\big)$:

$$\Upsilon=(\lambda^R\otimes\lambda^L)\Psi^\star,$$

możemy wprowadzić morfizm $\Delta^\Psi\in\mathrm{Mor}\big(\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G})\rtimes\Gamma^2;\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G})\rtimes\Gamma^2\otimes\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G})\rtimes\Gamma^2\big)$ formułą:

$$\Delta^\Psi(a)=\Upsilon\Delta(a)\Upsilon^*$$

dla wszystkich $a\in\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes\Gamma^2$.

Twierdzenie 19. *Niech* $\Delta^\Psi\in\mathrm{Mor}\big(\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G})\rtimes\Gamma^2;\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G})\rtimes\Gamma^2\otimes\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G})\rtimes\Gamma^2\big)$ *będzie morfizmem wprowadzonym powyżej. Dla* $a\in\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ *mamy*

$$\Delta^\Psi(a)\in\mathrm{M}\big(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\otimes\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\big)$$

oraz $\Delta^\Psi\big|_{\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}}\in\mathrm{Mor}\big(\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G})^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi};\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G})^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\otimes\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G})^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\big)$. *Ponadto* $\Delta^\Psi\big|_{\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}}$ *pokrywa się z komnożeniem zadanym przez* W*:*

$$\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\ni a\mapsto W(a\otimes 1)W^*\in\mathrm{M}\big(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\otimes\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\big).$$

Dowód. Korzystając z Twierdzenia 5 widzimy że wystarczy sprawdzić następującą równość:

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta^\Psi)V^\Psi=V^\Psi_{12}V^\Psi_{13}.$$

Z konstrukcji morfizmu Δ wynika, że

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\Delta)V^\Psi&=(\mathrm{id}\otimes\Delta)\big((\pi^R\otimes\lambda^L)(\Psi^\star)V(\pi^R\otimes\lambda^R)(\Psi)\big)\\&=\big((\pi^R\otimes\lambda^L)\Psi^\star V\big)_{12}\big(V(\pi^R\otimes\lambda^R)\Psi\big)_{13}.\end{aligned}$$

W takim razie

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta^\Psi)V^\Psi=(1\otimes\Upsilon)\big((\pi^R\otimes\lambda^L)\Psi^\star V\big)_{12}\big(V((\pi^R\otimes\lambda^R)\Psi\big)_{13})(1\otimes\Upsilon^*).$$

Korzystając z równania (45) dostajemy

$$\big(1\otimes\Upsilon\big)V_{12}=V_{12}\Big((\pi^R\otimes\lambda^R\otimes\lambda^L)\circ(\Delta_{\hat\Gamma}\otimes\mathrm{id})\big(\Psi^\star\big)\Big)$$

oraz

$$V_{13}\big(1\otimes\Upsilon\big)=\Big((\pi^R\otimes\lambda^R\otimes\lambda^L)\circ(\sigma\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\Delta_{\hat\Gamma})\big(\Psi^\star\big)\Big)V_{13}$$

gdzie σ jest operatorem flipu: $\sigma(a\otimes b)=b\otimes a$. W takim razie

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\Delta^\Psi)V^\Psi&=\big((\pi^R\otimes\lambda^L)\Psi^\star V\big)_{12}\Big((\pi^R\otimes\lambda^R\otimes\lambda^L)\circ(\Delta_{\hat\Gamma}\otimes\mathrm{id})\big(\Psi^\star\big)\Big)\\&\quad\times\Big((\pi^R\otimes\lambda^R\otimes\lambda^L)\circ(\sigma\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\Delta_{\hat\Gamma})\big(\Psi^\star\big)^*\Big)\big(V(\pi^R\otimes\lambda^R)\Psi\big)_{13}.\end{aligned}$$

Następujący rachunek

$$\begin{aligned}&\overline{\Psi(\hat\gamma_1+\hat\gamma_2,-\hat\gamma_1-\hat\gamma_2-\hat\gamma_3)}\Psi(\hat\gamma_2,-\hat\gamma_1-\hat\gamma_2-\hat\gamma_3)\\&\qquad=\Psi(\hat\gamma_1,\hat\gamma_2)\overline{\Psi(\hat\gamma_1,-\hat\gamma_1-\hat\gamma_3)\Psi(\hat\gamma_2,-\hat\gamma_1-\hat\gamma_2-\hat\gamma_3)}\Psi(\hat\gamma_2,-\hat\gamma_1-\hat\gamma_2-\hat\gamma_3)\\&\qquad=\Psi(\hat\gamma_1,\hat\gamma_2)\overline{\Psi(\hat\gamma_1,-\hat\gamma_1-\hat\gamma_3)}.\end{aligned}$$

pokazuje, że

$$\begin{aligned}&\Big((\pi^R\otimes\lambda^L\otimes\lambda^R)\big((\Delta_{\hat\Gamma}\otimes\mathrm{id})\Psi^\star\big)\Big)\Big((\pi^R\otimes\lambda^L\otimes\lambda^R)(\sigma\otimes\mathrm{id})\big((\mathrm{id}\otimes\Delta_{\hat\Gamma})\Psi^\star\big)\Big)\\&\qquad=\big((\pi^R\otimes\lambda^R)\Psi\big)_{12}\big((\pi^R\otimes\lambda^L)\Psi^\star\big)_{13}.\end{aligned}$$

Więc

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\Delta^\Psi)V^\Psi&=\big((\pi^R\otimes\lambda^L)\,(\Psi^\star)\,V(\pi^R\otimes\lambda^R)\Psi\big)_{12}\big((\pi^R\otimes\lambda^L)\,(\Psi^\star)\,V(\pi^R\otimes\lambda^R)\Psi\big)_{13}\\&=V^\Psi_{12}V^\Psi_{13}.\end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia. □

4.2. Kwantowa Grupa Dualna. Niech G będzie grupą lokalnie zwartą, Γ będzie abelową podgrupą w G oraz Ψ będzie 2-kocyklem na $\hat\Gamma$. W poprzednim rozdziale pokazaliśmy, że obiekty te prowadzą do kwantowej grupy $\big(\mathrm{C}_\infty(G)^{\tilde\Psi\otimes\Psi},\Delta^\Psi\big)$ danej przez operator multyplikatywny unitarny $W\in\mathrm{B}\big(L^2(G)\otimes L^2(G)\big)$. W niniejszym paragrafie zbadamy dualny obiekt do grupy kwantowej $(\mathrm{C}_\infty(G)^{\tilde\Psi\otimes\Psi},\Delta^\Psi)$. W myśl Twierdzenia 5 jest nim grupa kwantowa $(\hat A,\hat\Delta_{\hat A})$ powstała przez slajsowania drugiej nogi operatora W:

$$\hat A=\overline{\{(\mathrm{id}\otimes\omega)(W^*):\omega\in\mathrm{B}(H)_*\}}^{\|\cdot\|},$$

z komnożeniem zadanym formułą

$$\hat A\ni a\mapsto\hat\Delta_{\hat A}(\hat a)=\Sigma(W^*)\Sigma(\hat a\otimes I)\Sigma W\Sigma\in\mathrm{M}(\hat A\otimes\hat A).$$

Naszym celem będzie pokazanie, że $\hat A=\mathrm{C}^*_r(G)$ oraz komnożenie $\hat\Delta_{\hat A}$ jest skręceniem kanonicznego komnożenia na $\mathrm{C}^*_r(G)$. Tego typu deformacje algebry grupowej zostały opisane przez L. Vainerman w **[6]**.

Przypomnijmy, że $\pi^R \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}^*(\Gamma); \mathrm{C}^*_r(G))$ jest morfizmem algebr grupowych takim, że $\pi^R(u_\gamma) = R_\gamma$ gdzie elementy $u_\gamma \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*(\Gamma))$ są unitarnymi generatorami $\mathrm{C}^*(\Gamma)$. Podobnie możemy wprowadzić morfizm $\pi^L \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}^*(\Gamma); \mathrm{C}^*_l(G))$ taki, że $\pi^L(u_\gamma) = L_\gamma$. Przypomnijmy również, że $u \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}))$ jest funkcją daną wzorem $u(\hat{\gamma}) = \overline{\Psi(\hat{\gamma}, -\hat{\gamma})}$ oraz $\Psi^\star \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}) \otimes \mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}))$ jest funkcją daną wzorem $\Psi^\star(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) = \overline{\Psi(\hat{\gamma}_1, -\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)}$. Używając tych obiektów wprowadzamy:

$$\begin{cases} J = \pi^R(u) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G)) \\ X = (\pi^R \otimes \pi^R)\Psi \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes \mathrm{C}^*_r(G)) \\ Y = (\pi^R \otimes \pi^L)\Psi^\star \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes \mathrm{C}^*_l(G)) \\ W = YVX \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big) \end{cases} \tag{59}$$

Twierdzenie 20. *Niech* $\big(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi \otimes \Psi}}, \Delta^\Psi\big)$ *będzie grupą kwantową z operatorem multyplikatywnym unitarnym* $W \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big)$ *wprowadzoną w poprzednim rozdziale. Niech*

$$\hat{A} = \overline{\big\{(id \otimes \omega)(W^*) : \omega \in \mathrm{B}\big(L^2(G)\big)_*\big\}}^{\|\cdot\|}$$

będzie grupą kwantową powstałą przez slajsowanie drugiej nogi operatora W. *Wtedy:*

1. $\hat{A} = \mathrm{C}^*_r(G)$.
2. *Kodziałanie na* $\hat{A}$ *dane jest wzorem*
$$\hat{A} \ni a \mapsto \hat{\Delta}_{\hat{A}}(a) = \Sigma X^* \Sigma \hat{\Delta}(a) \Sigma X \Sigma \in \mathrm{M}\left(\hat{A} \otimes \hat{A}\right)$$
gdzie $\hat{\Delta}$ *jest kanonicznym kodziałaniem na* $\mathrm{C}^*_r(G)$.
3. *Koodwrotność na* $\hat{A}$ *dana jest wzorem*
$$\hat{A} \ni a \mapsto \hat{\kappa}_{\hat{A}}(a) = J\hat{\kappa}(a)J^* \in \mathrm{M}(\hat{A})$$
gdzie $\hat{\kappa}$ *jest kanoniczną koodwrotnością na* $\mathrm{C}^*_r(G)$.

Dowód powyższego twierdzenia został podany autorowi przez prof. S.L. Woronowicza.

Dowód. Niech $R_g, L_g \in \mathrm{B}(L^2(G))$ będą operatorami prawych i lewych przesunięć. Z Twierdzenia (47) dostajemy równość

$$R_{\gamma_1}[(\mathrm{id} \otimes \omega)\mathrm{W}]\mathrm{R}_{\gamma_2} = (\mathrm{id} \otimes (\mathrm{R}_{-\gamma_2}\mathrm{L}_{\gamma_1} \cdot \omega \cdot \mathrm{L}_{-\gamma_1}\mathrm{R}_{\gamma_2}))\mathrm{W}. \tag{60}$$

W takim razie R_γ jest elementem algebry mnożników $\mathrm{M}(\hat{A})$ oraz reprezentacja grupy Γ

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto R_\gamma \in \mathrm{M}(\hat{A})$$

jest ciągła w topologii strict. Indukuje ona reprezentacje $\chi \in \mathrm{Mor}\big(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma}), \hat{\mathrm{A}}\big)$. Po zastosowaniu jej do Ψ oraz $\Psi^\star$ dostajemy

$$X = (\chi \otimes \chi)\Psi \in \mathrm{M}(\hat{A} \otimes \hat{A})$$
$$Y = (\chi \otimes \pi^L)(\Psi^\star) \in \mathrm{M}(\hat{A} \otimes \mathcal{K}).$$

Przypomnijmy, że $W \in \mathrm{M}(\hat{A} \otimes A)$ skąd

$$V = Y^* W X^* \in \mathrm{M}(\hat{A} \otimes \mathcal{K}). \tag{61}$$

Widzimy więc, że
$$V_{12}^* V_{23}, V_{12} V_{23}^* \in \mathrm{M}\big(\hat{A} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathrm{C}_\infty(G)\big). \tag{62}$$
Łącząc powyższe równanie z równaniem pięciokąta dla V:
$$V_{13} = V_{12}^* V_{23} V_{12} V_{23}^*$$
dostajemy
$$V \in \mathrm{M}\big(\hat{A} \otimes \mathrm{C}_\infty(G)\big). \tag{63}$$

Analogicznie dowodzimy, że:
$$W \in \mathrm{M}\big(\mathrm{C}_r^*(G) \otimes A\big). \tag{64}$$

Formuła (63) oraz Twierdzenie 6 pokazują, że naturalna reprezentacja $\mathrm{C}_r^*(G)$ na $L^2(G)$ jest elementem $\mathrm{Mor}\big(\mathrm{C}_r^*(G), \hat{A}\big)$. Podobnie, formuła (64) pokazuje, że naturalna reprezentacja $\hat{A}$ na przestrzeni $L^2(G)$ jest elementem $\mathrm{Mor}\big(\hat{A}, \mathrm{C}_r^*(G)\big)$. Morfizmy są z definicji niezdegenerowane a więc
$$\overline{\mathrm{C}_r^*(G)\hat{A}} = \hat{A}$$
$$\overline{\hat{A}\,\mathrm{C}_r^*(G)} = \mathrm{C}_r^*(G).$$
Algebry $\mathrm{C}_r^*(G)$ i $\hat{A}$ są zamknięte na sprzężenie w takim razie
$$\hat{A} = \hat{A}^* = \overline{\hat{A}\,\mathrm{C}_r^*(G)} = \mathrm{C}_r^*(G),$$
co kończy dowód punktu 1.

Kodziałanie na $\hat{A}$ jest implementowane przez $\Sigma W^* \Sigma$, co pokazuje że:
$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_{\hat{A}}(a) &= \Sigma X^* V^* Y^* (I \otimes a) Y V X \Sigma \\ &= \Sigma X^* V^* (I \otimes a) V X \Sigma \\ &= (\Sigma X^* \Sigma)\hat{\Delta}(a)(\Sigma X \Sigma) = \mathrm{Ad}_{\Sigma X^* \Sigma}\hat{\Delta}(a).\end{aligned}$$
Podobnie sprawdzamy formułę zadającą koodwrotność. □

4.3. Kojedynka na $\mathrm{C}_\infty(G)^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi}$. Zacznijmy ten rozdział od wprowadzenia pojęć koreprezentacji i kojedynki grupy kwantowej (A, Δ) oraz opisu związku między nimi. Standardowa definicja koreprezentacji grupy kwantowej (A, Δ) (patrz **[2]**) jest następująca:

Definicja 10. Niech (A, Δ) będzie grupą kwantową w sensie Definicji 6 oraz H będzie przestrzenią Hilberta. Koreprezentacją (A, Δ) na H nazywamy unitarny element $U \in \mathrm{M}(\mathcal{K}(H) \otimes A)$ taki, że
$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)U = U_{12} U_{13}.$$

Dla potrzeb tej pracy wprowadzimy nieco inną definicję. W tym celu rozważmy automorfizm źamiany nóg"$\sigma \in \mathrm{Mor}(\mathcal{K}(\mathrm{H}) \otimes \mathrm{A}, \mathrm{A} \otimes \mathcal{K}(\mathrm{H}))$:
$$\sigma(k \otimes a) = a \otimes k$$

dla wszystkich $k \in \mathcal{K}(H)$ oraz $a \in A$. Zauważmy, że jeśli $U \in \mathrm{M}(\mathcal{K}(H) \otimes A)$ jest koreprezentacją grupy kwantowej (A, Δ) to element $\widetilde{U} = \sigma(U)^* \in \mathrm{M}(A \otimes \mathcal{K}(H))$ spełnia równanie $(\Delta \otimes \mathrm{id})(\widetilde{U}) = \widetilde{U}_{23}\widetilde{U}_{13}$. Stąd poniższa definicja:

Definicja 11. Niech (A, Δ) będzie grupą kwantową w sensie Definicji 6 oraz H będzie przestrzenią Hilberta. Koreprezentacją (A, Δ) na H nazywamy unitarny element $U \in \mathrm{M}(A \otimes \mathcal{K}(H))$ taki, że:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})U = U_{23}U_{13}.$$

Dalej pojęcia koreprezentacji będziemy zawsze używali w powyższym sensie.

Definicja 12. Niech (A, Δ) będzie grupą kwantową w sensie Definicji 6. Charakter $e \in A^*$ nazywamy kojedynką jeśli

$$(\mathrm{id} \otimes e) \circ \Delta(a) = a$$

dla wszystkich $a \in A$.

Niech (A, Δ) będzie grupą kwantową z operatorem multyplikatywnym unitarnym W. Wiadomo, że $W \in \mathrm{M}(\hat{A} \otimes A)$ gdzie $(\hat{A}, \hat{\Delta})$ jest kwantową grupą dualną grupy kwantowej (A, Δ). Niech H będzie przestrzenią Hilberta oraz $\pi \in \mathrm{Rep}(A; H)$. Łatwo sprawdzić, że operator $(\mathrm{id} \otimes \pi)W \in \mathrm{M}(\hat{A} \otimes \mathcal{K}(H))$ jest koreprezentacją kwantowej grupy $(\hat{A}, \hat{\Delta})$. Okazuje się, że jeśli (A, Δ) posiada kojedynkę to prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne:

Twierdzenie 21. *Niech (A, Δ) będzie grupą kwantową w sensie Definicji 6 z operatorem multyplikatywnym unitarnym W, $(\hat{A}, \hat{\Delta})$ będzie kwantową grupą dualną oraz H będzie przestrzenią Hilberta. Przypuśćmy, że (A, Δ) posiada kojedynkę. Wtedy dla każdej koreprezentacji $U \in \mathrm{M}(\hat{A} \otimes \mathcal{K}(H))$ grupy kwantowej $(\hat{A}, \hat{\Delta})$ istnieje dokładnie jedna reprezentacja $\pi \in \mathrm{Rep}(A; H)$ taka, że $U = (\mathrm{id} \otimes \pi)W$.*

Dowód powyższego twierdzenia przy założeniu istnienia miary Haara na A można znaleźć w pracy **[2]**. Dowód, który nie korzysta z miary Haara jest podany w pracy **[16]**

W dalszej części tego rozdziału opiszemy konstrukcję kojedynki na grupie kwantowej $(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}, \Delta^\Psi)$. Niech więc G będzie grupą lokalnie zwartą z podgrupą abelową $\Gamma \subset G$, Ψ będzie 2-kocyklem na grupie dualnej oraz $\pi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G}); \mathrm{C}_\infty(\Gamma))$ będzie surjektywnym morfizmem obcinania funkcji do podgrupy. Niech ρ_G będzie działaniem Γ^2 na C*-algebrze $\mathrm{C}_\infty(G)$ przez lewe i prawe przesunięcia oraz ρ_Γ będzie analogicznym działaniem Γ^2 na C*-algebrze $\mathrm{C}_\infty(\Gamma)$. Trójki $(\mathrm{C}_\infty(G), \rho_G, \Psi)$ i $(\mathrm{C}_\infty(\Gamma), \rho_\Gamma, \Psi)$ są danymi Rieffela oraz (π, id) jest morfizmem tych danych (patrz Definicja 9) gdzie $\mathrm{id} : \Gamma \to \Gamma$ jest morfizmem identycznościowym. Ze Stwierdzenia 6 wynika istnienie surjektywnego morfizmu $\pi^\Psi \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G})^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}; \mathrm{C}_\infty(\Gamma)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi})$ skręconych C*-algebr. Ponadto na $\mathrm{C}_\infty(\Gamma)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ można wprowadzić komnożenie $\Delta_\Gamma^\Psi \in \mathrm{Mor}\left(\mathrm{C}_\infty(\Gamma)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}; \mathrm{C}_\infty(\Gamma)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi} \otimes \mathrm{C}_\infty(\Gamma)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\right)$ oraz, jak wynika z Twierdzenia 19, π^Ψ jest morfizmem grup kwantowych:

$$\Delta_\Gamma^\Psi\left(\pi^\Psi(a)\right) = \left(\pi^\Psi \otimes \pi^\Psi\right)\left(\Delta^\Psi(a)\right)$$

dla wszystkich $a \in \mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$.

Przyjrzyjmy się bliżej grupie kwantowej $(\mathrm{C}_\infty(\Gamma)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}, \Delta_\Gamma^\Psi)$. Z Twierdzenia 20 wynika, że C^*-algebra kwantowej grupy dualnej do $\mathrm{C}_\infty(\Gamma)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}$ pokrywa się z $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ a komnożenie dualne $\hat{\Delta}$ jest skręceniem kanonicznego komnożenia $\hat{\Delta}_\Gamma$ na $\mathrm{C}^*(\Gamma)$:

$$\hat{\Delta}(a) = (\Sigma X^*\Sigma)\hat{\Delta}_\Gamma(a)(\Sigma X\Sigma)$$

dla wszystkich $a \in \mathrm{C}^*(\Gamma)$. Jednakże $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ jest C^*-algebrą przemienną (Γ jest grupą abelową), więc $(\Sigma X^*\Sigma)\hat{\Delta}_\Gamma(a)(\Sigma X\Sigma) = \hat{\Delta}_\Gamma(a)$. Pamiętając, że $\mathrm{C}^*(\Gamma)$ można utożsamić z algebrą funkcji na grupie dualnej $\hat{\Gamma}$ widzimy, że kwantowa grupa dualna do $\mathrm{C}_\infty(\Gamma)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}$ jest algebrą funkcji na grupie dwoistej grupy $\hat{\Gamma}$ z kanonicznym komnożeniem. Z dualności Pontryagina dostajemy: $\mathrm{C}_\infty(\Gamma)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}} = \mathrm{C}_\infty(\Gamma)$. W takim razie morfizm π^Ψ jest elementem $\mathrm{Mor}(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}; \mathrm{C}_\infty(\Gamma))$. Kojedynkę na grupie kwantowej $(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}, \Delta^\Psi)$ otrzymujemy składając π^Ψ z kojedynką e na $\mathrm{C}_\infty(\Gamma)$: $e \circ \pi^\Psi \in \left(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}\right)^*$. Powyższe rozważania podsumujemy następującym twierdzeniem:

Twierdzenie 22. *Niech* $W \in \mathrm{M}\left(\mathrm{C}_r^*(G) \otimes \mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}\right)$ *będzie operatorem multyplikatywnym unitarnym grupy kwantowej* $\left(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}, \Delta^\Psi\right)$ *oraz niech* $\left(\mathrm{C}_r^*(G), \mathrm{Ad}_{\Sigma X^*\Sigma}\hat{\Delta}\right)$ *będzie kwantową grupą dualną opisaną w Twierdzeniu 20 oraz* H *będzie przestrzenią Hilberta. Grupa kwantowa* $\left(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}, \Delta^\Psi\right)$ *posiada kojedynkę. W szczególności dla każdej koreprezentacji* $U \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G) \otimes \mathcal{K}(H))$ *grupy kwantowej* $\left(\mathrm{C}_r^*(G), \mathrm{Ad}_{\Sigma X^*\Sigma}\hat{\Delta}\right)$ *na przestrzeni Hilberta* H *istnieje dokładnie jedna reprezentacja* $\pi \in \mathrm{Rep}(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}; H)$ *taka, że* $U = (\mathrm{id} \otimes \pi)W$.

5. Odwzorowanie Kwantyzacji.

Niech G będzie grupą lokalnie zwartą, Γ będzie jej abelową podgrupą oraz Ψ będzie 2-kocyklem na $\hat{\Gamma}$. Niech $\left(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}, \Delta^\Psi\right)$ będzie grupą kwantową z operatorem multyplikatywnym unitarnym $W \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big)$ wprowadzoną w Rozdziale 4. W niniejszym rozdziale utożsamiać będziemy C^*-algebrę $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}$ z jej obrazem w $B(L^2(G))$ przy reprezentacji $\pi^{\mathrm{kan}} \in \mathrm{Rep}\left(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}; L^2(G)\right)$ wprowadzonej w Uwadze 6.

Definicja 13. Niech $f \in \mathrm{C}_\infty(G)$ oraz $R_g \in \mathrm{B}(L^2(G))$ będzie prawą regularną reprezentacją grupy G. Mówimy, że f jest funkcją kwantowalną jeśli istnieje funkcjonał $\omega \in \mathrm{B}(L^2(G))_*$ taki, że $f(g) = \omega(R_g)$ dla wszystkich $g \in G$. Dla funkcji kwantowalnej $f \in \mathrm{C}_\infty(G)$ definiujemy operator $\mathcal{Q}(f) \in \mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}} \subset \mathrm{B}(L^2(G))$ wzorem:

$$\mathcal{Q}(f) = (\omega \otimes \mathrm{id})W \in \mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}.$$

Zbiór funkcji kwantowalnych będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{F}(G)$. Pokażemy, że powyższa definicja prowadzi do dobrze określonego odwzorowania $\mathcal{Q} : \mathcal{F}(G) \longrightarrow \mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}$. Przypuśćmy, że $\omega \in \mathrm{B}(L^2(G))_*$ jest takie, że $\omega(R_g) = 0$ dla wszystkich $g \in G$. Innymi słowy

$\omega|_{C^*_r(G)} = 0$. Twierdzenie 20 pokazuje, że pierwsza noga operatora $W \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big)$ generuje C^*-algebrę $\mathrm{C}^*_r(G)$ więc $(\omega \otimes \mathrm{id})W = 0$. Stąd łatwo wynika, że jeśli funkcja $f \in \mathcal{F}(G)$ dana jest przez dwa funkcjonały $\omega_1, \omega_2 \in \mathrm{B}(L^2(G))_*$ w sensie Definicji 13 to kwantyzacja tej funkcji nie zależy od wyboru funkcjonału: $\mathcal{Q}(f) = (\omega_1 \otimes \mathrm{id})W = (\omega_2 \otimes \mathrm{id})W$.

Twierdzenie 23. *Niech* $\big(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}, \Delta^\Psi\big)$ *będzie grupą kwantową rozważaną powyżej oraz* $f, h \in \mathcal{F}(G)$ *będą funkcjami kwantowalnymi danymi odpowiednio przez funkcjonały* ω *oraz* $\mu \in \mathrm{B}(L^2(G))_*$. *Ich kwantyzacje dają operatory* $\mathcal{Q}(f), \mathcal{Q}(h) \in \mathrm{B}(L^2(G))$. *Załóżmy, że* $h \in L^2(G)$. *Wtedy* $\mathcal{Q}(f)h \in L^2(G)$ *jest funkcją kwantowalną oraz*

$$\mathcal{Q}\big(\mathcal{Q}(f)h\big) = \mathcal{Q}(f)\mathcal{Q}(h). \tag{65}$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(f)\mathcal{Q}(h) &= (\omega \otimes \mathrm{id})(\mathrm{W})(\mu \otimes \mathrm{id})\mathrm{W} \\ &= (\omega \otimes \mu \otimes \mathrm{id})(\mathrm{W}_{13}\mathrm{W}_{23}) \\ &= (\omega \otimes \mu \otimes \mathrm{id})(\mathrm{W}^*_{12}\mathrm{W}_{23}\mathrm{W}_{12}).\end{aligned}$$

Powyższy rachunek pokazuje, że $\mathcal{Q}(f)\mathcal{Q}(h)$ jest kwantyzacją funkcji $k \in \mathrm{C}_\infty(G)$ zdefiniowanej następująco:

$$k(g) = (\omega \otimes \mu)\big(W^*(I \otimes R_g)W\big).$$

Z równości $W^*(I \otimes R_g)W = X^*(R_g \otimes R_g)X$ wynika, że

$$k(g) = (\omega \otimes \mu)\big(X^*(R_g \otimes R_g)X\big).$$

Aby udowodnić formułę (65) musimy więc wykazać, że

$$(\omega \otimes \mu)\big(X^*(R_g \otimes R_g)X\big) = [\mathcal{Q}(f)h](g). \tag{66}$$

W tym celu wykonajmy poniższy rachunek:

$$\begin{aligned}(\omega \otimes \mathrm{id})\big((R_{z_1} \otimes L_{z_2})V(R_{z_3} \otimes R_{z_4})\big)h(g) &= L_{z_2}f(z_1 \cdot z_3)R_{z_4}h(g) \\ &= f((z_1 - z_2)gz_3)h(-z_2gz_4).\end{aligned}$$

Równość $h(g) = \mu(R_g)$ daje

$$\begin{aligned}&\Big((\omega \otimes \mathrm{id})\big((R_{z_1} \otimes L_{z_2})V(R_{z_3} \otimes R_{z_4})\big)h\Big)(g) \\ &\qquad = (\omega \otimes \mu)\big((R_{z_1-z_2} \otimes R_{-z_2})(R_g \otimes R_g)(R_{z_3} \otimes R_{z_4})\big).\end{aligned} \tag{67}$$

Niech $\vartheta \in \mathrm{Aut}(\mathrm{C}_\infty(\hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma}))$ będzie automorfizmem danym wzorem

$$\vartheta(f)(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) = f(\hat{\gamma}_1, -\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2)$$

Przez ciągłość, równanie (67) rozszerza się do:

$$\begin{aligned}&\big[(\omega \otimes \mathrm{id})\big((\pi^R \otimes \pi^L)(f_1)V(\pi^R \otimes \pi^R)(f_2)\big)\big]\, h(g) \\ &\qquad = (\omega \otimes \mu)\big((\pi^R \otimes \pi^R)\vartheta(f_1)(R_g \otimes R_g)(\pi^R \otimes \pi^R)(f_2)\big)\end{aligned}$$

dla wszystkich $f_1, f_2 \in C_b(\hat{\Gamma} \otimes \hat{\Gamma})$. Kładąc $f_1 = \Psi^\star$, $f_2 = \Psi$ dostajemy $\vartheta(\Psi^\star) = \overline{\Psi}$ oraz

$$[(\omega \otimes \mathrm{id})(\mathrm{YVX})]\mathrm{h(g)} = (\omega \otimes \mu)(\mathrm{X^*(R_g \otimes R_g)X}).$$

Ale $W = YVX$, więc

$$\mathcal{Q}(f)h(g) = (\omega \otimes \mu)(X^*(R_g \otimes R_g)X) = k(g).$$

Dowodzi to formuły (66) i kończy dowód naszego Twierdzenia. □

Przypuśćmy, że $f_n \in \mathcal{F}(G) \cap L^2(G)$ jest ciągiem funkcji zbieżnym do zera w sensie normy $L^2(G)$. Załóżmy, że istnieje granica $a = \lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}(f_n)$ w sensie normy operatorowej. Pokażemy, że wtedy $a = 0$. Niech funkcja $h \in \mathcal{F}(G) \cap L^2(G)$ będzie dana przez funkcjonał $\mu \in \mathrm{B}(L^2(G))_*$ a funkcje f_n będą dane przez funkcjonały $\omega_n \in \mathrm{B}(L^2(G))_*$. Rozważmy funkcję $\mathcal{Q}(f_n)h \in L^2(G)$. Z Twierdzenia 23 dostajemy

$$\mathcal{Q}(f_n)h(g) = (\omega_n \otimes \mu)(X^*(R_g \otimes R_g)X).$$

Zauważmy, że

$$(\omega_n \otimes \mu)\left(X^*(R_g \otimes R_g)X\right) = (\mu \otimes \omega_n)\left(X^{\Sigma *}(R_g \otimes R_g)X^{\Sigma}\right)$$

gdzie $X^{\Sigma} \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big)$ powstaje z X przez zamianę nóg. W takim razie

$$ah = \lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}(f_n)h = \lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}^{\Sigma}(h)f_n = 0$$

gdzie $\mathcal{Q}^{\Sigma}$ jest odwzorowaniem kwantyzacji dla 2-kocyklu Ψ^{Σ}. Powstaje on z Ψ przez zamianę miejscami zmiennych. Z gęstości zbioru $\mathcal{F}(G) \cap L^2(G)$ w $L^2(G)$ wynika, że $a = 0$. Powyższe rozważania wraz z Twierdzeniem 23 prowadzą do następującego twierdzenia:

Twierdzenie 24. *Niech $\mathcal{Q} : \mathcal{F}(G) \to \mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ będzie odwzorowaniem kwantyzacji zdefiniowanym powyżej. Jego obcięcie $\mathcal{Q} : \mathcal{F}(G) \cap L^2(G) \to \mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ jest domykalne w topologii $L^2(G)$ na $\mathcal{F}(G) \cap L^2(G)$ oraz topologii normowej na $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$. Odpowiednie domknięcie także będzie oznaczane przez $\mathcal{Q}$ a dziedzina domknięcie będzie oznaczana symbolem $\mathrm{D}(\mathcal{Q})$.*

Załóżmy, że $a \in \mathrm{M}\left(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\right)$. Wtedy $ah \in \mathrm{D}(\mathcal{Q})$ dla wszystkich $h \in \mathrm{D}(\mathcal{Q})$ oraz $\mathcal{Q}(ah) = a\mathcal{Q}(h)$.

Od tej pory będziemy zakładać, że grupa Γ jest izomorficzna z addytywną grupą liczb zespolonych $\mathbb{C}$ a 2-kocykl Ψ dany jest wzorem:

$$\Psi(z_1, z_2) = \exp(s\mathrm{iIm}(z_1\bar{z}_2)) \tag{68}$$

gdzie $s \in \mathbb{R}$. Niech ρ będzie działaniem $\mathbb{C}^2$ na $\mathrm{C}_\infty(G)$ za pomocą prawych i lewych przesunięć wzdłuż podgrupy $\Gamma = \mathbb{C}$ oraz $\left(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \mathbb{C}^2, \lambda, \hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\right)$ będzie skręconym $\mathbb{C}^2$-produktem (patrz Twierdzenie 10). Zauważmy, że

$$\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}(b) = \lambda_{s\bar{z}_1,-s\bar{z}_2}\hat{\rho}_{z_1,z_2}(b)\lambda^*_{s\bar{z}_1,-s\bar{z}_2} \tag{69}$$

dla wszystkich $b \in \mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \mathbb{C}^2$.

Odwzorowanie kwantyzacji $\mathcal{Q}$ zostało zdefiniowane z użyciem operatora multyplikatywnego unitarnego W. Z drugiej strony wiemy, że elementy algebry Landstada $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ powstają przez wycałkowanie skręconego działania grupy dualnej $\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ na elementach

$\mathrm{D}(\mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}) \subset \mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \mathbb{C}^2)$. Niech $f \in \mathrm{D}(\mathcal{Q})$. Naszym następnym celem będzie znalezienie $\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$-całkowalnego elementu $b_f \in \mathrm{D}(\mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi})$ takiego, że

$$\mathcal{Q}(f) = \mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}(b_f). \tag{70}$$

Przy okazji otrzymamy oszacowania normy elementu $\mathcal{Q}(f)$ przez normy sup funkcji f oraz jej pochodnych. Formuła (70) okaże się bardzo użyteczna w dalszej części pracy. Zaczniemy od udowodnienia dwóch pomocniczych lematów.

Lemat 9. *Niech $\Gamma \subset G$ będzie podgrupą abelową izomorficzną z grupą $\mathbb{C}$. Rozważmy reprezentację $\pi^R : \mathbb{C} \ni z \mapsto \pi^R(z) = R_z \in \mathrm{B}(L^2(G))$. Indukuje ona reprezentację algebry grupowej $\pi^R \in \mathrm{Rep}(\mathrm{C}_\infty(\mathbb{C}); L^2(G))$. Wprowadźmy operator różniczkowy $\partial_R = \pi^R(\mathrm{id})$ działający na $L^2(G)$, gdzie $\mathrm{id}(z) = z$. Wtedy dla $x \in \mathrm{D}((1+\partial_R^*\partial_R)^2)$ oraz $h \in \mathrm{C}_b(\mathbb{C})$ mamy*

$$\pi^R(h)x = \pi^R\Big(\frac{h}{(1+|z|^2)^2}\Big)\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2 x\big). \tag{71}$$

Dowód. Niech $u \in \mathrm{D}((1+\partial_R^*\partial_R)^2)$. Wtedy

$$\pi^R(h)x = \pi^R\left(\frac{h}{(1+|z|^2)^2}\right)\pi^R((1+|z|^2)^2)x = \pi^R\left(\frac{h}{(1+|z|^2)^2}\right)(1+\partial_R^*\partial_R)^2 x.$$

□

Poniżej sformułujemy wersję Lematu 9 z lewą reprezentacją grupy $\mathbb{C}$ na przestrzeni Hilberta $L^2(G)$.

Lemat 10. *Niech $\Gamma \subset G$ będzie podgrupą abelową izomorficzną z addytywną grupą $\mathbb{C}$. Rozważmy reprezentację $\pi^L : \mathbb{C} \ni z \mapsto \pi^L(z) = L_z \in \mathrm{B}(L^2(G))$. Indukuje ona reprezentację algebry grupowej $\pi^L \in \mathrm{Rep}(\mathrm{C}_\infty(\mathbb{C}); L^2(G))$. Wprowadźmy operator różniczkowy $\partial_L = \pi^L(\mathrm{id})$ działający na przestrzeni Hilberta $L^2(G)$, gdzie $\mathrm{id}(z) = z$. Wtedy dla $x \in D((1+\partial_L^*\partial_L)^2)$ oraz $h \in \mathrm{C}_b(\mathbb{C})$ mamy*

$$\pi^L(h)x = \pi^L\Big(\frac{h}{(1+|z|^2)^2}\Big)\big((1+\partial_L^*\partial_L)^2 x\big). \tag{72}$$

Powyższe lematy zastosujemy do wyliczenia elementu macierzowego operatora multyplikatywnego unitarnego $W = YVX$:

$$\langle x\otimes u|YVX|y\otimes v\rangle$$

przy założeniach, że $x, y, v \in \mathrm{D}((1+\partial_R^*\partial_R)^2)$ oraz $u \in \mathrm{D}((1+\partial_L^*\partial_L)^2)$. Dla 2-kocyklu postaci (68) mamy $Y = (\pi^R\otimes\pi^L)(\Psi)$, $X = (\pi^R\otimes\pi^R)(\Psi)$. Korzystając z Lematów 9 oraz 10 dostajemy

$$\begin{aligned}\langle x\otimes u|YVX|y\otimes v\rangle = {}& \langle (1+\partial_R^*\partial_R)^2 x\otimes(1+\partial_L^*\partial_L)^2 u| \\ & \times (\pi^R\otimes\pi^L)(h')V(\pi^R\otimes\pi^R)(h')|(1+\partial_R^*\partial_R)^2 y\otimes(1+\partial_R^*\partial_R)^2 v\rangle\end{aligned} \tag{73}$$

gdzie

$$h'(z_1,z_2) = \frac{\exp(s\mathrm{iIm}(z_1\bar{z}_2))}{(1+|z_1|^2)^2(1+|z_2|^2)^2}.$$

Łatwo zobaczyć, że funkcja $h' \in L^1(\mathbb{C}^2)$ jest całkowalna oraz jej transformata Fouriera

$$\mathcal{F}(h')(w_1, w_2) = \int dz_1 dz_2 \frac{\exp(\mathrm{iIm}(sz_1\bar{z}_2 - w_1z_1 - w_2z_2))}{(1+|z_1|^2)^2(1+|z_2|^2)^2} \tag{74}$$

znika szybciej niż dowolny wielomian od w_1 i w_2. W szczególności transformata Fouriera $\mathcal{F}(h') \in L^1(\mathbb{C}^2)$ jest całkowalna, co pozwala wyrazić operator $(\pi^R \otimes \pi^R)(h')$ za pomocą normowo zbieżnej całki:

$$\begin{aligned}(\pi^R \otimes \pi^R)(h') &= \int dw_1 dw_2 \mathcal{F}(h')(w_1, w_2) R_{w_1} \otimes R_{w_2} \\ &= \int dw_1 dw_2 \int dz_1 dz_2 \frac{\exp(\mathrm{iIm}(sz_1\bar{z}_2 - w_1z_1 - w_2z_2))}{(1+|z_1|^2)^2(1+|z_2|^2)^2} R_{w_1} \otimes R_{w_2}.\end{aligned} \tag{75}$$

Podobnie

$$\begin{aligned}(\pi^R \otimes \pi^L)(h') &= \int dw_1 dw_2 \mathcal{F}(h')(w_1, w_2) R_{w_1} \otimes L_{w_2} \\ &= \int dw_1 dw_2 \int dz_1 dz_2 \frac{\exp(\mathrm{iIm}(sz_1\bar{z}_2 - w_1z_1 - w_2z_2))}{(1+|z_1|^2)^2(1+|z_2|^2)^2} R_{w_1} \otimes L_{w_2}.\end{aligned} \tag{76}$$

Wstawiając (75) oraz (76) do równania (73) dostajemy

$$\begin{aligned}\langle x \otimes u | YVX | y \otimes v \rangle = \int & dw_1 dw_2 dw_1' dw_2' \Big(\langle (1 + \partial_L^* \partial_L)^2 u | \\ & \times \int dz_1 dz_2 \frac{\exp(\mathrm{iIm}(sz_1\bar{z}_2 - w_1z_1 - w_2z_2))}{(1+|z_1|^2)^2(1+|z_2|^2)^2} L_{w_2} \\ & \times \rho_{-w_1, w_1'}((1 + \partial_R^* \partial_R)^2 (1 + \partial_L^* \partial_L)^2 f) \\ & \times \int dz_1' dz_2' \frac{\exp(\mathrm{iIm}(sz_1'\bar{z}_2' - w_1'z_1' - w_2'z_2'))}{(1+|z_1'|^2)^2(1+|z_2'|^2)^2} R_{w_2'} | (1 + \partial_R^* \partial_R)^2 v \rangle \Big)\end{aligned}$$

Zauważmy, że :

$$\int dw_2 dz_2 \frac{\exp(\mathrm{iIm}(sz_1\bar{z}_2 - w_2z_2))}{(1+|z_2|^2)^2} L_{w_2} = L_{-s\bar{z}_1}(1 + \partial_L^* \partial_L)^{-2}$$

oraz

$$\int dw_2' dz_2' \frac{\exp(\mathrm{iIm}(sz_1'\bar{z}_2' - w_2'z_2'))}{(1+|z_2'|^2)^2} R_{w_2'} = R_{-s\bar{z}_1'}(1 + \partial_R^* \partial_R)^{-2}.$$

W takim razie

$$\begin{aligned}\langle x \otimes u | YVX | y \otimes v \rangle = \int dw_1 dw_1' \langle u | & \int dz_1 \frac{\exp(\mathrm{iIm}(-w_1z_1))}{(1+|z_1|^2)^2} L_{-s\bar{z}_1} \\ & \times \rho_{-w_1, w_1'}((1 + \partial_R^* \partial_R)^2 (1 + \partial_L^* \partial_L)^2 f) \\ & \times \int dz_1' \frac{\exp(\mathrm{iIm}(-w_1'z_1'))}{(1+|z_1'|^2)^2} R_{-s\bar{z}_1'} | v \rangle.\end{aligned}$$

Zamieniając zmienne całkowania z_1, z_1', w_1, w_1' na $-\frac{\bar{z}_1}{s}, -\frac{\bar{z}_1'}{s}, -s\bar{w}_1, -s\bar{w}_1'$ dostajemy

$$\begin{aligned}\langle x\otimes u|YVX|y\otimes v\rangle = \int dw_1 dw_1' \langle u| \int dz_1 \frac{\exp(\mathrm{iIm}(w_1 z_1))}{(1+s^{-2}|z_1|^2)^2} L_{z_1} \\ \times \rho_{s\bar{w}_1,-s\bar{w}_1'}((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f) \\ \times \int dz_1' \frac{\exp(\mathrm{iIm}(w_1' z_1'))}{(1+s^{-2}|z_1'|^2)^2} R_{z_1'}|v\rangle.\end{aligned} \tag{77}$$

Wprowadźmy funkcję

$$\tilde{h}(w) = \int dz \frac{\exp(\mathrm{iIm}(wz))}{(1+s^{-2}|z|^2)^2}. \tag{78}$$

Korzystając z równania (69) widzimy, że

$$\begin{aligned}\int dz_1 \frac{\exp(\mathrm{iIm}(w_1 z_1))}{(1+s^{-2}|z_1|^2)^2} L_{z_1} &= \pi^{\mathrm{kan}}\left(\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{w_1,w_2}(\lambda^L(\tilde{h}))\right), \\ \int dz_1' \frac{\exp(\mathrm{iIm}(w_1' z_1'))}{(1+s^{-2}|z_1'|^2)^2} R_{z_1'} &= \pi^{\mathrm{kan}}\left(\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{w_1,w_2}(\lambda^R(\tilde{h}))\right), \\ \rho_{s\bar{w}_1,-s\bar{w}_1'}((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f)) &= \pi^{\mathrm{kan}}\left(\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{w_1,w_2}((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f)\right).\end{aligned} \tag{79}$$

gdzie $\pi^{\mathrm{kan}} \in \mathrm{Rep}(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \mathbb{C}^2; L^2(G))$ jest reprezentacją wprowadzoną w Uwadze 6. Łącząc równania (77) i (79) dostajemy

$$\begin{aligned}&\langle x\otimes u|YVX|y\otimes v\rangle \\ &= \int dw_1 dw_1' \langle u|\pi^{\mathrm{kan}}\Big(\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{w_1,w_2}\big(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f\big)\lambda^R(\tilde{h})\big)\Big)|v\rangle.\end{aligned} \tag{80}$$

W powyższym wyrażeniu pojawia się element $\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f\big)\lambda^R(\tilde{h})$ do którego aplikujemy skręcone działanie grupy dualnej $\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$. Pokażemy teraz, że jeśli $f \in \mathrm{C}_\infty(G)$ jest odpowiedniej klasy gładkości to element $\lambda^L(\tilde{h})(1+\partial_R^*\partial_R)^2\left((1+\partial_L^*\partial_L)^2 f\right)\lambda^R(\tilde{h})$ jest w dziedzinie odwzorowania uśrednienia $\mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$. Spostrzeżenie to pozwoli nam w wyrażeniu (80) wejść z całką pod iloczyn skalarny.

Lemat 11. *Niech ∂_L, ∂_R, $\tilde{h}$ będą operatorami różniczkowymi i funkcją wprowadzonymi powyżej. Niech $a \in \mathrm{C}_\infty(G)$ będzie funkcją taką, że pochodne $\partial_R^k \partial_R^{l^*} \partial_L^{k'} \partial_L^{l'^*} a$ istnieją dla $k, l, k', l' \leq 2$ oraz znikają w nieskończoności.*

Wtedy element $\lambda^L(\tilde{h})a\lambda^R(\tilde{h})$ jest $\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$-całkowalny oraz istnieje stała $c \in \mathbb{R}_+$ taka, że

$$\|\mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}(\lambda^L(\tilde{h})a\lambda^R(\tilde{h}))\| \leq c \max_{k,k',l,l'\leq 2} \sup_{g\in G} |\partial_R^k \partial_R^{l^*} \partial_R^{k'} \partial_R^{l'^*} a(g)|.$$

Dowód. Korzystając z równania (31) widzimy, że nasz lemat będzie prawdziwy jeśli wyrazimy $\lambda^L(\tilde{h})a\lambda^R(\tilde{h})$ jako kombinację liniową elementów postaci $h_1 a' h_2$ gdzie $h_1, h_2 \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{C}^2)$ są całkowalne z kwadratem oraz $a' \in \mathrm{C}_\infty(G)$.

Zauważmy że:

$$\lambda^L(\tilde{h})a\lambda^R(\tilde{h}) = \lambda^L(\tilde{h})\lambda^R\big((1+|z|^2)^{-2}\big)\lambda^R\big((1+|z|^2)^2\big)a\lambda^L\big((1+|z|^2)^2\big)\lambda^L\big((1+|z|^2)^{-2}\big)\lambda^R(\tilde{h}).$$

Skoncentrujmy naszą uwagę na elemencie

$$\lambda^R\big((1+|z|^2)^2\big)a\lambda^L\big((1+|z|^2)^2\big).$$

Komutowanie $\lambda^R\big((1+|z|^2)^2\big)$ z elementem a będzie produkowało pochodne $\partial_R^k\partial_R^{l*}a$ gdzie $k,l\leq 2$, pomnożone z prawej strony przez wyrażenia wielomianowe postaci $\lambda^R(z^k\bar{z}^l)$. Poniższy rachunek obrazuje ten mechanizm:

$$\lambda^R(z)a=[\lambda^R(z),a]+a\lambda^R(z)=\partial_R a+a\lambda^R(z).$$

Przypomnijmy, że $\tilde{h}\in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{C})$ znika szybciej w nieskończoności niż dowolny wielomian, więc po przekomutowaniu elementu $\lambda^R\big((1+|z|^2)^2\big)$ z funkcją a można powstałe wielomianowe wyrażenia zaabsorbować do $\lambda^R(\tilde{h})$ otrzymując wyrażenie ograniczone. Powtarzając powyższe rozumowanie dla elementu $\lambda^L\big((1+|z|^2)^2\big)$ widzimy, że $\lambda^L(\tilde{h})a\lambda^R(\tilde{h})$ jest kombinacją wyrażeń postaci $h_1a'h_2$ gdzie $h_1,h_2\in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{C}^2)$ są funkcjami całkowalnymi z kwadratem oraz a' jest dane przez pochodne $\partial_R^k\partial_R^{l*}\partial_L^{k'}\partial_L^{l'*}a$ gdzie $k,l\leq 2$. Kończy to dowód Twierdzenia. □

Zastosowanie powyższego lematu do $a=(1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2f$ w połączeniu ze wzorem (80) daje

Twierdzenie 25. *Niech ∂_R, ∂_L będą operatorami różniczkowymi oraz $\tilde{h}\in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{C})$ będzie funkcją wprowadzonymi powyżej. Niech f będzie funkcją kwantowalną taką, że pochodne $\partial_R^k\partial_R^{l*}\partial_L^{k'}\partial_L^{l'*}f$ istnieją dla $k,l,k',l'\leq 4$ oraz znikają w nieskończoności, $\mathcal{Q}(f)\in \mathrm{B}(L^2(G))$ będzie kwantyzacją f, $\pi^{\mathrm{kan}}\in \mathrm{Rep}(\mathrm{C}_\infty(G)^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi};L^2(G))$ będzie reprezentacją wprowadzona w Uwadze 6 oraz $\mathfrak{E}^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi}$ będzie odwzorowaniem uśredniania dla skręconego $\mathbb{C}^2$-produktu $(\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes_\rho\mathbb{C}^2,\lambda,\hat{\rho}^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi})$.*

Wtedy $\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2f\big)\lambda^R(\tilde{h})\in \mathrm{D}(\mathfrak{E}^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi})$ oraz

$$\mathcal{Q}(f)=\pi^{\mathrm{kan}}\left(\mathfrak{E}^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi}\big(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2f\big)\lambda^R(\tilde{h})\big)\right). \tag{81}$$

Ponadto istnieje stała $c\in\mathbb{R}_+$ taka, że

$$\|\mathcal{Q}(f)\|\leq c\max_{k,k',l,l'\leq 4}\sup_{g\in G}|\partial_R^k\partial_R^{l*}\partial_R^{k'}\partial_R^{l'*}f(g)|. \tag{82}$$

Niech $\mathcal{G}_\infty^\Gamma(G)\subset \mathrm{C}_\infty(G)$ będzie zbiorem funkcji ciągłych na G, takich że pochodne $\partial_R^k\partial_R^{l*}\partial_L^{k'}\partial_L^{l'*}f$ istnieją dla $k,l,k',l'\leq 4$ oraz znikają w nieskończoności.

Twierdzenie 26. *Niech $\mathcal{G}_\infty^\Gamma(G)$ będzie zbiorem funkcji wprowadzonych powyżej, $\tilde{h}\in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{C})$ będzie funkcją wprowadzoną wzorem (78) oraz $\mathfrak{E}^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi}$ będzie odwzorowaniem uśrednienia dla $\mathbb{C}^2$-produktu $(\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes_\rho\mathbb{C}^2,\lambda,\hat{\rho}^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi})$. Wtedy dla $f\in\mathcal{G}_\infty^\Gamma(G)$ mamy*

$$\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2f\big)\lambda^R(\tilde{h})\in \mathrm{D}(\mathfrak{E}^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi})$$

oraz

$$\mathfrak{E}^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi}\left(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2f\big)\lambda^R(\tilde{h})\right)\in \mathrm{C}_\infty(G)^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi}. \tag{83}$$

Dowód. Zauważmy, że elementy $\mathcal{G}^{\Gamma}_{\infty}(G)$ można przybliżać w normie zadanej przez lewą stronę równania (82) przez gładkie funkcje kwantowalne. Z drugiej strony wiadomo, że dla funkcji kwantowalnych

$$\mathcal{Q}(f) = \pi^{\mathrm{kan}}\left(\mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\big(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f\big)\lambda^R(\tilde{h})\big)\right) \in \mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}.$$

Z oszacowania (82) dostajemy tezę. □

Niech $\mathcal{G}^{\Gamma}_{b}(G) \subset \mathrm{C}_b(G)$ będzie zbiorem funkcji ciągłych i ograniczonych, takich że pochodne $\partial_R^k\partial_R^{*l}\partial_R^{k'}\partial_R^{*l'} f$ istnieją dla $k, l, k', l' \leq 4$ oraz są ograniczone. Wtedy dla $f \in \mathcal{G}^{\Gamma}_{b}(G)$ mamy

$$\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f\big)\lambda^R(\tilde{h}) \in \mathrm{D}(\mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}).$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\mathcal{Q}_\Gamma(f) \equiv \mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\big(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f\big)\lambda^R(\tilde{h})\big). \tag{84}$$

Odwzorowanie $\mathcal{G}^{\Gamma}_{b}(G) \ni f \mapsto \|f\|_\Gamma = \max_{k,k',l,l'\leq 4}\sup_{g\in G}|\partial_R^k\partial_R^{l^*}\partial_R^{k'}\partial_R^{l'^*} f(g)| \in \mathbb{R}$ jest normą na $\mathcal{G}^{\Gamma}_{b}(G)$. Jasne jest, że $\mathcal{G}^{\Gamma}_{\infty}(G) \subset \mathcal{G}^{\Gamma}_{b}(G)$.

Stwierdzenie 10. *Niech $(\mathcal{G}^{\Gamma}_{b}(G), \|\cdot\|_\Gamma)$ oraz $(\mathcal{G}^{\Gamma}_{\infty}(G), \|\cdot\|_\Gamma)$ będą przestrzeniami funkcji wprowadzonymi powyżej. Niech $f_i \in \mathcal{G}^{\Gamma}_{b}(G)$ będzie ciągiem funkcji oraz $f \in \mathcal{G}^{\Gamma}_{b}(G)$. Załóżmy, że $\sup_i \|f_i\|_\Gamma < \infty$ oraz $\lim_i \|(f_i - f)h\|_\Gamma = 0$ dla wszystkich $h \in \mathcal{G}^{\Gamma}_{\infty}(G)$.*

Wtedy $\mathcal{Q}_\Gamma(f_i), \mathcal{Q}_\Gamma(f) \in \mathrm{M}\left(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\right)$ oraz $\mathcal{Q}_\Gamma(f_i)$ zbiega do $\mathcal{Q}_\Gamma(f)$ w sensie topologii strict na $\mathrm{M}\left(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\right)$. Ponadto jeśli $f \in \mathcal{G}^{\Gamma}_{\infty}(G)$ to $\mathcal{Q}_\Gamma(f) \in \mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$.

Dowód. Dla $a \in \mathrm{C}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}(G)$ mamy

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\Gamma(f_i)a &= \mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\left(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f_i\big)\lambda^R(\tilde{h})\big)\right)a \\ &= \mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\left(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f_i\big)\lambda^R(\tilde{h})a\right).\end{aligned} \tag{85}$$

Niech $\rho^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ będzie działaniem $\mathbb{C}^2$ na $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ (patrz równanie (36)) oraz załóżmy, że a jest elementem gładkim ze względu na to działanie. Wtedy

$$\lambda^R(\tilde{h})a = -\lambda^R(\tilde{h})[\lambda^R((1+|z|^2)^k), a]\lambda^R((1+|z|^2)^{-k}) + \lambda^R(\tilde{h}(1+|z|^2)^k)a\lambda^R((1+|z|^2)^{-k})$$

dla wszystkich k. Powyższa równość wstawiona do (85) daje

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\Gamma(f_i)a = \mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}&\left(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f_i\big)\lambda^R(\tilde{h}(1+|z|^2)^k)a\lambda^R((1+|z|^2)^{-k}\right) \\ -\mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}&\left(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f_i\big)\lambda^R(\tilde{h})[\lambda^R((1+|z|^2)^k), a]\lambda^R((1+|z|^2)^{-k}\right).\end{aligned} \tag{86}$$

Zauważy, że ciąg

$$\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f_i\big)\lambda^R(\tilde{h}(1+|z|^2)^k)a$$

elementów $\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \mathbb{C}^2$ jest normowo zbieżny do

$$\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f\big)\lambda^R(\tilde{h}(1+|z|^2)^k)a.$$

Podobnie, ciąg

$$\Big(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f_i\big)\lambda^R(\tilde{h})[\lambda^R((1+|z|^2)^k),a]\lambda^R((1+|z|^2)^{-k})\Big)$$

elementów $\mathrm{C}_\infty(G)\rtimes_\rho\mathbb{C}^2$ jest normowo zbieżny do

$$\Big(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f\big)\lambda^R(\tilde{h})[\lambda^R((1+|z|^2)^k),a]\lambda^R((1+|z|^2)^{-k})\Big)\,.$$

Biorąc dostatecznie duże k oraz korzystając z nierówności (31) widzimy, że ciąg $\mathcal{Q}_\Gamma(f_i)a$ jest normowo zbieżny do $\mathcal{Q}_\Gamma(f)a$.

Uwolnijmy się od założenia gładkości elementu $a\in\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$. Zbiór elementów gładkich jest gęsty w $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$. Niech więc $a\in\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ oraz a_ϵ będzie elementem gładkim takim, że $\|a-a_\epsilon\|\leq\epsilon$. Wtedy

$$\|\left(\mathcal{Q}_\Gamma(f_i)-\mathcal{Q}_\Gamma(f)\right)a\|\leq\|\left(\mathcal{Q}_\Gamma(f_i)-\mathcal{Q}_\Gamma(f)\right)(a-a_\epsilon)\|+\|\left(\mathcal{Q}_\Gamma(f_i)-\mathcal{Q}_\Gamma(f)\right)a_\epsilon\|.$$

Ograniczoność ciągu f_i w normie $\|\cdot\|_\Gamma$ implikuje ograniczoność ciągu $\mathcal{Q}(f_i)$ co wraz z powyższą nierównością daje

$$\lim_i \mathcal{Q}_\Gamma(f_i)a=\mathcal{Q}_\Gamma(f)a \tag{87}$$

dla wszystkich $a\in\mathrm{C}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}(G)$.

Nie wiemy jeszcze czy $\mathcal{Q}_\Gamma(f_i)\in\mathrm{M}\left(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\right)$. Aby to wykazać zauważmy, że dla każdej funkcji $k\in\mathcal{G}_b^\Gamma(G)$ można znaleźć ciąg funkcji $k_i\in\mathcal{G}_\infty^\Gamma(G)$ taki, że k oraz k_i spełniają tezę naszego stwierdzenia. Korzystając z Twierdzenia 26 oraz z równania (87) widzimy, że $\mathcal{Q}(k)\in\mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi})$.

Powyższy argument wraz z równaniem (87) pokazują, że $\mathcal{Q}_\Gamma(f_i),\mathcal{Q}_\Gamma(f)$ są elementami mnożników $\mathrm{M}\left(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\right)$ oraz $\lim_i\mathcal{Q}_\Gamma(f_i)=\mathcal{Q}_\Gamma(f)$ w sensie topologii *strict*. ☐

Z powyższego stwierdzenia wynika, że wzór

$$\mathcal{Q}_\Gamma(f)\equiv\mathfrak{E}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\big(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+\partial_R^*\partial_R)^2(1+\partial_L^*\partial_L)^2 f\big)\lambda^R(\tilde{h})\big),$$

definiuje odwzorowanie $\mathcal{Q}_\Gamma:\mathcal{G}_b^\Gamma(G)\to\mathrm{M}\left(\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\right)$.

Niech $\mathcal{G}(G)$ będzie zbiorem funkcji gładkich na G o zwartych nośnikach. Na koniec, udowodnimy użyteczny w dalszej części pracy

Lemat 12. *Niech G będzie grupą lokalnie zwartą, $\Gamma\subset G$ będzie jej abelową podgrupą izomorficzną z addytywną grupą $\mathbb{C}$, Ψ będzie 2-kocyklem na $\hat{\Gamma}$ danym wzorem $\Psi(z_1,z_2)=\exp(s\mathrm{iIm}(z_1\bar{z}_2))$ oraz $\mathcal{G}(G)\subset\mathrm{C}_\infty(G)$ będzie zbiorem funkcji gładkich o zwartych nośnikach. Wtedy $\mathcal{G}(G)\subset\mathrm{D}(\mathcal{Q}_\Gamma)$ oraz $\overline{\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))}^{\|\cdot\|}=\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$.*

Dowód. Zauważmy, że zbiór $\{\omega_{x,y}:x,y\in\mathcal{G}(G)\}$ jest liniowo gęsty w $B(L^2(G))_*$. W takim razie zbiór $\{(\omega_{x,y}\otimes\mathrm{id})W:x,y\in\mathcal{G}(G)\}$ jest liniowo gęstym podzbiorem $\mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$. Z drugiej strony funkcja $G\ni g\mapsto\omega_{x,y}(R_g)\in\mathbb{C}$ jest elementem $\mathcal{G}(G)$ oraz z równania (81) widzimy, że

$$\{(\omega_{x,y}\otimes\mathrm{id})W:x,y\in\mathcal{G}(G)\}\subset\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G)).$$

Pokazuje to, że podprzestrzeń wektorowa $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G)) \subset \mathrm{C}_\infty(G)^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}$ zawiera podzbiór liniowo gęsty więc sama jest gęsta. $\square$

ROZDZIAŁ 5

Kwantowa Grupa Heisenberga-Lorentza.

W niniejszym rozdziale opiszemy Kwantową Grupę Heisenberga-Lorentza na poziomie $*$-algebry Hopfa, przestrzeni Hilberta oraz na najgłębszym, C*-algebraicznym poziomie.

1. Kwantowa Grupa Heisenberga-Lorentza na poziomie $*$-algebry Hopfa.

Klasyfikacja Kwantowych Grup Lorentza na poziomie $*$-algebr Hopfa została podana w pracy [**20**]. Jednym z przypadków jest rodzina $*$-algebr Hopfa numerowanych rzeczywistym parametrem $s \in \mathbb{R}$ zwana Kwantową Grupą Heisenberga-Lorentza. Jako $*$-algebra jest ona generowana przez czwórkę elementów $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ spełniających następujące relacje komutacyjne:

$$\begin{gathered}
\hat{\alpha}\hat{\beta} = \hat{\beta}\hat{\alpha} \\
\hat{\alpha}\hat{\gamma} = \hat{\gamma}\hat{\alpha} \\
\hat{\beta}\hat{\delta} = \hat{\delta}\hat{\beta} \\
\hat{\gamma}\hat{\delta} = \hat{\delta}\hat{\gamma} \\
\hat{\beta}\hat{\gamma} = \hat{\gamma}\hat{\beta} \\
\hat{\alpha}\hat{\delta} = \hat{\delta}\hat{\alpha} \\
\hat{\alpha}\hat{\delta} = 1 + \hat{\beta}\hat{\gamma}
\end{gathered} \tag{88}$$

$$\begin{array}{llll}
\hat{\alpha}\hat{\alpha}^* + s\hat{\gamma}\hat{\gamma}^* = \hat{\alpha}^*\hat{\alpha} & & & \\
\hat{\alpha}\hat{\beta}^* + s\hat{\gamma}\hat{\delta}^* = \hat{\beta}^*\hat{\alpha} & \hat{\beta}\hat{\beta}^* + s\hat{\delta}\hat{\delta}^* = \hat{\beta}^*\hat{\beta} + s\hat{\alpha}^*\hat{\alpha} & & \\
\hat{\alpha}\hat{\gamma}^* = \hat{\gamma}^*\hat{\alpha} & \hat{\beta}\hat{\gamma}^* = \hat{\gamma}^*\hat{\beta} & \hat{\gamma}\hat{\gamma}^* = \hat{\gamma}^*\hat{\gamma} & \\
\hat{\alpha}\hat{\delta}^* = \hat{\delta}^*\hat{\alpha} & \hat{\beta}\hat{\delta}^* = \hat{\delta}^*\hat{\beta} + s\hat{\gamma}^*\hat{\alpha} & \hat{\gamma}\hat{\delta}^* = \hat{\delta}^*\hat{\gamma} & \hat{\delta}\hat{\delta}^* = \hat{\delta}^*\hat{\delta} + s\hat{\gamma}\hat{\gamma}^*
\end{array}$$

Komnożenie, koodwrotność oraz kojedynka działają na generatorach w sposób standardowy:

$$\begin{array}{lll}
\Delta(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\alpha} + \hat{\beta} \otimes \hat{\gamma} & \kappa(\hat{\alpha}) = \hat{\delta} & \varepsilon(\hat{\alpha}) = 1 \\
\Delta(\hat{\beta}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\beta} + \hat{\beta} \otimes \hat{\delta} & \kappa(\hat{\beta}) = -\hat{\beta} & \varepsilon(\hat{\beta}) = 0 \\
\Delta(\hat{\gamma}) = \hat{\gamma} \otimes \hat{\alpha} + \hat{\delta} \otimes \hat{\gamma} & \kappa(\hat{\gamma}) = -\hat{\gamma} & \varepsilon(\hat{\gamma}) = 0 \\
\Delta(\hat{\delta}) = \hat{\gamma} \otimes \hat{\beta} + \hat{\delta} \otimes \hat{\delta}, & \kappa(\hat{\delta}) = \hat{\alpha} & \varepsilon(\hat{\delta}) = 1.
\end{array} \tag{89}$$

$*$-algebrę generowaną przez cztery elementy $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ spełniające relacje (88) oznaczać będziemy symbolem $\mathcal{A}^s$. Położenie $\hat{\gamma} = 0$ w równaniach (88) prowadzi do $*$-algebry Hopfa $\mathcal{A}^s_0$ generowanej przez elementy $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_0^{-1}, \hat{\beta}_0$ spełniające relacje

$$\begin{array}{lll}
\hat{\alpha}_0\hat{\beta}_0 = \hat{\beta}_0\hat{\alpha}_0 & \hat{\alpha}_0\hat{\alpha}_0^* = \hat{\alpha}_0^*\hat{\alpha}_0 & \\
\hat{\alpha}_0\hat{\alpha}_0^{-1} = \hat{\alpha}_0^{-1}\hat{\alpha}_0 = 1 & \hat{\alpha}_0\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0^*\hat{\alpha}_0 & \hat{\beta}_0\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0^*\hat{\beta}_0 + s(\hat{\alpha}_0^*\hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_0^{*-1}\hat{\alpha}_0^{-1})
\end{array} \tag{90}$$

gdzie komnożenie, koodwrotność oraz kojedynka dane są formułami:

$$\begin{array}{lll} \Delta(\hat{\alpha}_0)=\hat{\alpha}_0\otimes\hat{\alpha}_0 & \kappa(\hat{\alpha}_0)=\hat{\alpha}_0^{-1} & \varepsilon(\hat{\alpha}_0)=1 \\ \Delta(\hat{\beta}_0)=\hat{\alpha}_0\otimes\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_0\otimes\hat{\alpha}_0^{-1} & \kappa(\hat{\beta}_0)=-\hat{\beta}_0 & \varepsilon(\hat{\beta}_0)=0 \end{array} \tag{91}$$

Innymi słowy, istnieje epimorfizm $*$-algebr Hopfa: $\pi_0 : \mathcal{A}^s \to \mathcal{A}^s_0$, który na generatorach dany jest formułą:

$$\begin{array}{ll} \pi_0(\hat{\alpha})=\hat{\alpha}_0 & \pi_0(\hat{\beta})=\hat{\beta}_0 \\ \pi_0(\hat{\gamma})=0 & \pi_0(\hat{\delta})=\hat{\alpha}_0^{-1}. \end{array} \tag{92}$$

Na poziomie klasycznym odpowiada on włożeniu podgrupy macierzy górnotrójkątnych w grupę $SL(2,\mathbb{C})$.

2. Kwantowa Grupa Heisenberga-Lorentza na poziomie przestrzeni Hilberta.

W niniejszym rozdziale opiszemy interesujące reprezentacje związków komutacyjnych (88) za pomocą operatorów działających na przestrzeni Hilberta. Okaże się, że struktura grupy kwantowej ma swoje odbicie w zbiorze tych reprezentacji.

Zauważmy, że element $\hat{\gamma}$ jest w centrum $*$-algebry $\mathcal{A}^s$. W takim razie pary $(\hat{\alpha}, -s\hat{\gamma}^*\hat{\gamma})$ oraz $(\hat{\delta}, s\hat{\gamma}^*\hat{\gamma})$ spełniają relacje komutacyjne Heisenberga. Ponadto $\hat{\alpha}$ komutuje z elementem $\hat{\delta}$ oraz $\hat{\delta}^*$. Jeśli $\hat{\gamma}$ byłby elementem odwracalnym to $\hat{\beta}$ byłby wyznaczony z równania $\hat{\gamma}\hat{\beta} = \hat{\alpha}\hat{\delta} - 1$. Spostrzeżenia te nasuwają następującą definicję:

Definicja 14. Niech H będzie przestrzenią Hilberta oraz $\mathcal{C}(H)$ będzie zbiorem operatorów domkniętych działających na H. Symbolem $H_{\hat{\gamma}}(\mathcal{A}^s) \subset \mathcal{C}(H)\times\mathcal{C}(H)\times\mathcal{C}(H)$ będziemy oznaczać zbiór trójek operatorów $(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ takich, że:

1. $\tilde{\gamma}$ jest odwracalnym, normalnym operatorem działającym na H.
2. Pary $(\tilde{\alpha}, -s\tilde{\gamma}^*\tilde{\gamma})$ oraz $(\tilde{\delta}, s\tilde{\gamma}^*\tilde{\gamma})$ są reprezentacjami algebry Liego grupy Heisenberga pochodzącymi od wzajemnie komutujących reprezentacji $U^{\tilde{\alpha}}$, $U^{\tilde{\delta}}$ grupy Heisenberga na H.
3. Reprezentacje $U^{\tilde{\alpha}}$ oraz $U^{\tilde{\delta}}$ komutują z operatorem $\tilde{\gamma}$.

Rozważmy teraz reprezentacje związków (88), w których $\tilde{\gamma} = 0$. Przypadek ten sprowadza się do reprezentacji związków (90). Stąd poniższa definicja:

Definicja 15. Niech H będzie przestrzenią Hilberta oraz $\mathcal{C}(H)$ będzie zbiorem operatorów domkniętych działających na H. Symbolem $H_0(\mathcal{A}^s) \subset \mathcal{C}(H)\times\mathcal{C}(H)$ będziemy oznaczać zbiór par operatorów $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ takich, że:

1. $\tilde{\alpha}$ jest odwracalnym, normalnym operatorem działającym na H.
2. Para $\left(\tilde{\beta}, s(\tilde{\alpha}^*\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}^{*-1}\tilde{\alpha}^{-1})\right)$ jest reprezentacją algebry Liego grupy Heisenberga całkowalną do reprezentacji grupy $U^{\tilde{\beta}}$.
3. Reprezentacja $U^{\tilde{\beta}}$ komutuje z operatorem $\tilde{\alpha}$.

Dowolna reprezentacja związków komutacyjnych (88) na poziomie przestrzeni Hilberta jest z definicji sumą prostą elementów $H_0(\mathcal{A}^s)$ oraz $H_{\hat{\gamma}}(\mathcal{A}^s)$:

Definicja 16. Niech H będzie przestrzenią Hilberta oraz $\mathcal{C}(H)$ będzie zbiorem operatorów domkniętych działających na H. Niech $\tilde{\gamma} \in \mathcal{C}(H)$ będzie operatorem normalnym. Wprowadźmy oznaczenie $H' = \ker\tilde{\gamma}$, $H'' = \ker\tilde{\gamma}^{\perp}$ oraz $\tilde{\gamma}'' = \tilde{\gamma}|_{H''}$. Symbolem $H(\mathcal{A}^s) \subset \mathcal{C}(H)^4$ będziemy oznaczać zbiór czwórek operatorów $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ takich, że istnieją $(\tilde{\alpha}', \tilde{\beta}') \in H_0'(\mathcal{A}^s)$, $(\tilde{\alpha}'', \tilde{\gamma}'', \tilde{\delta}'') \in H_{\hat{\gamma}}''(\mathcal{A}^s)$ takie, że

$$\begin{array}{ll} \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}' \oplus \tilde{\alpha}'' & \tilde{\beta} = \tilde{\beta}' \oplus \tilde{\gamma}''^{-1}(\tilde{\alpha}''\tilde{\delta}'' - 1) \\ \tilde{\gamma} = 0 \oplus \tilde{\gamma}'' & \tilde{\delta} = \tilde{\alpha}'^{-1} \oplus \tilde{\delta}'' \end{array} \tag{93}$$

gdzie $H = H' \oplus H''$.

Niech H, H' będą przestrzeniami Hilberta oraz $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\delta}_1) \in H(\mathcal{A}^s), (\tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_2, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\delta}_2) \in H'(\mathcal{A}^s)$. Naszym następnym celem będzie konstrukcja czwórki operatorów $(\tilde{\alpha}_3, \tilde{\beta}_3, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\delta}_3) \in (H \otimes H')(\mathcal{A}^s)$ formalnie danej równaniami:

$$\begin{array}{ll} \tilde{\alpha}_3 = \tilde{\alpha}_1 \otimes \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\beta}_1 \otimes \tilde{\gamma}_2 & \tilde{\beta}_3 = \tilde{\alpha}_1 \otimes \tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_1 \otimes \tilde{\delta}_2 \\ \tilde{\gamma}_3 = \tilde{\gamma}_1 \otimes \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\delta}_1 \otimes \tilde{\gamma}_2 & \tilde{\delta}_3 = \tilde{\gamma}_1 \otimes \tilde{\beta}_2 + \tilde{\delta}_1 \otimes \tilde{\delta}_2. \end{array} \tag{94}$$

Głównym problemem jest nadanie powyższym formułą ścisłego sensu (przy dodawaniu operatorów nieograniczonych należy zachować ostrożność). Z Definicji 16, każda reprezentacja związków komutacyjnych (88) jest sumą prostą reprezentacji w której $\tilde{\gamma} = 0$ oraz reprezentacji, w której $\tilde{\gamma}$ jest operatorem odwracalnym. W takim razie wystarczy rozpatrzyć trzy przypadki:

Przypadek I: $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}' = 0$.

Sprowadza się on do rozważenia pary reprezentacji $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in H_0(\mathcal{A}^s), (\tilde{\alpha}', \tilde{\beta}') \in H_0'(\mathcal{A}^s)$. Korzystając ze Stwierdzenia 2 widzimy, że para $(\tilde{\alpha} \otimes \tilde{\alpha}', \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta}' \dotplus \tilde{\beta}' \oplus \tilde{\alpha}^{-1}) \in (H \otimes H')_0(\mathcal{A}^s)$. Stąd czwórka operatorów

$$\begin{array}{ll} \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\alpha}' & \tilde{\beta}_1 = \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\beta}' \dotplus \tilde{\beta} \otimes \tilde{\alpha}' \\ \tilde{\gamma}_1 = 0 & \tilde{\delta}_1 = \tilde{\alpha}^{-1} \otimes \tilde{\alpha}'^{-1} \end{array} \tag{95}$$

jest elementem $(H \otimes H')(\mathcal{A}^s)$.

Przypadek II: $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$-odwracalne.

Sprowadza się on do rozważenia pary reprezentacji $(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) \in H_{\hat{\gamma}}(\mathcal{A}^s), (\tilde{\alpha}', \tilde{\gamma}', \tilde{\delta}') \in H_{\hat{\gamma}}'(\mathcal{A}^s)$. Korzystając ze Stwierdzenia 2 widzimy, że

$$\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma} \otimes \tilde{\alpha}' \dotplus \tilde{\delta} \otimes \tilde{\gamma}' \tag{96}$$

jest normalnym, odwracalnym operatorem działającym na $H \otimes H'$. Ponadto komutuje on z $\tilde{\alpha} \otimes 1$ oraz $1 \otimes \tilde{\delta}'$. W takim razie następujące operatory są gęsto określonymi, domykalnymi operatorami działającymi na $H \otimes H'$:

$$\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\gamma}_1(\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\alpha} \otimes 1) - \tilde{\gamma}^{-1} \otimes \tilde{\gamma}' \quad \tilde{\delta}_1 = \tilde{\gamma}_1(1 \otimes \tilde{\gamma}'^{-1}\tilde{\delta}') - \tilde{\gamma} \otimes \tilde{\gamma}'^{-1}, \tag{97}$$

oraz po domknięciu mamy $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\delta}_1) \in (H \otimes H')_{\hat{\gamma}}(\mathcal{A}^s)$. Widzimy więc, że czwórka operatorów

$$\begin{array}{ll} \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\gamma}_1(\tilde{\gamma}^{-1}\tilde{\alpha} \otimes 1) - \tilde{\gamma}^{-1} \otimes \tilde{\gamma}' & \tilde{\beta}_1 = \tilde{\gamma}_1^{-1}(\tilde{\alpha}_1\tilde{\delta}_1 - 1) \\ \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma} \otimes \tilde{\alpha}' \dotplus \tilde{\delta} \otimes \tilde{\gamma}' & \tilde{\delta}_1 = \tilde{\gamma}_1(1 \otimes \tilde{\gamma}'^{-1}\tilde{\delta}') - \tilde{\gamma} \otimes \tilde{\gamma}'^{-1} \end{array} \tag{98}$$

jest elementem $(H \otimes H')(\mathcal{A}^s)$.

Przypadek III: $\tilde{\gamma} = 0$, $\tilde{\gamma}'$-odwracalny.

Sprowadza się on do rozważenia reprezentacji $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in H_0(\mathcal{A}^s)$ oraz $(\tilde{\alpha}', \tilde{\gamma}', \tilde{\delta}') \in H'_{\hat{\gamma}}(\mathcal{A}^s)$. Jest oczywiste, że $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\gamma}'$ jest odwracalnym operatorem normalnym. Rozważmy operatory

$$\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\alpha}' \dotplus \tilde{\beta} \otimes \tilde{\gamma}' \text{ oraz } \tilde{\delta}_1 = \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\delta}'.$$

Korzystając ze Stwierdzenia 2 można pokazać, że trójka $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\delta}_1) \in (H \otimes H')_{\hat{\gamma}}(\mathcal{A}^s)$. W takim razie czwórka operatorów

$$\begin{array}{ll} \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\alpha}' \dotplus \tilde{\beta}_0 \otimes \tilde{\gamma}' & \tilde{\beta}_1 \ = \ \tilde{\gamma}_1^{-1}(\tilde{\alpha}_1 \tilde{\delta}_1 - 1) \\ \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\gamma}' & \tilde{\delta}_1 = \tilde{\alpha} \otimes \tilde{\delta}' \end{array} \tag{99}$$

jest elementem $(H \otimes H')(\mathcal{A}^s)$.

3. Kwantowa Grupa Heisenberga-Lorentza na poziomie C*-algebry.

W niniejszym rozdziale skonstruujemy Kwantową Grupę Heisenberga-Lorentza na poziomie C*-algebry. W tym celu użyjemy Deformacji Rieffela opisanej w Rozdziale 4. Wynikiem konstrukcji będzie lokalnie zwarta grupa kwantowa, czyli C*-algebra A^s z komnożeniem Δ^Ψ implementowanym przez operator multyplikatywny unitarny W. Pokażemy też, że istnieją cztery elementy stowarzyszone $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ generujące A^s. Niech $H(\mathcal{A}^s)$ będzie zbiorem czwórek operatorów wprowadzonym w Definicji 16. Udowodnimy, że dla każdej reprezentacji $\pi \in \mathrm{Rep}(A^s; H)$ mamy $(\pi(\hat{\alpha}), \pi(\hat{\beta}), \pi(\hat{\gamma}), \pi(\hat{\delta})) \in H(\mathcal{A}^s)$ oraz każdy element $H(\mathcal{A}^s)$ powstaje w ten sposób. Naszym ostatnim wynikiem będzie dowód tego, że działanie komnożenia na generatorach $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ dane jest formułą (89).

3.1. Kwantowa grupa macierzy górnotrójkątnych o wyznaczniku równym 1. Nasze rozważania zaczniemy od zastosowania Deformacji Rieffela do grupy macierzy górnotrójkątnych. W ten sposób otrzymamy C*-algebraiczny analog $*$-algebry Hopfa $\mathcal{A}_0^s$.

Niech więc G_0 będzie grupą górnotrójkątnych macierzy 2×2 o wyznaczniku równym jeden:

$$G_0 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & \alpha_0^{-1} \end{array} \right) : \alpha_0 \in \mathbb{C}_*, \beta_0 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Rozważmy podgrupę abelową $\Gamma \subset G_0$:

$$\Gamma = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & z \\ 0 & 1 \end{array} \right) : z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Działanie Γ^2 na $\mathrm{C}_\infty\big(SL(2,\mathbb{C})\big)$ oznaczane będzie symbolem ϱ :

$$\big(\varrho_{z_1,z_2} f\big)(g) = f\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & -z_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) g \left(\begin{array}{cc} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right).$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że

$$\varrho_{z_1,z_2}(\alpha_0) = \alpha_0 \qquad \varrho_{z_1,z_2}(\beta_0) = \beta_0 + z_2\alpha_0 - z_1{\alpha_0}^{-1}.$$

Grupa Γ, jako grupa izomorficzna z $\mathbb{C}$, jest samodualna z dualnością daną formułą

$$\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto \exp\bigl(\mathrm{i}\mathrm{Im}(z_1 z_2)\bigr) \in \mathbb{T}.$$

Dla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ kładziemy

$$\Psi(z_1, z_2) = \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{i}\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)\right).$$

Funkcja $\Psi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{C}^2)$ spełnia równanie 2-kocyklu, a więc trójka $\left(\mathrm{C}_\infty\bigl(G_0\bigr), \varrho, \widetilde{\Psi}\otimes\Psi\right)$ jest danymi Rieffela. Prowadzi ona do zdeformowanego Γ^2-produktu: $\left(\mathrm{C}_\infty\bigl(G_0\bigr) \rtimes_\varrho \Gamma^2, \lambda, \hat{\varrho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\right)$ gdzie skręcone działanie grupy dualnej dane jest wzorem

$$\hat{\varrho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}(b) = \lambda_{-\frac{s}{4}\bar{z}_1, \frac{s}{4}\bar{z}_2}\hat{\varrho}_{z_1,z_2}(b)\lambda^*_{-\frac{s}{4}\bar{z}_1, \frac{s}{4}\bar{z}_2}$$

dla wszystkich $b \in \mathrm{C}_\infty\bigl(G_0\bigr) \rtimes \Gamma^2$.

Zdeformowana algebra Landstada będzie dalej oznaczana przez A_0^s. Jak opisaliśmy w Rozdziale 4, posiada ona strukturę lokalnie zwartej grupy kwantowej, tzn. istnieje komnożenie Δ^Ψ na A_0^s implementowane przez operator unitarny W_0. Korzystając z Uwagi 5 widzimy, że element $\alpha_0 \in \bigl(\mathrm{C}_\infty\bigl(G_0\bigr)\bigr)^\eta \subset \bigl(\mathrm{C}_\infty\bigl(G_0\bigr) \rtimes_\varrho \Gamma^2\bigr)^\eta$ jest także stowarzyszony z C*-algebrą A_0^s. Podobnie ${\alpha_0}^{-1}\,\eta\, A_0^s$. Ponadto z_{α_0} oraz $z_{{\alpha_0}^{-1}}$ są w centrum $\mathrm{M}(A_0^s)$. Od tej pory, α_0 rozumiany jako element stowarzyszony z A_0^s będzie oznaczany symbolem $\hat{\alpha}_0$.

Przejdźmy do konstrukcji elementu stowarzyszonego $\hat{\beta}_0$. W tym celu wprowadźmy infinitezymalne generatory prawych i lewych przesunięć $T_r, T_l \in \mathrm{C}^*(\Gamma^2)^\eta \subset \left(\mathrm{C}_\infty\bigl(G_0\bigr) \rtimes_\varrho \Gamma^2\right)^\eta$:

$$\lambda_{z_1,z_2} = \exp\bigl(\mathrm{i}\mathrm{Im}(z_1 T_l)\bigr)\exp\bigl(\mathrm{i}\mathrm{Im}(z_2 T_r)\bigr). \tag{100}$$

Dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $t \in \mathbb{R}$ połóżmy:

$$U^{\hat{\beta}_0}(z,t) = \exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{i}t(|\alpha_0|^2 - |\alpha_0|^{-2})\right)\exp(\mathrm{i}\mathrm{Im}(z\beta_0))\exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{i}\mathrm{Im}(z(\alpha_0 T_r^* + {\alpha_0}^{-1}T_l^*)\right) \tag{101}$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy że jest to reprezentacja grupy Heisenberga $\mathbb{H}$ w iloczynie krzyżowym $\mathrm{C}_\infty(G_0) \rtimes_\varrho \Gamma^2$:

$$U^{\hat{\beta}_0}(z_1,t_1)U^{\hat{\beta}_0}(z_2,t_2) = U^{\hat{\beta}_0}(z_1+z_2, t_1+t_2+\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2)).$$

Pokażemy, że $U^{\hat{\beta}_0}(z,t)$ jest elementem $\mathrm{M}(A_0^s)$ dla wszystkich $(z,t) \in \mathbb{H}$. W tym celu musimy sprawdzić, że spełnia on warunki Landstada dla mnożników (29). Niezmienniczość na skręcone działanie grupy dualnej dowodzimy poniżej:

$$\begin{aligned}\hat{\varrho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}\left(U^{\hat{\beta}_0}(z,t)\right) &= \exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{i}t(|\alpha_0|^2 - |\alpha_0|^{-2})\right)\exp\left(\mathrm{i}\mathrm{Im}\left(z\left(\beta + \frac{s}{4}\bar{z}_1{\alpha_0}^{-1} + \frac{s}{4}\bar{z}_2\alpha_0\right)\right)\right)\\ &\times\exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{i}\mathrm{Im}(z(\alpha_0(T_r+z_2)^* + {\alpha_0}^{-1}(T_l+z_1)^*)\right) = U^{\hat{\beta}_0}(z,t).\end{aligned}$$

Zbadajmy teraz odwzorowanie

$$\mathbb{C}^2 \ni (z_1,z_2) \to \lambda_{z_1,z_2}U^{\hat{\beta}_0}(z,t)x\lambda^*_{z_1,z_2} \in \mathrm{C}_\infty\bigl(G_0\bigr) \rtimes_\varrho \Gamma^2,$$

gdzie $x \in A_0^s$. Łatwo sprawdzić, że

$$\lambda_{z_1,z_2} U^{\hat{\beta}_0}(z,t) x \lambda_{z_1,z_2}^* = U^{\hat{\beta}_0}(z,t) \exp(\mathrm{iIm}(z(-z_1\hat{\alpha}_0^{-1} + z_2\hat{\alpha}_0)))\lambda_{z_1,z_2} x \lambda_{z_1,z_2}^*.$$

Elementy $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_0^{-1}$ są stowarzyszone z C*-algebrą A_0^s, w takim razie odwzorowanie

$$\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \to \lambda_{z_1,z_2} U^{\hat{\beta}_0}(z,t) x \lambda_{z_1,z_2}^* \in A_0^s$$

jest ciągłe w normie. Widzimy więc, że odwzorowanie

$$\mathbb{H} \ni (z,t) \mapsto U^{\hat{\beta}_0}(z,t) \in \mathrm{M}(A_0^s)$$

jest reprezentacją grupy Heisenberga $\mathbb{H}$. Pokażemy, że jest ona ciągła w topologii strict. Niech $\pi_0^{\mathrm{kan}} \in \mathrm{Rep}(A_0^s; L^2(G_0))$ będzie kanoniczną reprezentacją A_0^s na $L^2(G_0)$ (patrz Uwaga 6), $\mathcal{Q}_\Gamma$ będzie odwzorowaniem kwantyzacji wprowadzonym w (84) oraz $\mathcal{G}(G_0) \subset \mathrm{C}_\infty(G_0)$ będzie zbiorem funkcji gładkich o zwartych nośnikach. Korzystając z Lematu 12 widzimy, że zbiór $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0))$ jest gęsty w A_0^s. Ustalmy $f \in \mathcal{G}(G_0)$. Z Lematu 24 dostajemy następującą formułę

$$U^{\hat{\beta}_0}(z,t)\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma(\pi_0^{\mathrm{kan}}(U^{\hat{\beta}_0}(z,t))f.)$$

Korzystając z oszacowania (82) łatwo pokazać, że odwzorowanie

$$\mathbb{H} \ni (z,t) \mapsto U^{\hat{\beta}_0}(z,t)\mathcal{Q}_\Gamma(f) \in A_0^s$$

jest ciągłe w normie. Biorąc pod uwagę unitarność elementów $U^{\hat{\beta}_0}(z,t)$ oraz gęstość zbioru $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0))$ w A_0^s dostajemy ciągłość w normie odwzorowania

$$\mathbb{H} \ni (z,t) \mapsto U^{\hat{\beta}_0}(z,t)x \in A_0^s$$

dla wszystkich $x \in A_0^s$. Reprezentacji $U^{\hat{\beta}_0}$ jest więc ciągła w topologii strict. Korzystając z Uwagi 1 widzimy, że reprezentacja $U^{\hat{\beta}_0}$ indukuje morfizm $\pi^{\hat{\beta}_0} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}); \mathrm{A}_0^s)$. Niech $a \,\eta\, \mathrm{C}^*(\mathbb{H})$ będzie elementem stowarzyszonym wprowadzonym w Rozdziale 3. Element stowarzyszony $\hat{\beta}_0 \,\eta\, A_0^s$ jest z definicji obrazem elementu $a \,\eta\, \mathrm{C}^*(\mathbb{H})$ przy morfiźmie $\pi^{\hat{\beta}_0}$: $\hat{\beta}_0 = \pi^{\hat{\beta}_0}(a)$.

Poniżej podamy mniej abstrakcyjną charakteryzację elementu stowarzyszonego $\hat{\beta}_0$. W tym celu wprowadźmy wygodną notację. Niech $T_l, T_r \in \mathrm{C}^*(\mathbb{C}^2)^\eta \subset (\mathrm{C}_\infty(G_0) \rtimes_\varrho \mathbb{C}^2)^\eta$ będą elementami wprowadzonymi w (100). Zauważmy, że dla funkcji gładkiej $f \in \mathrm{C}_\infty(G_0) \subset \mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(G_0) \rtimes_\varrho \mathbb{C}^2)$ komutatory $[T_l, f]$ oraz $[T_r, f]$ są odpowiednio prawo i lewo-stronnymi pochodnymi funkcji f w kierunku podgrupy Γ. Będą ne dalej oznaczane $T_l \cdot f$ oraz $T_r \cdot f$ odpowiednio. Łatwo pokazać, że

$$T_l \cdot f = -2\alpha_0^{-1}\frac{\partial}{\partial \beta_0} f \qquad T_r \cdot f = 2\alpha_0 \frac{\partial}{\partial \beta_0} f.$$

Przyjmujemy ponadto, że $(T_l^n) \cdot f$ oznacza tyle co $T_l \cdot (T_l \cdot \ldots (T_l \cdot f) \ldots)$ oraz analogicznie dla dowolnych iloczynów $(T_l^k T_l^{*k'} T_r^m T_r^{*m'}) \cdot f$. Niech $\mathcal{S}_0$ będzie zbiorem funkcji ciągłych na G, gładkich ze względu na działanie operatorów różniczkowych T_l oraz T_r, znikających w nieskończoności szybciej niż dowolny wielomian zmiennych α_0, ${\alpha_0}^{-1}$, β_0. Przypomnijmy też, że symbolem $\mathcal{G}(G_0)$ oznaczamy zbiór funkcji gładkich na G_0 o zwartych nośnikach.

Wprowadźmy operator różniczkowy działający wzorem

$$\mathrm{Op}(\hat{\beta}_0)f = \beta_0 f - \frac{s}{4}(\alpha_0^{-1}T_l^* \cdot f + \alpha_0 T_r^* \cdot f).$$

Lemat 13. *Niech $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{G}(G_0)$ będą zbiorami funkcji rozważanymi powyżej oraz $\mathcal{Q}_\Gamma$ będzie odwzorowaniem kwantyzacji wprowadzonym formułą* (84). *Niech $\hat{\beta}_0\,\eta\, A_0^s$ będzie elementem stowarzyszonym oraz $\mathrm{Op}(\hat{\beta}_0)$ będzie operatorem różniczkowym wprowadzonym powyżej. Wtedy $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{S}_0) \subset \mathrm{D}(\hat{\beta}_0)$ oraz*

$$\hat{\beta}_0\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\beta}_0)f) \text{ dla wszystkich } f \in \mathcal{S}_0.$$

Ponadto jeśli $f \in \mathcal{S}_0$ to istnieje ciąg funkcji $f_i \in \mathcal{G}(G_0)$ taki, że

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{Q}_\Gamma(f_i) = \mathcal{Q}_\Gamma(f) \text{ oraz } \lim_{i\to\infty} \hat{\beta}_0\mathcal{Q}_\Gamma(f_i) = \hat{\beta}_0\mathcal{Q}_\Gamma(f).$$

Dowód. Niech $f \in \mathcal{G}(G_0)$. Z Twierdzenia 24 dostajemy

$$U^{\hat{\beta}_0}(z,0)\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma\left(\pi_0^{\mathrm{kan}}\left(U^{\hat{\beta}_0}(z,0)\right)f\right).$$

Korzystając z równania (101) widzimy, że

$$2\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{Q}_\Gamma\left(\pi_0^{\mathrm{kan}}\left(U^{\hat{\beta}_0}(z,0)\right)f\right)\bigg|_{z=0} = \mathcal{Q}_\Gamma\left(\mathrm{Op}(\hat{\beta}_0)f\right). \tag{102}$$

W takim razie z równania (12) dostajemy, że $\mathcal{Q}_\Gamma(f) \in \mathrm{D}(\hat{\beta}_0)$ oraz :

$$\hat{\beta}_0\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma\left(\mathrm{Op}(\hat{\beta}_0)f\right).$$

Wiadomo, że dla $f \in \mathcal{S}_0$ istnieje ciąg funkcji $f_i \in \mathcal{G}(G_0)$ zbiegający do f jednostajnie wraz z pochodnymi względem pól T_l oraz T_r. Korzystając z oszacowania (82) dostajemy drugą część Twierdzenia. □

Naszym następnym celem będzie pokazanie, że $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0))$ jest dziedziną istotną dla $\hat{\beta}_0$.

Lemat 14. *Niech $U^{\hat{\beta}_0}(z,t) \in \mathrm{M}(A_0^s)$ będzie reprezentacją grupy Heisenberga, $\mathcal{G}(G_0) \subset \mathrm{C}_\infty(G_0)$ będzie zbiorem funkcji gładkich o zwartych nośnikach oraz niech $\hat{\beta}_0$ będzie operatorem stowarzyszonym z C^*-algebrą A_0^s wprowadzonym powyżej. Wtedy $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0)) \subset \mathrm{D}(\hat{\beta}_0^*\hat{\beta}_0)$ oraz zbiór $(1+\hat{\beta}_0^*\hat{\beta}_0)\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0))$ jest gęsty w A_0^s. W szczególności $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0))$ jest istotną dziedziną elementu stowarzyszonego $\hat{\beta}_0$.*

Dowód. Przypuśćmy, że wykazaliśmy już iż

$$(1+\hat{\beta}_0^*\hat{\beta}_0)^{-1}\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0)) \subset \mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{S}_0), \tag{103}$$

gdzie $\mathcal{S}_0$ jest rodziną funkcji wprowadzonych przed Lematem 13. Korzystając z Wniosku 1 widzimy, że $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{S}_0)$ jest istotną dziedziną operatora $\hat{\beta}_0$. Druga część Lematu 13 pokazuje, że wtedy także $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0))$ jest dziedziną istotną $\hat{\beta}_0$. Do zakończenia dowodu wystarczy więc wykazać zawieranie (103).

Przypomnijmy, że

$$(1+\hat{\beta}_0^*\hat{\beta}_0)^{-1} = \int_{\mathbb{R}_+} dt \exp(-t)\exp(-t\hat{\beta}_0^*\hat{\beta}_0). \tag{104}$$

Niech $\pi_0^{\mathrm{kan}} \in \mathrm{Rep}(A_0^s; L^2(G_0))$ będzie kanoniczną reprezentacją C*-algebry A_0^s na $L^2(G_0)$. Korzystając z Twierdzenia 24 dostajemy

$$\exp(-t\hat{\beta}_0^*\hat{\beta}_0)\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma\left(\pi_0^{\mathrm{kan}}(\exp(-t\hat{\beta}_0^*\hat{\beta}_0))f\right)$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{G}(G_0)$. Z równania (20) wynika, że

$$\begin{aligned}&(\pi_0^{\mathrm{kan}}(\exp(-t\hat{\beta}_0^*\hat{\beta}_0))f)(\alpha_0,\beta_0)\\ &= \int dz h_t\left(z, \frac{s}{2}(|\alpha_0|^2-|\alpha_0|^{-2})\right)\exp(\mathrm{iIm}(z\beta_0))f\left(\alpha_0, \beta_0+\frac{s}{4}\bar{z}(|\alpha_0|^2-|\alpha_0|^{-2})\right).\end{aligned} \tag{105}$$

Rozważmy rodzinę funkcji

$$g_t \equiv \pi_0^{\mathrm{kan}}\left(\exp(-t\hat{\beta}_0^*\hat{\beta}_0)\right)(f) \in L^2(G_0). \tag{106}$$

Poniżej opiszemy jej własności.
1. Z równania (105) oraz definicji funkcji h_t (15) łatwo wynika, że g_t jest funkcją ciągłą znikającą w nieskończoności dla wszystkich $t>0$. Ponadto równanie (105) prowadzi do następującego oszacowania normy sup $\|g_t\|_\infty$:

$$\begin{aligned}\|g_t\|_\infty &\le \sup_{\alpha_0}\int dz h_t\left(z, \frac{s}{2}(|\alpha_0|^2-|\alpha_0|^{-2})\right)\|f\|_\infty\\ &= \sup_{\alpha_0}\frac{\exp\frac{st}{2}(|\alpha_0|^2-|\alpha_0|^{-2})}{\cosh\frac{st}{2}(|\alpha_0|^2-|\alpha_0|^{-2})}\|f\|_\infty \le 2\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Zauważmy też, że z punktu 3 Lematu 4 wynika, że odwzorowanie

$$\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto g_t \in \mathrm{C}_\infty(G_0)$$

jest ciągłe w topologii jednostajnej na $\mathrm{C}_\infty(G)$.
2. Dla wszystkich $t>0$, g_t jest funkcją funkcją różniczkowalną względem pól T_r oraz T_l oraz istnieje wielomian $C(t)$ rzędu n taki, że

$$\|({T_l}^m {T_l}^{*m'} {T_r}^{*k'} {T_r}^k)\cdot g_t\|_\infty \le C(t) \tag{107}$$

gdzie $n = k+k'+l+l'$. Faktycznie, policzmy przykładowo $T_r \cdot g_t$:

$$\begin{aligned}T_r\cdot g_t = &\int dz h_t\left(z, \frac{s}{2}(|\alpha_0|^2-|\alpha_0|^{-2})\right)\\ &\times \exp(\mathrm{iIm}(z\beta))(T_r\cdot f + z\alpha_0 f)\left(\alpha_0, \beta+\bar{z}\frac{s}{4}(|\alpha_0|^2-|\alpha_0|^{-2})\right).\end{aligned}$$

Bezpośredni rachunek na całkach Gaussowskich prowadzi do nierówności

$$\int dz h_t\left(z, \frac{s}{2}(|\alpha_0|^2-|\alpha_0|^{-2})\right)|z| \le Ct$$

gdzie C jest pewną dodatnią liczbą. W takim razie istnieją stałe C_1, C_2 takie, że

$$\|T_r \cdot g_t\|_\infty \leq C_0 + C_1 t.$$

Podobnie można wykazać istnienie wielomianu $C(t)$ rzędu n takiego, że spełniona jest nierówność:

$$\|({T_l}^m {T_l}^{*m'} {T_r}^{*k'} {T_r}^k) \cdot g_t\|_\infty \leq C(t) \tag{108}$$

gdzie $n = k + k' + l + l'$.
3. Niech w będzie wielomianem od β stopnia n. Wtedy istnieje wielomian $C(t)$ rzędu n taki, że $\|w g_t\|_\infty \leq C(t)$. Rzeczywiście, zauważmy że

$$\beta g_t(\alpha_0, \beta)$$
$$= \int dz h_t \left(z, \frac{s}{2}(|\alpha_0|^2 - |\alpha_0|^{-2})\right) 2\frac{\partial}{\partial z} \exp(\mathrm{iIm}(z\beta))\big|_{z=0} f\left(\alpha_0, \beta + \bar{z}\frac{s}{4}(|\alpha_0|^2 - |\alpha_0|^{-2})\right).$$

Całkując powyższą równość przez części oraz korzystając z definicji funkcji h_t (15) można pokazać, że istnieją stałe C_1 oraz C_2 takie, że

$$\|\beta g_t\|_\infty \leq C_1 + C_2 t.$$

Dalej dowodzimy przez indukcję.
4. Niech w' będzie wielomianem od zmiennych α_0 oraz ${\alpha_0}^{-1}$. Poniższa tożsamość

$$w' g_t = \int dz h_t \left(z, \frac{s}{2}(|\alpha_0|^2 - |\alpha_0|^{-2})\right) 2 \exp(\mathrm{iIm}(z\beta)) w' f\left(\alpha_0, \beta + \bar{z}\frac{s}{4}(|\alpha_0|^2 - |\alpha_0|^{-2})\right)$$

dowodzi, że istnieje stała C taka, że

$$\|w' g_t\| \leq C.$$

Niech $g = \int_{\mathbb{R}_+} dt \exp(-t) g_t$. Z punktu 1 wynika, że całka ta istnieje w sensie topologii jednostajnej na $\mathrm{C}_\infty(G_0)$. W szczególności $g \in \mathrm{C}_\infty(G_0)$. Punkty od 2 do 4 pokazują, że g jest funkcją znikającą w nieskończoności szybciej niż dowolny wielomian, różniczkowalną względem pól T_l oraz T_r. W takim razie $g \in \mathcal{S}_0$.

Łącząc równania (104) oraz (106) widzimy, że

$$(1 + \hat{\beta}_0^* \hat{\beta}_0)^{-1} \mathcal{Q}_\Gamma(f) = \int_{\mathbb{R}_+} dt \exp(-t) \mathcal{Q}_\Gamma(g_t).$$

Ponadto z oszacowania (82) wynika, że w powyższej równości możemy zamienić kolejność całkowania z odwzorowaniem $\mathcal{Q}_\Gamma$:

$$(1 + \hat{\beta}_0^* \hat{\beta}_0)^{-1} \mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma\left(\int_{\mathbb{R}_+} dt \exp(-t) g_t\right) = \mathcal{Q}_\Gamma(g).$$

Ale $f \in \mathcal{G}(G_0)$ co pokazuje, że $(1 + \hat{\beta}_0^* \hat{\beta}_0)^{-1} \mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0)) \subset \mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{S}_0)$.

$\square$

3.1.1. **Operator multyplikatywny unitarny dla A_0^s.** W niniejszym rozdziale wyrazimy operator multyplikatywny unitarny $W_0 \in \mathrm{B}(L^2(G_0) \otimes L^2(G_0))$ związany z grupą kwantową (A_0^s, Δ^Ψ), za pomocą operatorów $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\alpha}_0^{-1}$ oraz $\hat{\beta}_0$.

Zauważmy na początek, że elementy $g \in G_0$ można rozłożyć na iloczyn:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & {\alpha_0}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0\beta_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & {\alpha_0}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{109}$$

Rozważmy odwzorowania :

$$G_0 \ni g \mapsto V_{01}(g) = R_{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0\beta_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G_0)), \tag{110}$$

$$G_0 \ni g \mapsto V_{02}(g) = R_{\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & {\alpha_0}^{-1} \end{pmatrix}} \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G_0)). \tag{111}$$

Utożsamiając algebrę funkcji ciągłych, znikających w nieskończoności na G_0 o wartościach w $\mathrm{C}_r^*(G_0)$ z C^*-algebrą $\mathrm{C}_r^*(G_0) \otimes \mathrm{C}_\infty(G_0)$ widzimy, że $V_{01}, V_{02} \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G_0) \otimes \mathrm{C}_\infty(G_0))$. Ponadto przy tym utożsamieniu, operator Kaca-Takesakiego $V_0 \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G_0) \otimes \mathrm{C}_\infty(G_0))$ pokrywa się z reprezentacją prawą regularną: $V_0(g) = R_g$. W takim razie ze wzoru (109) widzimy, że V_0 jest iloczynem elementów V_{01}, V_{02}:

$$V_0 = V_{01}V_{02}. \tag{112}$$

Uwaga 7. Niech H będzie przestrzenią Hilberta, $\tilde{\alpha}$ będzie operatorem normalnym odwracalnym działającym na H oraz $E^{\tilde{\alpha}}$ będzie jego miarą spektralną. Symbolem $V_{02}(\tilde{\alpha}) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G) \otimes \mathcal{K}(H))$ będziemy oznaczali element dany wzorem:

$$V_{02}(\tilde{\alpha}) = \int R_{\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}} \otimes dE^{\tilde{\alpha}}(z) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G_0) \otimes \mathcal{K}). \tag{113}$$

Jeśli A jest C^*-algebrą działającą na H oraz $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^{-1} \,\eta\, A$ to $V_{02}(\tilde{\alpha}) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G_0) \otimes A)$. Niech $V_{02} \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G_0) \otimes \mathrm{C}_\infty(G_0))$ będzie elementem wprowadzonym w (111). Łatwo zobaczyć, że $V_{02}(\alpha_0) = V_{02}$.

Przypomnijmy, że $T_r \in \mathrm{C}_r^*(G_0)^\eta$ jest elementem normalnym takim, że:

$$\exp(\mathrm{i}\mathrm{Im}(zT_r)) = R_{\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Element $V_{01} \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G_0) \otimes \mathrm{C}_\infty(G_0))$ wprowadzony wzorem (110) można wyrazić przy pomocy T_r: $V_{01} = \exp(\mathrm{i}\mathrm{Im}(T_r \otimes \alpha_0\beta_0))$. Korzystając z Uwagi 7 oraz wzoru (112) widzimy, że operator Kaca-Takesakiego dla G_0 można wyrazić następującą formułą:

$$V_0 = \exp(\mathrm{i}\mathrm{Im}(T_r \otimes \alpha_0\beta_0))V_{02}(\alpha_0).$$

Naszym następnym celem będzie pokazanie, że dla operatora multyplikatywnego unitarnego W_0 istnieje analogiczny wzór:

$$W_0 = \exp(\mathrm{i}\mathrm{Im}(T_r \otimes \hat{\alpha}_0\hat{\beta}_0))V_{02}(\hat{\alpha}_0).$$

Przypomnijmy, że $W_0 \in \mathrm{B}(L^2(G_0) \otimes L^2(G_0))$ jest postaci:

$$W_0 = \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes T_l^*)\right) V_0 \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes T_r^*)\right).$$

Korzystając z (112) dostajemy

$$W_0 = \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes T_l^*)\right) V_{01}V_{02} \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes T_r^*)\right).$$

Można sprawdzić, że

$$V_{02} \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes T_r^*)\right) = \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes {\alpha_0}^2 T_r^*)\right) V_{02},$$

w takim razie

$$W_0 = \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes T_l^*)\right) V_{01} \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes {\alpha_0}^2 T_r^*)\right) V_{02}. \tag{114}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\exp&\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes T_l^*)\right) V_{01} \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes {\alpha_0}^2 T_r^*)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes T_l^*)\right) \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \alpha_0\beta_0)) \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes {\alpha_0}^2 T_r^*)\right) \\
&= \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \hat{\alpha}_0\hat{\beta}_0)).
\end{aligned}$$

Stąd wzór (114) przyjmuje postać

$$W_0 = \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \hat{\alpha}_0\hat{\beta}_0))V_{02}(\hat{\alpha}_0), \tag{115}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości $V_{02} = V_{02}(\hat{\alpha}_0)$.

Stwierdzenie 11. *Elementy stowarzyszone $\hat{\alpha}_0, \hat{\beta}_0 \,\eta\, \mathrm{C}_\infty(G_0)^{\widetilde{\Psi\otimes\Psi}}$ separują reprezentacje C^*-algebry A_0^s.*

Dowód. Niech $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Rep}(A_0^s; H)$ będzie parą reprezentacji pokrywających się na elementach stowarzyszonych $\hat{\alpha}_0$ oraz $\hat{\beta}_0$. Wtedy ze wzoru (115) wynika, że

$$(\mathrm{id} \otimes \pi_1)W_0 = (\mathrm{id} \otimes \pi_2)W_0.$$

W takim razie

$$\pi_1((\omega \otimes \mathrm{id})W_0) = \pi_2((\omega \otimes \mathrm{id})W_0).$$

dla wszystkich $\omega \in \mathrm{B}(L^2(G_0)_*$. Stąd $\pi_1 = \pi_2$ gdyż zbiór elementów postaci $(\omega \otimes \mathrm{id})W_0$ jest gęsty w A_0^s. $\square$

Korzystając z wyników tej pracy można pokazać, że $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_0^{-1}, \hat{\beta}_0 \,\eta\, A_0^s$ nie tylko rozdzielają reprezentacje C^*-algebry A_0^s ale także ją generują.

3.2. Deformacja grupy $SL(2,\mathbb{C})$ za pomocą podgrupy macierzy górnotrójkątnych. W niniejszym rozdziale przejdziemy do konstrukcji C^*-algebraicznej wersji Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza. W tym celu zastosujemy Deformację Rieffela do grupy:

$$G = SL(2,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C} \text{ oraz } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}.$$

Użyjemy tej samej podgrupy abelowej Γ co w przypadku kwantyzacji grupy G_0.

Niech więc $\Gamma \subset G$ będzie podgrupą macierzy górnotrójkątnych:

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Działanie Γ^2 na $\mathrm{C}_\infty(G)$ oznaczane będzie przez ρ :

$$\big(\rho_{z_1,z_2} f\big)(g) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & -z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\begin{pmatrix} \rho_{z_1,z_2}(\alpha) & , & \rho_{z_1,z_2}(\beta) \\ \rho_{z_1,z_2}(\gamma) & , & \rho_{z_1,z_2}(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - z_1\gamma & , & \beta + z_2\alpha - z_1\delta - z_1 z_2\gamma \\ \gamma & , & \delta + z_2\gamma \end{pmatrix}. \tag{116}$$

Grupa Γ, jako grupa izomorficzna z addytywna grupa $\mathbb{C}$, jest samodualna, gdzie dualność jest dana formułą:

$$\mathbb{C}^2 \ni (z_1,z_2) \mapsto \exp\big(\mathrm{iIm}(z_1 z_2)\big) \in \mathbb{T}.$$

Dla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ kładziemy

$$\Psi(z_1,z_2) = \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(z_1\bar{z}_2) \right). \tag{117}$$

Funkcja $\Psi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{C}^2)$ spełnia równanie 2-kocyklu, więc trójka $\Big(\mathrm{C}_\infty(G), \rho, \widetilde{\Psi} \otimes \Psi\Big)$ jest danymi Rieffela. Jak opisano w Rozdziale (4), prowadzi ona do deformacji standardowej struktury Γ^2-produktu: $\Big(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \mathbb{C}^2, \lambda, \hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}\Big)$. Skręcone działanie grupy dualnej jest w tym przypadku dane przez

$$\hat{\rho}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}_{z_1,z_2}(b) = \lambda_{-\frac{s}{4}\bar{z}_1, \frac{s}{4}\bar{z}_2} \hat{\rho}_{\gamma_1,\gamma_2}(b) \lambda^*_{-\frac{s}{4}\bar{z}_1, \frac{s}{4}\bar{z}_2}$$

dla wszystkich $b \in \mathrm{C}_\infty(G) \rtimes \mathbb{C}^2$.

Algebra Landstada zdeformowanego Γ^2-produktu będzie dalej oznaczana symbolem A^s i nazywana C^*-algebrą Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza. Zgodnie z Rozdziałem 4, ma ona strukturę lokalnie zwartej grupy kwantowej, tzn. istnieje komnożenie Δ^Ψ na A^s implementowane przez operator multyplikatywny unitarny W.

Z równania (116) wynika, że element stowarzyszony $\gamma \in \mathrm{C}_\infty(G)^\eta$ jest niezmienniczy na działanie ρ. Korzystając z Uwagi 5 dostajemy następujące

Stwierdzenie 12. *Niech $\gamma \in \mathrm{C}_\infty(G)^\eta \subset (\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes \Gamma^2)^\eta$ będzie elementem macierzowym reprezentacji fundamentalnej grupy $SL(2,\mathbb{C})$ rozważanym powyżej oraz $f \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{C})$ będzie funkcją ciągłą znikającą w nieskończoności. Niech A^s będzie C^*-algebrą Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza. Wtedy $\gamma \,\eta\, A^s$, oraz $f(\gamma)$ jest w centrum $\mathrm{M}(A^s)$.*

W dalszej części pracy element γ rozumiany jako element stowarzyszony z A^s będzie oznaczany symbolem $\hat{\gamma}$.

Niech $G_0 \subset G$ będzie podgrupą macierzy górnotrójkątnych. Zauważmy, że G_0 jest dane równaniem: $G_0 = \{g \in G : \gamma(g) = 0\}$. Ideał funkcji ciągłych znikających na podgrupie G_0 będzie oznaczany symbolem $J \subset \mathrm{C}_\infty(G)$. Pokrywa się on z ideałem funkcji generowanym przez z_γ: $J = \overline{z_\gamma \mathrm{C}_\infty(G)}^{\|\cdot\|}$. Łącząc Twierdzenie 14 oraz Twierdzenie 15 widzimy, że istnieje ciąg dokładny C*-algebr:

$$0 \to \overline{z_{\hat{\gamma}} A^s}^{\|\cdot\|} \to A^s \to A_0^s \to 0. \tag{118}$$

W dalszej części pracy będziemy używali oznaczenia $A_{\hat{\gamma}}^s = \overline{z_{\hat{\gamma}} A^s}^{\|\cdot\|}$.

Niech $T_r, T_l \in \mathrm{C}^*(\mathbb{C}^2)^\eta \subset \left(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \Gamma^2\right)^\eta$ będą infinitezymalnymi generatorami prawych i lewych przesunięć:

$$\lambda_{z_1,z_2} = \exp\big(\mathrm{iIm}(z_1 T_l)\big) \exp\big(\mathrm{iIm}(z_2 T_r)\big). \tag{119}$$

Zauważmy że dla funkcji gładkiej $f \in \mathrm{C}_\infty(G) \subset \mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \mathbb{C}^2)$ komutatory $[T_l, f]$ oraz $[T_r, f]$ są odpowiednio prawo i lewo-stronnymi pochodnymi funkcji f w kierunku podgrupy Γ. Będą one dalej oznaczane symbolami $T_l \cdot f$ oraz $T_r \cdot f$. Można pokazać, że w zmiennych α, γ, δ mamy następujące formuły

$$T_l \cdot f = -2\gamma \frac{\partial}{\partial \alpha} f \qquad T_r \cdot f = 2\gamma \frac{\partial}{\partial \delta} f.$$

Przejdźmy do konstrukcji elementów stowarzyszonych $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}\ \eta\ A^s$.

3.2.1. **Element** $\hat{\alpha}$. Sposób konstrukcji elementu stowarzyszonego $\hat{\alpha}\ \eta\ A^s$ jest podobny do konstrukcji $\hat{\beta}_0\ \eta\ A_0^s$ z poprzedniego rozdziału.

Dla $z \in \mathbb{C}$ oraz $t \in \mathbb{R}$ definiujemy element mnożników $U^{\hat{\alpha}}(z,t) \in \mathrm{M}\big(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \Gamma^2\big)$ wzorem:

$$U^{\hat{\alpha}}(z,t) = \exp\left(-\frac{s}{4} \mathrm{i}t\gamma\gamma^*\right) \exp(\mathrm{iIm}(z\alpha)) \exp\left(-\frac{s}{4} \mathrm{iIm}(z\gamma T_l^*)\right).$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy że odwzorowanie

$$\mathbb{H} \ni (z,t) \mapsto U^{\hat{\alpha}}(z,t) \in \mathrm{M}\big(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \Gamma^2\big)$$

jest reprezentacją grupy Heisenberga:

$$U^{\hat{\alpha}}(z_1,t_1) U^{\hat{\alpha}}(z_2,t_2) = U^{\hat{\alpha}}(z_1 + z_2, t_1 + t_2 + \mathrm{Im}(z_1 \bar{z}_2)).$$

Pokażemy, że $U^{\hat{\alpha}}(z,t)$ jest elementem $\mathrm{M}(A^s)$ dla wszystkich $(z,t) \in \mathbb{H}$. W tym celu musimy sprawdzić, że spełnia on warunki Landstada dla mnożników (29). Poniżej pokazujemy, że $U^{\hat{\alpha}}(z,t)$ jest niezmienniczy na skręcone działanie grupy dualnej:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{z_1,z_2}^{\widetilde{\Psi}\otimes\Psi}(U^{\hat{\alpha}}(z,t)) &= \exp\left(-\frac{s}{4} \mathrm{i}t\gamma\gamma^*\right) \exp(\mathrm{iIm}(z(\alpha - \bar{z}_1\gamma))) \exp\left(-\frac{s}{4} \mathrm{iIm}(z\gamma(T_l + z_1)^*)\right) \\ &= U^{\hat{\alpha}}(z,t). \end{aligned}$$

Zbadajmy odwzorowanie

$$\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \to \lambda_{z_1,z_2} U^{\hat{\alpha}}(z,t) x \lambda_{z_1,z_2}^* \in \mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \Gamma^2$$

gdzie $x \in A^s$. Łatwo sprawdzić że

$$\lambda_{z_1,z_2} U^{\hat{\alpha}}(z,t) x \lambda^*_{z_1,z_2} = U^{\hat{\alpha}}(z,t) \exp(-\mathrm{i}\mathrm{Im}(zz_1\hat{\gamma}))\lambda_{z_1,z_2} x \lambda^*_{z_1,z_2}.$$

Element $\hat{\gamma}$ jest stowarzyszony z A^s, więc odwzorowanie

$$\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \to U^{\hat{\alpha}}(z,t) \exp(-\mathrm{i}\mathrm{Im}(zz_1\hat{\gamma}))\lambda_{z_1,z_2} x \lambda^*_{z_1,z_2} \in \mathrm{C}_\infty(G) \rtimes_\rho \Gamma^2$$

jest ciągłe w normie. W takim razie odwzorowanie

$$\mathbb{H} \ni (z,t) \mapsto U^{\hat{\alpha}}(z,t) \in \mathrm{M}(A^s)$$

jest reprezentacją grupy Heisenberga w algebrze A^s.

Niech $\pi^{\mathrm{kan}} \in \mathrm{Rep}(A^s; L^2(G))$ będzie kanoniczną reprezentacją A^s na $L^2(G)$ wprowadzoną w Uwadze 6, $f \in \mathcal{G}(G)$ będzie funkcją gładką o zwartym nośniku oraz $\mathcal{Q}_\Gamma$ będzie odwzorowaniem kwantyzacji wprowadzonym w (84). Z Lematu 24 dostajemy następującą formułę

$$U^{\hat{\alpha}}(z,t)\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma(\pi^{\mathrm{kan}}(U^{\hat{\alpha}}(z,t))f).$$

Z oszacowania (82) wynika że odwzorowanie

$$\mathbb{H} \ni (z,t) \mapsto U^{\hat{\alpha}}(z,t)\mathcal{Q}_\Gamma(f) \in A^s$$

jest ciągłe w normie. Biorąc pod uwagę unitarność elementów $U^{\hat{\alpha}}(z,t)$ oraz gęstość zbioru $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ w A^s widzimy, że odwzorowanie

$$\mathbb{H} \ni (z,t) \mapsto U^{\hat{\alpha}}(z,t)x \in A^s$$

jest ciągłe w normie dla każdego $x \in A^s$. Innymi słowy reprezentacja grupy Heisenberga $U^{\hat{\alpha}}(z,t)$ jest ciągła w topologii strict na A^s. Korzystając z Uwagi 1 widzimy, że reprezentacja $U^{\hat{\alpha}}$ indukuje morfizm $\pi^{\hat{\alpha}} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}); \mathrm{A^s})$. Niech $a \,\eta\, \mathrm{C}^*(\mathbb{H})$ będzie elementem stowarzyszonym wprowadzonym w Rozdziale 3. Element stowarzyszony $\hat{\alpha} \,\eta\, A^s$ jest z definicji obrazem elementu $a \,\eta\, \mathrm{C}^*(\mathbb{H})$ przy morfiźmie $\pi^{\hat{\alpha}}$: $\hat{\alpha} = \pi^{\hat{\alpha}}(a) \,\eta\, A^s$.

Poniżej podamy prostszy opis elementu $\hat{\alpha} \,\eta\, A^s$. W tym celu, rozważmy operator różniczkowy $\mathrm{Op}(\hat{\alpha})$ dany wzorem

$$\mathrm{Op}(\hat{\alpha})f = \alpha f - \frac{s}{4}\gamma T_l^* \cdot f, \tag{120}$$

gdzie f jest funkcją gładką na G. Niech $\mathcal{G}(G) \subset \mathrm{C}_\infty(G)$ będzie zbiorem funkcji gładkich o zwartych nośnikach. Tak jak w Lemacie 14 pokazujemy, że $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ jest istotną dziedziną elementu $\hat{\alpha}$ oraz

$$\hat{\alpha}\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\alpha})f)$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{G}(G)$. W takim razie prawdziwe jest

Twierdzenie 27. *Niech A^s będzie C^*-algebrą Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza, $\mathcal{G}(G) \subset \mathrm{C}_\infty(G)$ będzie zbiorem funkcji gładkich o zwartych nośnikach, $\mathrm{Op}(\hat{\alpha})$ będzie operatorem działającym wzorem (120) oraz $\mathcal{Q}_\Gamma$ będzie odwzorowaniem kwantyzacji wprowadzonym w (84).*

Istnieje element stowarzyszony $\hat{\alpha} \,\eta\, A^s$ którego istotną dziedziną jest $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ taki, że

$$\hat{\alpha}\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\alpha})f)$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{G}(G)$.

3.2.2. **Element** $\hat{\delta}$**.** Konstrukcja elementu $\hat{\delta}\eta A^s$ jest zupełnie analogiczna do konstrukcji $\hat{\alpha}\;\eta\; A^s$. Tutaj podamy tylko jej szkic.

Można pokazać, że odwzorowanie:

$$\mathbb{H} \ni (z,t) \mapsto U^{\hat{\delta}}(z,t) = \exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{i}t\gamma\gamma^*\right)\exp(\mathrm{iIm}(z\delta))\exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(z\gamma T_r^*)\right) \in \mathrm{M}(A^s)$$

jest ciągłą reprezentacją grupy Heisenberga. Indukuje ono morfizm $\pi^{\hat{\delta}} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}^*(\mathbb{H}); \mathrm{A}^s)$. Element stowarzyszony $\hat{\delta}\;\eta\; A^s$ jest z definicji obrazem elementu $a\;\eta\; C^*(\mathbb{H})$ przy morfiźmie $\pi^{\hat{\delta}}$: $\hat{\delta} = \pi^{\hat{\delta}}(a)\;\eta\; A^s$.

Niech $\mathrm{Op}(\hat{\delta})$ bedzie operatorem różniczkowym danym wzorem:

$$\mathrm{Op}(\hat{\delta})f = \delta f - \frac{s}{4}\gamma T_r^* \cdot f, \tag{121}$$

gdzie f jest funkcją gładką na G.

Poniższe twierdzenie jest analogiem Twierdzenia 27.

Twierdzenie 28. *Niech* A^s *będzie* C^**-algebrą Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza,* $\mathcal{G}(G) \subset \mathrm{C}_\infty(G)$ *będzie zbiorem funkcji gładkich o zwartych nośnikach,* $\mathcal{Q}_\Gamma$ *będzie odwzorowaniem kwantyzacji wprowadzonym w* (84) *oraz* $\mathrm{Op}(\hat{\delta})$ *będzie operatorem działającym wzorem* (121).

Istnieje element stowarzyszony $\hat{\delta}\;\eta\; A^s$ *którego istotną dziedziną jest* $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ *taki, że*

$$\hat{\delta}\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\delta})f)$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{G}(G)$.

3.2.3. **Element** $\hat{\beta}$**.** Jak dotąd zdefiniowaliśmy trójkę elementów $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ stowarzyszonych z C^*-algebrą A^s. W niniejszym rozdziale podamy konstrukcję elementu stowarzyszonego $\hat{\beta}\;\eta\; A^s$. Pod względem technicznym będzie ona trudniejsza niż poprzednie konstrukcje. Jednakże koncepcja jest podobna.

Niech f będzie funkcją gładką. Wprowadźmy operator różniczkowy

$$\mathrm{Op}(\hat{\beta})f = \beta f - \frac{s}{4}\alpha T_r^* \cdot f - \frac{s}{4}\delta T_l^* \cdot f + \frac{s^2}{16}\gamma T_l^* \cdot (T_r^* \cdot f). \tag{122}$$

Operator formalnie do niego sprzężony oznaczamy $\mathrm{Op}(\hat{\beta})^*$. Łatwo sprawdzić, że

$$\mathrm{Op}(\hat{\beta})^* f = \bar{\beta} f - \frac{s}{4}\bar{\alpha} T_r \cdot f - \frac{s}{4}\bar{\delta} T_l \cdot f + \frac{s^2}{16}\bar{\gamma} T_l \cdot (T_r \cdot f). \tag{123}$$

Ponadto

$$\mathrm{Op}(\hat{\alpha})\,\mathrm{Op}(\hat{\delta}) - \mathrm{Op}(\hat{\gamma})\,\mathrm{Op}(\hat{\beta}) = 1 \tag{124}$$

gdzie $\mathrm{Op}(\hat{\alpha}), \mathrm{Op}(\hat{\delta})$ wprowadziliśmy w poprzednich rozdziałach oraz $\mathrm{Op}(\hat{\gamma})$ jest operatorem mnożenia przez zmienną γ. Wzór ten sugeruje następującą definicję elementu $\hat{\beta}\;\eta\; A^s$:

$$\hat{\beta}\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\beta})f)$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{G}(G)$. Zmysł elegancji poparty Twierdzeniami 27 oraz 28 podpowiada, że zbiór $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ powinien być istotną dziedziną $\hat{\beta}$.

Pokażemy, że element stowarzyszony $\hat{\beta}$ o tych własnościach rzeczywiście istnieje. Łatwo sprawdzić, że reprezentacje $U^{\hat{\alpha}}$ oraz $U^{\hat{\delta}}$ komutują, w takim razie $\hat{\alpha}$ i $\hat{\delta}$ silnie komutują. Korzystając z Twierdzenia 2 definiujemy element stowarzyszony $\hat{\alpha}\hat{\delta}\ \eta\ A^s$. Jego istotną dziedziną jest zbiór $(1+\hat{\alpha}^*\hat{\alpha})^{-1}\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G})$. Naśladując rozumowanie pokazujące, że $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0))$ jest istotną dziedziną operatora $\hat{\beta}_0$ można pokazać, że $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ jest istotną dziedziną elementu $\hat{\alpha}\hat{\delta}\ \eta\ A^s$.

Niech

$$0 \to A^s_{\hat{\gamma}} \to A^s \to A^s_0 \to 0$$

będzie ciągiem dokładnym C*-algebr wprowadzonym w (118). Jak wytłumaczyliśmy w Przykładzie 1 istnieje morfizm $\pi_{\hat{\gamma}} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}^s; \mathrm{A}^s_{\hat{\gamma}})$. Aplikując $\pi_{\hat{\gamma}}$ do elementu $\hat{\alpha}\hat{\delta}\ \eta\ A^s$ dostajemy element stowarzyszony $\pi_{\hat{\gamma}}(\hat{\alpha}\hat{\delta})\eta A^s_{\hat{\gamma}}$. Jego istotną dziedziną jest zbiór $z_{\hat{\gamma}}\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ oraz dla $f \in z_{\hat{\gamma}}\mathcal{G}(G)$ mamy

$$\pi_{\hat{\gamma}}(\hat{\alpha}\hat{\delta})\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\alpha})\,\mathrm{Op}(\hat{\delta})f). \tag{125}$$

Korzystając z Lematu 2 widzimy, że element stowarzyszony $\pi_{\hat{\gamma}}(\hat{\gamma})\ \eta\ A^s_{\hat{\gamma}}$ jest odwracalny oraz z-transformata odwrotności (oznaczanej dalej symbolem $\hat{\gamma}^{-1}$) jest w centrum algebry $\mathrm{M}(A^s_{\hat{\gamma}})$. W takim razie elementy $(\pi_{\hat{\gamma}}(\hat{\alpha}\hat{\delta}) - 1)$ oraz $\hat{\gamma}^{-1}$ stowarzyszone z $A^s_{\hat{\gamma}}$ spełniają założenia Twierdzenia 2. Pozwala to zdefiniować ich iloczyn

$$\hat{\beta}_{\hat{\gamma}} = \hat{\gamma}^{-1}\left(\pi_{\hat{\gamma}}(\hat{\alpha}\hat{\delta}) - 1\right)\ \eta\ A^s_{\hat{\gamma}}. \tag{126}$$

Niech f będzie funkcją gładką o zwartym nośniku na G. Korzystając z równań (124),(125) dostajemy

$$\hat{\beta}_{\hat{\gamma}}\mathcal{Q}_\Gamma(f)a_{\hat{\gamma}} = \mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\beta})f)a_{\hat{\gamma}} \tag{127}$$

oraz

$$\hat{\beta}^*_{\hat{\gamma}}\mathcal{Q}_\Gamma(f)a_{\hat{\gamma}} = \mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\beta})^*f)a_{\hat{\gamma}} \tag{128}$$

dla wszystkich $a_{\hat{\gamma}} \in A^s_{\hat{\gamma}}$. Ponadto z Twierdzenia 2 wynika, że istotną dziedziną elementu stowarzyszonego $\hat{\beta}_{\hat{\gamma}}$ jest zbiór

$$(1+\hat{\gamma}^{*-1}\hat{\gamma}^{-1})^{-1}z_{\hat{\gamma}}\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}) = |\hat{\gamma}|(1+\hat{\gamma}^*\hat{\gamma})^{-1}z_{\hat{\gamma}}\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G)).$$

W szczególności

$$(1+\hat{\beta}^*_{\hat{\gamma}}\hat{\beta}_{\hat{\gamma}})|\hat{\gamma}|(1+\hat{\gamma}^*\hat{\gamma})^{-1}z_{\hat{\gamma}}\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}) \tag{129}$$

jest gęstym podzbiorem $A^s_{\hat{\gamma}}$.

Przejdźmy do konstrukcji elementu stowarzyszonego $\hat{\beta}\eta A^s$. Wygodnie jest go wprowadzić przez podanie wykresu:

$$\mathrm{Graph}(\hat{\beta}) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A^s \oplus A^s : \begin{pmatrix} xa_{\hat{\gamma}} \\ ya_{\hat{\gamma}} \end{pmatrix} \in \ \mathrm{Graph}(\hat{\beta}_{\hat{\gamma}}) \text{ dla wszystkich } a_{\hat{\gamma}} \in A^s_{\hat{\gamma}}\right\}.$$

Zauważmy, że powyższy zbiór rzeczywiście jest wykresem pewnego operatora działającego na A^s. Jeśli bowiem $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Graph}(\hat{\beta})$ to $\begin{pmatrix} 0 \\ ya_{\hat{\gamma}} \end{pmatrix} \in \mathrm{Graph}(\hat{\beta}_{\hat{\gamma}})$ dla wszystkich $a_{\hat{\gamma}} \in A^s_{\hat{\gamma}}$. Jednakże $A^s_{\hat{\gamma}}$ jest ideałem istotnym w A^s, w takim razie $y = 0$.

Poniższe dwa lematy posłużą nam do wykazania, że operator $\hat{\beta}$ jest stowarzyszony z A^s.

Lemat 15. *Niech $\hat{\beta}$ będzie operatorem wprowadzonym powyżej oraz $\mathrm{Op}(\hat{\beta})$, $\mathrm{Op}(\hat{\beta})^*$ będą operatorami różniczkowymi wprowadzonymi w (122) oraz (123). Wtedy $\mathcal{Q}_\Gamma(f) \in \mathrm{D}(\hat{\beta})$ oraz*

$$\hat{\beta}(\mathcal{Q}_\Gamma(f)) = \mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\beta})f) \tag{130}$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{G}(G)$. Ponadto

$$\begin{pmatrix} -\mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\beta})^* f) \\ \mathcal{Q}_\Gamma(f) \end{pmatrix} \in \mathrm{Graph}(\hat{\beta})^\perp. \tag{131}$$

Dowód. Powyższe własności wynikają wprost z równań (127) oraz (128). □

Lemat 16. *Niech $\mathrm{Graph}(\hat{\beta}) \subset A^s \oplus A^s$ będzie wykresem operatora $\hat{\beta}$ wprowadzonym powyżej. Wtedy*

1. $\mathrm{Graph}(\hat{\beta})$ *jest domkniętym podmodułem w $A^s \oplus A^s$.*
2. $p_1(\mathrm{Graph}(\hat{\beta}))$ *jest zbiorem gęstym w A^s.*
3. $p_2(\mathrm{Graph}(\hat{\beta})^\perp)$ *jest zbiorem gęstym w A^s.*

Dowód. $\mathrm{Graph}(\hat{\beta}_{\hat{\gamma}})$ jest domkniętym podzbiorem $A^s_{\hat{\gamma}} \oplus A^s_{\hat{\gamma}}$ skąd łatwo wynika domkniętość $\mathrm{Graph}(\hat{\beta})$ w $A^s \oplus A^s$. Przypuśćmy, że $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Graph}(\hat{\beta})$ oraz $z \in A^s$. Wtedy $\begin{pmatrix} (xz)a_{\hat{\gamma}} \\ (yz)a_{\hat{\gamma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(za_{\hat{\gamma}}) \\ y(za_{\hat{\gamma}}) \end{pmatrix} \in \mathrm{Graph}(\hat{\beta}_{\hat{\gamma}})$ dla wszystkich $a_{\hat{\gamma}} \in A^s_{\hat{\gamma}}$. W takim razie $\begin{pmatrix} xz \\ yz \end{pmatrix} \in \mathrm{Graph}(\hat{\beta})$ co dowodzi punktu 1.

Korzystając z Lematu 15 widzimy, że $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G)) \subset p_1(\mathrm{Graph}(\hat{\beta}))$. Zbiór $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ jest gęsty w A^s więc punkt 2 jest udowodniony. Ten sam Lemat pokazuje również, że

$$\begin{pmatrix} -\mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\beta})^*)f) \\ \mathcal{Q}_\Gamma(f) \end{pmatrix} \in \mathrm{Graph}(\hat{\beta})^\perp$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$. W takim razie $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G)) \subset p_2(\mathrm{Graph}(\hat{\beta})^\perp)$ co dowodzi punktu 3. □

Używając elementu $\hat{\beta}^*_{\hat{\gamma}} \,\eta\, A^s_{\hat{\gamma}}$ wprowadźmy operator $\hat{\beta}^+$:

$$\mathrm{Graph}(\hat{\beta}^+) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A^s \oplus A^s : \begin{pmatrix} xa_{\hat{\gamma}} \\ ya_{\hat{\gamma}} \end{pmatrix} \in \mathrm{Graph}(\hat{\beta}^*_{\hat{\gamma}}) \text{ dla wszystkich } a_{\hat{\gamma}} \in A^s_{\hat{\gamma}}. \right\}$$

Jego własności są analogiczne do własności operatora $\hat{\beta}$. Do wykazania, że $\hat{\beta}$ jest elementem stowarzyszonym z C*-algebrą A^s posłużymy się iloczynem $\beta^+\beta$. Przypomnijmy, że $\mathrm{D}(\hat\beta^+\hat\beta) = \left\{x \in \mathrm{D}(\hat\beta) : \hat\beta x \in \hat\beta^+\right\}$ oraz dla $x \in \mathrm{D}(\hat\beta^+\hat\beta)$ mamy $\hat\beta^+\hat\beta(x) = \hat\beta^+(\hat\beta(x))$. Zauważmy, że $\mathcal{Q}_\Gamma(f) \in \mathrm{D}(\hat\beta^+\hat\beta)$ dla wszystkich $f \in \mathcal{G}(G)$ oraz

$$\hat\beta^+\hat\beta\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat\beta)^*\mathrm{Op}(\hat\beta)f). \tag{132}$$

Twierdzenie 29. *Niech $\hat\beta^+\hat\beta$ będzie operatorem wprowadzonym powyżej oraz $\mathcal{G}(G)$ będzie zbiorem funkcji gładkich o zwartych nośnikach. Wtedy $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G)) \subset \mathrm{D}(\hat\beta^+\hat\beta)$ oraz zbiór $(1+\hat\beta^+\hat\beta)\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ jest gęsty w C^*-algebrze A^s. W szczególności $\hat\beta$ jest stowarzyszony z A^s oraz $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ jest jego istotną dziedziną.*

Dowód. Niech $\pi_0 \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A^s};\mathrm{A_0^s})$ będzie surjektywnym morfizmem z ciągu dokładnego (118). Jako odwzorowanie ilorazowe jest ono otwarte. W Lemacie 14 pokazaliśmy, że $(1+\hat\beta_0^*\hat\beta_0)\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0))$ jest gęstym podzbiorem A_0^s. Przeciwobraz zbioru gęstego przy odwzorowaniu otwartym jest gęsty więc

$$\overline{\pi_0^{-1}((1+\hat\beta_0^*\hat\beta_0)\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0)))}^{\|\cdot\|} = A^s. \tag{133}$$

W takim razie, dowód będzie zakończony jeśli pokażemy, że

$$\pi_0^{-1}((1+\hat\beta_0^*\hat\beta_0)\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G_0))) \subset \overline{(1+\hat\beta^+\hat\beta)\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))}^{\|\cdot\|}. \tag{134}$$

Niech $a \in \pi_0^{-1}\left((1+\hat\beta_0^*\hat\beta_0)\mathcal{Q}_\Gamma(f_0)\right)$ gdzie $f_0 \in \mathcal{G}(G_0)$. Rozszerzmy f_0 do funkcji $f \in \mathcal{G}(G)$. Zauważmy, że

$$\pi_0(\mathcal{Q}_\Gamma(f)) = \mathcal{Q}_\Gamma(f_0) \tag{135}$$

co w połączeniu z równaniem (132) oraz Lematem 13 daje

$$\pi_0((1+\hat\beta^+\hat\beta)\mathcal{Q}_\Gamma(f)) = (1+\hat\beta_0^*\hat\beta_0)\pi_0(\mathcal{Q}_\Gamma(f)). \tag{136}$$

W takim razie

$$\pi_0\left(a - (1+\hat\beta^+\hat\beta)\mathcal{Q}_\Gamma(f)\right) = 0 \tag{137}$$

co oznacza, że $a - (1+\hat\beta^+\hat\beta)\mathcal{Q}_\Gamma(f) \in A_{\hat\gamma}^s$. Podzbiór $(1+\hat\beta_{\hat\gamma}^*\hat\beta_{\hat\gamma})|\hat\gamma|(1+\hat\gamma^*\hat\gamma)^{-1}z_{\hat\gamma}\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G})$ jest gęsty w $A_{\hat\gamma}^s$ (patrz (129)). Ponadto $\mathrm{D}(\hat\beta_{\hat\gamma}^*\hat\beta_{\hat\gamma}) \subset \mathrm{D}(\hat\beta^+\hat\beta)$ oraz dla $x \in \mathrm{D}(\hat\beta_{\hat\gamma}^*\hat\beta_{\hat\gamma})$ mamy $\hat\beta^+\hat\beta x = \hat\beta_{\hat\gamma}^*\hat\beta_{\hat\gamma}x$. Istnieje więc ciąg elementów $x_i \in |\hat\gamma|(1+\hat\gamma^*\hat\gamma)^{-1}z_{\hat\gamma}\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ taki, że

$$a = \lim_{i\to\infty}(1+\hat\beta^+\hat\beta)(\mathcal{Q}_\Gamma(f)+x_i). \tag{138}$$

Zauważamy, że $|\hat\gamma|(1+\hat\gamma^*\hat\gamma)^{-1}z_{\hat\gamma}\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G)) \subset \mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ co pokazuje, że $(\mathcal{Q}_\Gamma(f)+x_i) \in \mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$. Z równania (138) dostajemy, że $a \in \overline{(1+\hat\beta^+\hat\beta)(\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G)))}^{\|\cdot\|}$ co kończy dowód zawierania (134). W takim razie równanie (133) pokazuje, że $(1+\hat\beta^+\hat\beta)\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G}(G))$ jest gęstym podzbiorem w C^*-algebrze A^s. Druga część Twierdzenia wynika z Lematu 1. $\square$

Fakty dotyczące elementu $\hat\beta$ zbierzemy w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 30. *Niech A^s będzie C^*-algebrą Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza, $\mathcal{G}(G) \subset \mathrm{C}_\infty(G)$ będzie zbiorem funkcji gładkich o zwartych nośnikach, $\mathcal{Q}_\Gamma$ będzie odwzorowaniem kwantyzacji wprowadzonym w* (84) *oraz* $\mathrm{Op}(\hat{\beta})$ *będzie operatorem działającym wzorem* (122).

Istnieje element stowarzyszony $\hat{\beta}\,\eta\, A^s$ którego istotną dziedziną jest $\mathcal{Q}_\Gamma(\mathcal{G})$ taki, że

$$\hat{\beta}\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \mathcal{Q}_\Gamma(\mathrm{Op}(\hat{\beta})f)$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{G}(G)$.

3.2.4. **Generatory C^*-algebry A^s.** W poprzednim rozdziale zdefiniowaliśmy cztery elementy stowarzyszone $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}\,\eta\, A^s$. Naszym kolejnym celem będzie pokazanie, że operatory te generują C^*-algebrę A^s. Wykorzystamy do tego Twierdzenie 4.

Pierwszym krokiem będzie pokazanie, że elementy $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ separują reprezentacje A^s. W tym celu posłużymy się podobnym rozumowaniem jak w Stwierdzeniu 11. Sprowadza się ono do wyrażenia operatora multyplikatywnego unitarnego W przez $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$. Przejdźmy do realizacji tej idei.

Niech $g \in G$ będzie elementem dla którego współrzędna γ jest niezerowa. Zauważmy, że g jest iloczynem trzech elementów:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \alpha\gamma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\gamma^{-1} \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta\gamma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{139}$$

Przypomnijmy, że $J \subset \mathrm{C}_\infty(G)$ jest ideałem funkcji na G znikających na podgrupie G_0. C^*-algebra $\mathrm{C}^*_r(G) \otimes J$ może być utożsamiona z algebrą funkcji ciągłych znikających w nieskończoności na $G \setminus G_0$ o wartościach w $\mathrm{C}^*_r(G)$. W takim razie odwzorowania

$$G \setminus G_0 \ni g \mapsto V_1(g) = R_{\begin{pmatrix} 1 & \alpha\gamma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G))$$
$$G \setminus G_0 \ni g \mapsto V_2(g) = R_{\begin{pmatrix} 0 & -\gamma^{-1} \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}} \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G))$$
$$G \setminus G_0 \ni g \mapsto V_3(g) = R_{\begin{pmatrix} 1 & \delta\gamma^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G))$$

są elementami unitarnym $\mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes J)$. Będą one dalej oznaczane symbolami $V_1, V_2, V_3 \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes J)$.

Uwaga 8. Niech H będzie przestrzenią Hilberta, $\mathcal{K}(H)$ będzie algebrą operatorów zwartych, oraz $\tilde{\gamma}$ będzie normalnym, odwracalnym operatorem działającym na H z miarą spektralną $E^{\tilde{\gamma}}$. Wprowadźmy unitarny element $V_2(\tilde{\gamma}) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes \mathcal{K}(H))$ wzorem

$$V_2(\tilde{\gamma}) = \int R_{\begin{pmatrix} 0 & -z^{-1} \\ z & 0 \end{pmatrix}} \otimes dE^{\tilde{\gamma}}(z). \tag{140}$$

Łatwo zobaczyć, że $V_2(\gamma) = V_2$ gdzie V_2 zostało wprowadzone powyżej. Zauważmy, że jeśli $\tilde{\gamma}$ oraz $\tilde{\gamma}^{-1}$ są elementami stowarzyszonymi z C^*-algebrą A działającą na H to $V_2(\tilde{\gamma}) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes A)$.

Niech $\pi_J \in \mathrm{Mor}(\mathrm{C}_\infty(\mathrm{G}); \mathrm{J})$ będzie kanonicznym morfizmem C^*-algebr jak w Przykładzie 1 oraz $V \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes \mathrm{C}_\infty(G))$ będzie operatorem Kaca-Takesakiego. Z równania (139) wynika, że

$$(\mathrm{id} \otimes \pi_J)(V) = V_1 V_2 V_3.$$

Niech teraz V^Ψ będzie operatorem wprowadzonym w Stwierdzeniu 9 oraz $\pi_{\hat{\gamma}} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}^\mathrm{s}; \mathrm{A}^\mathrm{s}_{\hat{\gamma}})$ będzie morfizmem zadanym przez włożenie ideału $A^s_{\hat{\gamma}}$ w algebrę A^s (patrz Przykład 1). Przypomnijmy, że

$$V^\Psi = \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes T_l^*)\right) V \exp\left(-\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r \otimes T_r^*)\right) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes A).$$

Zauważając, że $V_1 = \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \alpha\gamma^{-1})$ oraz $V_3 = \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \delta\gamma^{-1})$ dostajemy następujący wzór

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} \otimes \pi_{\hat{\gamma}})(V^\Psi) &= \exp(\mathrm{iIm}\left(T_r \otimes (\alpha\gamma^{-1} - \tfrac{s}{4}T_l^*)\right) V_2 \exp\left(\mathrm{iIm}(T_r \otimes (\delta\gamma^{-1} - \tfrac{s}{4}T_r^*)\right) \\ &= \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \pi_{\hat{\gamma}}(\hat{\alpha})\hat{\gamma}^{-1}))V_2(\hat{\gamma}) \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \pi_{\hat{\gamma}}(\hat{\delta})\hat{\gamma}^{-1})).\end{aligned} \tag{141}$$

Twierdzenie 31. *Niech A^s będzie C^*-algebrą kwantowej grupy Heisenberga-Lorentza oraz $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}\ \eta\ A^s$ będą elementami wprowadzonymi w poprzednich rozdziałach. Elementy $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ rozdzielają reprezentacje C^*-algebry A^s.*

Dowód. Niech H będzie przestrzenią Hilberta, $\pi_{\hat{\gamma}} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}^\mathrm{s}; \mathrm{A}^\mathrm{s}_{\hat{\gamma}})$ będzie morfizmem rozważanym powyżej oraz $\pi_0 \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A}^\mathrm{s}; \mathrm{A}^\mathrm{s}_0)$ będzie surjektywnym morfizmem z ciągu dokładnego (118). Pokażemy, że każda reprezentacja $\pi \in \mathrm{Rep}(A^s; H)$ jest sumą prostą reprezentacji $\pi_1 \in \mathrm{Rep}(A^s; H_1)$ oraz $\pi_2 \in \mathrm{Rep}(A^s; H_2)$, które faktoryzują się przez $\pi_{\hat{\gamma}}$ oraz π_0. Innymi słowy wykażemy, że istnieją reprezentacje $\tilde{\pi}_1 \in \mathrm{Rep}(A^s_{\hat{\gamma}}; H_1)$, $\tilde{\pi}_2 \in \mathrm{Rep}(A^s_0; H_2)$ takie, że

$$\pi_1 = \tilde{\pi}_1 \circ \pi_{\hat{\gamma}} \quad \pi_2 = \tilde{\pi}_2 \circ \pi_0 \tag{142}$$

oraz $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$.

Operator $\pi(\hat{\gamma})$ jest normalny. Niech P będzie rzutem samosprzężonym na $\ker \pi(\hat{\gamma})^\perp$. Element $\hat{\gamma}$ jest centralny w C^*-algebrze A^s, skąd $\pi(a) = P\pi(a)P + (1-P)\pi(a)(1-P)$ dla wszystkich $a \in A^s$. W takim razie reprezentacja π rozkłada się na sumę prostą reprezentacji $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ taką, że $\pi_1(\hat{\gamma})$ jest operatorem odwracalnym a $\pi_2(\hat{\gamma}) = 0$. Pamiętając, że $A^s_{\hat{\gamma}}$ jest ideałem w A^s generowanym przez $\hat{\gamma}$ oraz A^s_0 jest algebrą ilorazową $A^s/A^s_{\hat{\gamma}}$ dostajemy (142).

Ze wzorów (141) oraz (114) wynika, że

$$(\mathrm{id} \otimes \pi_1)W = \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \pi_1(\hat{\alpha})\pi_1(\hat{\gamma})^{-1}))V_2(\pi_1(\hat{\gamma})) \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \pi_1(\hat{\delta})\pi_1(\hat{\gamma})^{-1}))$$

oraz

$$(\mathrm{id} \otimes \pi_2)W = \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \pi_2(\hat{\alpha})\pi_2(\hat{\beta}))V_{02}(\pi_2(\hat{\alpha})).$$

Widzimy więc, że $(\mathrm{id}\otimes\pi)W$ jest "funkcjąóperatorów $\pi(\hat{\alpha}),\pi(\hat{\beta}),\pi(\hat{\gamma}),\pi(\hat{\delta})$. Jednakże W rozdziela reprezentacje, więc jeśli dwie reprezentacje pokrywają się na elementach stowarzyszonych $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma},\hat{\delta}$ to pokrywają się one na wszystkich elementach A^s. □

Drugim krokiem dowodu tego, że $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma},\hat{\delta}$ generują C*-algebrę A_s będzie pokazanie, że element $\frac{1}{1+\hat{\beta}^*\hat{\beta}}\exp(-\hat{\alpha}^*\hat{\alpha})\exp(-\hat{\delta}^*\hat{\delta})$, który apriori jest w algebrze mnożników $\mathrm{M}(A^s)$ jest też elementem A^s:

$$\frac{1}{1+\hat{\beta}^*\hat{\beta}}\exp(-\hat{\alpha}^*\hat{\alpha})\exp(-\hat{\delta}^*\hat{\delta})\in A^s. \tag{143}$$

W tym celu znajdziemy funkcję f, której kwantyzacja daje $\exp(-\hat{\alpha}^*\hat{\alpha})\exp(-\hat{\delta}^*\hat{\delta})\in\mathrm{M}(A^s)$. Przypomnijmy, że element $\exp(-\hat{\alpha}^*\hat{\alpha})$ można, nieco formalnie (patrz formuła (20)), wyrazić wzorem :

$$\int dzh\left(z,-\frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)U^{\hat{\alpha}}(z,0), \tag{144}$$

gdzie $h=h_1$ jest funkcją wprowadzoną w (15). Dla $g\in G$ połóżmy

$$f^\alpha(g)=\int dzh\left(z,-\frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)\exp(\mathrm{iIm}(z\alpha)). \tag{145}$$

Funkcja h jest funkcją gaussowską. Scałkowanie (145) daje

$$f^\alpha(g)=\frac{\exp\left(-\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}{\cosh\left(-\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}\exp\left(-\frac{2|\alpha|^2\tanh\left(\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}{s\gamma^*\gamma}\right).$$

Podobnie, element $\exp(-t\hat{\delta}^*\hat{\delta})$ jest dany wzorem

$$\int dzh\left(z,\frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)U^{\hat{\delta}}(z,0). \tag{146}$$

Analogicznie do f^α wprowadzamy funkcję $f^\delta\in\mathrm{C}_b(G)$:

$$f^\delta(g)=\int dzh\left(z,\frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)\exp(\mathrm{iIm}(z\delta))=\frac{\exp\left(\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}{\cosh\left(\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}\exp\left(-\frac{2|\delta|^2\tanh\left(\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}{s\gamma^*\gamma}\right).$$

Ich iloczyn oznaczamy symbolem f:

$$f=f^\alpha f^\delta=\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}\exp\left(-\frac{2(|\alpha|^2+|\delta|^2)\tanh\left(\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}{s\gamma^*\gamma}\right)\in\mathrm{C}_b(G). \tag{147}$$

Funkcja f jest gładka oraz jej pochodne względem T_l oraz T_r są ograniczone. Korzystając ze Stwierdzenia 10 widzimy, że f jest funkcją kwantowalną, gdzie kwantyzacja dana jest wzorem:

$$\mathcal{Q}_\Gamma(f)\equiv\mathfrak{E}^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi}\big(\lambda^L(\tilde{h})\big((1+T_R^*T_R)^2(1+T_L^*T_L)^2\cdot f\big)\lambda^R(\tilde{h})\big), \tag{148}$$

oraz $\tilde{h}(w) = \displaystyle\int dz \frac{\exp(\mathrm{iIm}(zw))}{(1+(\frac{s}{4})^{-2}|z|^2)^2}$. Zauważmy, że podany tu wzór na funkcję $\tilde{h}$ różni się od wzoru (78) podstawieniem $s \to -\frac{s}{4}$. Wynika to z analogicznej zmiany parametru dla 2-kocyklu Ψ (117).

Stwierdzenie 13. *Niech $f \in \mathrm{C}_b(G)$ będzie funkcją rozważaną powyżej oraz $\mathcal{Q}_\Gamma$ będzie odwzorowaniem kwantyzacji wprowadzonym w* (84). *Wtedy*

$$\mathcal{Q}_\Gamma(f) = \exp(-\hat{\alpha}^*\hat{\alpha})\exp(-\hat{\delta}^*\hat{\delta}).$$

Dowód powyższego Stwierdzenia jest, jak zobaczymy, technicznie nieco skomplikowany. Jednak idea jest prosta. Mianowicie, można na poziomie formalnym wykazać, że kwantyzacja funkcji $\exp(\mathrm{iIm}(z\alpha)) \in \mathrm{C}_b(G)$ daje element $U^{\hat{\alpha}}(z,0) \in \mathrm{M}(A^s)$. Podobnie, kwantyzacja funkcji $\exp(\mathrm{iIm}(z\delta)) \in \mathrm{C}_b(G)$ daje element $U^{\hat{\delta}}(z,0) \in \mathrm{M}(A^s)$. Obserwacja ta wraz ze wzorami (144) oraz (146) prowadzi do definicji funkcji f (147).

Dowód Stwierdzenia 13. Niech $\omega \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes \Gamma^2)^*$ oraz $x \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{C})$ będzie funkcją ciągłą o zwartym nośniku. Rozważmy funkcjonał $\omega' \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes \Gamma^2)^*$ zadany wzorem:

$$\omega'(b) = \omega(\exp(-\gamma^*\gamma)\lambda^L(x)b\lambda^R(x)\exp(-\gamma^*\gamma)).$$

Funkcjonały tej postaci rozdzielają elementy $\mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes \Gamma^2)$, więc jeśli pokażemy, że $\omega'(\mathcal{Q}_\Gamma(f)) = \omega'(\exp(-\hat{\alpha}^*\hat{\alpha})\exp(-\hat{\delta}^*\hat{\delta}))$ to dowód stwierdzenia będzie zakończony.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(1+T_l^*T_l)^2(1+T_r^*T_r)^2 \cdot f(g) = \int dz_1 dz_2 \Big(& \\ \times h\left(z_1, -\frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right) & \exp(\mathrm{iIm}(z_1\alpha))(1+\bar{z}_1 z_1\gamma^*\gamma)^2 \\ \times h\left(z_2, \frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right) & \exp(\mathrm{iIm}(z_2\delta))(1+\bar{z}_2 z_2\gamma^*\gamma)^2\Big).\end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}&\hat{\rho}^{\tilde{\Psi}\otimes\Psi}_{w_1,w_2}(\exp(\mathrm{iIm}(z_1\alpha))\exp(\mathrm{iIm}(z_2\delta))) \\ &\quad = \exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(\bar{w}_1 z_1\gamma)\right)\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(\bar{w}_2 z_2\gamma)\right)\exp(\mathrm{iIm}(z_1\alpha))\exp(\mathrm{iIm}(z_2\delta))).\end{aligned}$$

Podstawiając powyższe równości do (148) dostajemy:

$$\begin{aligned}\omega'(\mathcal{Q}_\Gamma(h)) = &\int dw_1 dw_2 \omega\Big(\exp(-\gamma^*\gamma)\lambda^L(x\tilde{h}_{w_1}) \\ \times &\int dz_1 dz_2 h\left(z_1, -\frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)(1+\bar{z}_1 z_1\gamma^*\gamma)^2\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(\bar{w}_1 z_1\gamma)\right)\exp(\mathrm{iIm}(z_1\alpha)) \\ \times\ & h\left(z_2, \frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)(1+\bar{z}_2 z_2\gamma^*\gamma)^2\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(\bar{w}_2 z_2\gamma)\right)\exp(\mathrm{iIm}(z_2\delta))\lambda^R(x\tilde{h}_{w_2})\exp(-\gamma^*\gamma)\Big).\end{aligned} \tag{149}$$

gdzie $\tilde{h}_w$ jest przesunięciem funkcji $\tilde{h} \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{C})$. $\tilde{h}$ jest funkcją znikającą eksponencjalnie w nieskończoności. Zatem ze zwartości nośnika $x \in \mathrm{C}_\infty(\mathbb{C})$ wynika istnienie stałej C takiej, że $\|x\tilde{h}_w\|_\infty \leq C\exp(-|w|)$. Ponadto odwzorowanie

$$\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto \exp(-\gamma^*\gamma) h\left(z_1, -\frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)(1+\bar{z}_1 z_1\gamma^*\gamma)^2$$
$$\times h\left(z_2, \tfrac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)(1+\bar{z}_2 z_2\gamma^*\gamma)^2\exp(-\gamma^*\gamma) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_\infty(G) \rtimes \Gamma^2)$$

jest całkowalne co wynika z postaci funkcji h:

$$h(z,x) = \frac{x\exp x}{4\sinh x}\exp\left(-\frac{|z|^2 x\coth x}{4}\right).$$

W takim razie wyrażenie podcałkowe w (149) jest bezwzględnie całkowalne i można zamienić kolejność całkowania:

$$\omega'(\mathcal{Q}_\Gamma(h)) = \int dz_1 dz_2 \int dw_1 dw_2 \omega\Big($$
$$\times\ \exp(-\gamma^*\gamma)\lambda^L(x\tilde{h}_{w_1}) h\left(z_1, -\frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)(1+\bar{z}_1 z_1\gamma^*\gamma)^2\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(\bar{w}_1 z_1\gamma)\right)\exp(\mathrm{iIm}(z_1\alpha))$$
$$\times\ h\left(z_2, \frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)(1+\bar{z}_2 z_2\gamma^*\gamma)^2\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(\bar{w}_2 z_2\gamma)\right)\exp(\mathrm{iIm}(z_2\delta))\lambda^R(h\tilde{h}_{w_2})\exp(-\gamma^*\gamma)\Big).$$

Zauważmy, że

$$\int dw_1\lambda^L(x\tilde{h}_{w_1})\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(\bar{w}_1 z_1\gamma)\right) = (1+\bar{z}_1 z_1\gamma^*\gamma)^{-2}\lambda^L(x)\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_l\bar{z}_1\gamma^*)\right)$$

oraz

$$\int dw_2\lambda^R(x\tilde{h}_{w_2})\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(\bar{w}_2 z_2\gamma)\right) = (1+\bar{z}_2 z_2\gamma^*\gamma)^{-2}\lambda^R(x)\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r\bar{z}_1\gamma^*)\right).$$

Stąd

$$\omega'(\mathcal{Q}_\Gamma(h)) = \int dz_1 dz_2\omega'\left(h\left(z_1, -\frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)\exp(\mathrm{iIm}(z_1\alpha))\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_l\bar{z}_1\gamma^*)\right)\right.$$
$$\left.\times\ h\left(z_2, \frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)\exp(\mathrm{iIm}(z_2\delta))\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r\bar{z}_1\gamma^*)\right)\right).$$

Korzystając z tożsamości

$$U^{\hat{\alpha}}(z_1,0) = \exp(\mathrm{iIm}(z_1\alpha))\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_l\bar{z}_1\gamma^*)\right)$$
$$U^{\hat{\delta}}(z_2,0) = \exp(\mathrm{iIm}(z_2\delta))\exp\left(\frac{s}{4}\mathrm{iIm}(T_r\bar{z}_1\gamma^*)\right)$$

oraz formuł (144),(146) dostajemy

$$\omega'(\mathcal{Q}_\Gamma(h)) = \int dz_1 dz_2\omega'\left(h\left(z_1, -\frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)U^{\hat{\alpha}}(z_1,0) h\left(z_2, \frac{1}{2}s\gamma^*\gamma\right)U^{\hat{\delta}}(z_2,0)\right)$$
$$= \omega'(\exp(-\hat{\alpha}^*\hat{\alpha})\exp(-\hat{\delta}^*\hat{\delta})).$$

□

Udowodnimy jeszcze jeden pomocniczy lemat po którym przejdziemy do dowodu własności (143).

Lemat 17. *Niech $f \in \mathrm{C}_b(G)$ będzie funkcją rozważaną powyżej, $\mathcal{Q}_\Gamma$ będzie odwzorowaniem kwantyzacji wprowadzonym w* (84) *oraz* $\mathrm{Op}(\hat{\beta})$ *będzie operatorem różniczkowym wprowadzonym w* (122)*. Rozważmy parę funkcji:*

$$k_1 = \frac{1}{(1+\bar{\beta}\beta)} f \in \mathrm{C}_b(G) \quad k_2 = f - (1 - \mathrm{Op}(\hat{\beta})^* \,\mathrm{Op}(\hat{\beta}))k_1 \in \mathrm{C}_b(G).$$

Funkcje k_1, k_2 są kwantowalne oraz $\mathcal{Q}_\Gamma(k_1), \mathcal{Q}_\Gamma(k_2) \in A^s$.

Dowód. Przypomnijmy, że $f(g) = \dfrac{1}{\cosh^2\left(\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)} \exp\left(-\dfrac{2(|\alpha|^2 + |\delta|^2)\tanh\left(\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}{s\gamma^*\gamma}\right)$. Stąd $k_1 = \dfrac{1}{(1+\bar{\beta}\beta)} f$ jest funkcją znikającą w nieskończoności. Podziałajmy na k_1 operatorem różniczkowym T_l. We współrzędnych α, γ, δ ma ono postać $-2\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}$ co prowadzi do następujących równości:

$$T_l \cdot \left(\frac{1}{1+\bar{\beta}\beta}\right) = \frac{-2\bar{\beta}\delta}{(1+\bar{\beta}\beta)^2} \qquad T_l \cdot f = -4\frac{\tanh\left(\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}{s\gamma^*\gamma}\gamma\bar{\alpha}f.$$

Łącząc powyższe wzory dostajemy

$$T_l \cdot k_1 = \left(\frac{-2\bar{\beta}\delta}{1+\bar{\beta}\beta} - 4\frac{\tanh\left(\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}{s\gamma^*\gamma}\gamma\bar{\alpha}\right) k_1.$$

Zauważając, że k_1 znika eksponencjalnie ze względu na zmienne α, γ, δ oraz korzystając z ograniczoności funkcji $\dfrac{\bar{\beta}}{(1+\bar{\beta}\beta)}$ i $\dfrac{\tanh\left(\frac{s}{2}\gamma^*\gamma\right)}{s\gamma^*\gamma}$ widzimy, że $T_l \cdot k_1 \in \mathrm{C}_\infty(G)$. Podobne argumenty pozwalają wykazać, że $(T_l^k T_l^{*k'} T_r^m T_r^{*m'}) \cdot k_1 \in \mathrm{C}_\infty(G)$ dla wszystkich $l, k, l', k' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Korzystając z Twierdzenia 25 dostajemy, że $k_1 \in \mathcal{G}_\infty^\Gamma(G)$ oraz $\mathcal{Q}_\Gamma(k_1) \in A^s$.

Przeanalizujmy teraz funkcję k_2. Zauważmy, że $(1 - \mathrm{Op}(\hat{\beta})^* \,\mathrm{Op}(\hat{\beta})) = 1 + \bar{\beta}\beta + D$ gdzie D jest operatorem różniczkowym postaci:

$$D = \bar{\beta}(\alpha T_r^* + \delta T_l^* + \gamma T_l^* T_r^*) + (\bar{\alpha}T_r + \bar{\delta}T_l + \bar{\gamma}T_l T_r)\beta.$$

W takim razie $k_2 = D \cdot k_1$. Argumenty takie jak w przypadku funkcji k_1 pozwalają wykazać, że $(T_l^k T_l^{*k'} T_r^m T_r^{*m'}) \cdot k_2 \in \mathrm{C}_\infty(G)$. Stąd $k_2 \in \mathcal{G}_\infty^\Gamma(G)$ oraz $\mathcal{Q}_\Gamma(k_2) \in A^s$. □

Twierdzenie 32. *Niech A^s będzie C^*-algebrą Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza. Wprowadźmy element mnożników $y = (1 + \hat{\beta}^*\hat{\beta})^{-1} \exp(-\hat{\alpha}^*\hat{\alpha}) \exp(-\hat{\delta}^*\hat{\delta}) \in \mathrm{M}(A^s)$. Wtedy y jest elementem A^s.*

Dowód. Niech f, k_1, k_2 będą funkcjami wprowadzonymi powyżej. Zauważmy, że

$$f = k_2 + (1 - \mathrm{Op}(\hat{\beta})^* \,\mathrm{Op}(\hat{\beta}))k_1.$$

Ze Stwierdzenia 13 dostajemy

$$y = (1+\hat{\beta}^*\hat{\beta})^{-1}\mathcal{Q}_\Gamma(f) = (1+\hat{\beta}^*\hat{\beta})^{-1}\mathcal{Q}_\Gamma(k_2)+(1+\hat{\beta}^*\hat{\beta})^{-1}\mathcal{Q}_\Gamma((1-\mathrm{Op}(\hat{\beta})^*\,\mathrm{Op}(\hat{\beta}))k_1). \quad (150)$$

Pokażemy, że

$$(1+\hat{\beta}^*\hat{\beta})^{-1}\mathcal{Q}_\Gamma((1-\mathrm{Op}(\hat{\beta})^*\,\mathrm{Op}(\hat{\beta}))k_1) = \mathcal{Q}_\Gamma(k_1). \quad (151)$$

Niech χ_n będzie ciągiem funkcji gładkich o zwartych nośnikach dążącym w sensie strict do 1 takim, że pochodne χ_n dążą do zera. Korzystając z Twierdzenia 30 widzimy, że

$$(1+\hat{\beta}^*\hat{\beta})^{-1}\mathcal{Q}_\Gamma((1-\mathrm{Op}(\hat{\beta})^*\,\mathrm{Op}(\hat{\beta}))(\chi_n k_1)) = \mathcal{Q}_\Gamma(\chi_n k_1). \quad (152)$$

Ponadto ze Stwierdzenia 10 dostajemy

$$\mathcal{Q}_\Gamma\left(\left(1-\mathrm{Op}(\hat{\beta})^*\,\mathrm{Op}(\hat{\beta})\right)(\chi_n k_1)\right) \to \mathcal{Q}_\Gamma\left(\left(1-\mathrm{Op}(\hat{\beta})^*\,\mathrm{Op}(\hat{\beta})\right)k_1\right)$$

w sensie topologii strict na $\mathrm{M}(A^s)$ oraz Twierdzenie 25 pokazuje, że

$$\mathcal{Q}_\Gamma(\chi_n k_1) \to \mathcal{Q}_\Gamma(k_1)$$

w sensie normowym. Biorąc granice ze względu na n w (152) dostajemy (151).

W takim razie (150) upraszcza się do:

$$y = (1+\hat{\beta}^*\hat{\beta})^{-1}\mathcal{Q}_\Gamma(k_2) + \mathcal{Q}_\Gamma(k_1).$$

Korzystając z Lematu 17 widzimy, że $y \in A^s$. □

Łącząc Twierdzenia 31,32 i 4 dostajemy:

Twierdzenie 33. *Niech A^s będzie C^*-algebrą Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza. Elementy stowarzyszone $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ generują A^s.*

3.2.5. **Reprezentacje C^*-algebry A^s.** W niniejszym rozdziale opiszemy reprezentacje C^*-algebry A^s na przestrzeni Hilberta. Pokażemy, że są one w jednoznacznej odpowiedniości z opisanymi w Rozdziale 2 reprezentacjami związków komutacyjnych (88) za pomocą operatorów działających na przestrzeni Hilberta. W tym celu skorzystamy z Twierdzenia 22, które powiada, że reprezentacje algebry A^s są w jednoznacznej odpowiedniości z koreprezentacjami kwantowej grupy dualnej: $(\mathrm{C}^*_r(G), \mathrm{Ad}_{\Sigma X^*\Sigma}\hat{\Delta})$. Przypomnijmy formę tej odpowiedniości. Niech $W \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G)\otimes A^s)$ będzie operatorem multyplikatywnym unitarnym dla A^s oraz $\pi \in \mathrm{Rep}(A^s; H)$ będzie reprezenatcją. Wtedy $U_\pi = (\mathrm{id}\otimes\pi)W$ jest koreprezentacją grupy kwantowej $(\mathrm{C}^*_r(G), \mathrm{Ad}_{\Sigma X^*\Sigma}\hat{\Delta})$. Na odwrót, jeśli U jest koreprezentacją grupy kwantowej $(\mathrm{C}^*_r(G), \mathrm{Ad}_{\Sigma X^*\Sigma}\hat{\Delta})$, wtedy istnieje dokładnie jedna reprezentacja $\pi_U \in \mathrm{Rep}(A^s; H)$ taka, że $U = (\mathrm{id}\otimes\pi_U)W$.

Zauważmy, że 2-kocykl Ψ wprowadzony w (117) jest skośny a więc $\Sigma X^*\Sigma = X$ oraz $\mathrm{Ad}_{\Sigma X^*\Sigma}\hat{\Delta} = \mathrm{Ad}_X\hat{\Delta}$.

Stwierdzenie 14. *Niech $(\mathrm{C}^*_r(G), \mathrm{Ad}_X\hat{\Delta})$ będzie grupą kwantową rozważaną powyżej, H będzie przestrzenią Hilberta, $(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) \in H_{\tilde{\gamma}}(A^s)$ gdzie zbiór $H_{\tilde{\gamma}}(\mathcal{A}^s)$ został wprowadzony w Definicji 14 oraz $V_2(\tilde{\gamma}) \in \mathrm{B}(L^2(G)\otimes H)$ będzie elementem unitarnym wprowadzonym w Uwadze 8.*

Wedy operator

$$U = \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1})) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G) \otimes \mathcal{K}(H)) \qquad (153)$$

jest koreprezentacją grupy kwantowej $(\mathrm{C}_r^*(G), \mathrm{Ad}_X\hat{\Delta})$.

Dowód. Podziałajmy na pierwszą nogę U komnożeniem $\mathrm{Ad}_X\hat{\Delta}$:

$$(\mathrm{Ad}_X\hat{\Delta} \otimes \mathrm{id})U = X_{12}\left((\hat{\Delta} \otimes \mathrm{id})U\right)X_{12}^*$$

$$= X_{12}\left((\hat{\Delta} \otimes \mathrm{id})(\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1})))(\hat{\Delta} \otimes \mathrm{id})(V_2(\tilde{\gamma}))(\hat{\Delta} \otimes \mathrm{id})(\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1})))\right)X_{12}^*.$$

Z równania $\hat{\Delta}(T_r) = T_r \otimes I + I \otimes T_r$ oraz związku komutacyjnego $[\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^*] = -s\tilde{\gamma}^*\tilde{\gamma}$ dostajemy

$$\begin{aligned}(\hat{\Delta} \otimes \mathrm{id})(\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))) &= \exp(\mathrm{iIm}((T_r \otimes I + I \otimes T_r) \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1})) \\ &= X_{12}^* \exp(\mathrm{iIm}(I \otimes T_r \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes I \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1})).\end{aligned}$$

Na tej samej zasadzie

$$\begin{aligned}(\hat{\Delta} \otimes \mathrm{id})(\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}))) &= \exp(\mathrm{iIm}((T_r \otimes I + I \otimes T_r) \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1})) \\ &= \exp(\mathrm{iIm}(I \otimes T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes I \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}))X_{12}.\end{aligned}$$

Ponadto z definicji elementu $V_2(\tilde{\gamma})$ podanej w Uwadze 8 wynika, że:

$$(\hat{\Delta} \otimes \mathrm{id})(V_2(\tilde{\gamma})) = V_2(\tilde{\gamma})_{23}V_2(\tilde{\gamma})_{13}.$$

W takim razie

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}_X\hat{\Delta} \otimes \mathrm{id})U &= \exp(\mathrm{iIm}(I \otimes T_r \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes I \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})_{23} \\ &\times V_2(\tilde{\gamma})_{13}\exp(\mathrm{iIm}(I \otimes T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes I \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1})).\end{aligned}$$

Operatory $\tilde{\gamma}$ oraz $\tilde{\alpha}$ komutują, więc

$$\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes I \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})_{23} = V_2(\tilde{\gamma})_{23}\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes I \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1})).$$

Podobnie

$$V_2(\tilde{\gamma})_{13}\exp(\mathrm{iIm}(I \otimes T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1})) = \exp(\mathrm{iIm}(I \otimes T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})_{13}.$$

Daje to poniższą równość

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}_X\hat{\Delta} \otimes \mathrm{id})U &= \exp(\mathrm{iIm}(I \otimes T_r \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})_{23}\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes I \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1})) \\ &\times \exp(\mathrm{iIm}(I \otimes T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})_{13}\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes I \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1})).\end{aligned}$$

Zauważając że element $\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes I \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))$ komutuje z $\exp(\mathrm{iIm}(I \otimes T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}))$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ad}_X\hat{\Delta} \otimes \mathrm{id})U &= \exp(\mathrm{iIm}(I \otimes T_r \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})_{23}\exp(\mathrm{iIm}(I \otimes T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1})) \\ &\times \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes I \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})_{13}\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes I \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1})) \\ &= U_{23}U_{13}.\end{aligned}$$

$\square$

Twierdzenie 34. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta oraz $(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) \in H_{\hat{\gamma}}(\mathcal{A}^s)$ gdzie zbiór $H_{\hat{\gamma}}(\mathcal{A}^s)$ został wprowadzony w Definicji 14. Istnieje dokładnie jedna reprezentacja $\pi \in \mathrm{Rep}(A^s; H)$ taka że $\pi(\hat{\alpha}) = \tilde{\alpha}$, $\pi(\hat{\delta}) = \tilde{\delta}$, $\pi(\hat{\gamma}) = \tilde{\gamma}$.*

Do dowodu powyższego Twierdzenia wykorzystamy następujące

Stwierdzenie 15. *Niech G będzie grupą Liego, $f \in \mathrm{C}_\infty(G)$ będzie funkcją gładką o zwartym nośniku oraz $R_g \in L^2(G)$ będzie reprezentacją prawą regularną. Istnieje funkcjonał normalny $\omega \in \mathrm{B}(L^2(G))_*$ taki, że $f(g) = \omega(R_g)$ dla wszystkich $g \in G$.*

Powyższy fakt jest wnioskiem z Twierdzenia Dixmier-Malliavin [**5**]. Można go również wykazać bezpośrednio badając operator Nelsona (patrz Uwaga 2).

Dowód Twierdzenia 34. Niech $U \in \mathrm{M}(\mathrm{C}^*_r(G) \otimes \mathcal{K}(H))$ będzie koreprezentacją dualnej grupy kwantowej $(\mathrm{C}^*_r(G), \mathrm{Ad}_X\hat{\Delta})$ zbudowaną z operatorów $(\tilde{\alpha}, \tilde{\delta}, \tilde{\gamma})$ jak w Stwierdzeniu 14, $\pi_U \in \mathrm{Rep}(A^s; H)$ będzie reprezentacją zadaną przez koreprezentację U, $W \in \mathrm{B}\big(L^2(G) \otimes L^2(G)\big)$ będzie operatorem multyplikatywnym unitarnym dla A^s oraz f będzie funkcją gładką o zwartym nośniku. Ze Stwierdzenia 15 wiadomo, że istnieje funkcjonał normalny $\omega \in \mathrm{B}(L^2(G))_*$ taki, że $f(g) = \omega(R_g)$. Podobnie, istnieje funkcjonał normalny $\omega' \in \mathrm{B}(L^2(G))_*$ taki, że $(z_\gamma f)(g) = \omega'(R_g)$ gdzie z_γ jest z-transformatą elementu γ. Innymi słowy

$$\omega'(R_g) = z_\gamma(g)\omega(R_g). \tag{154}$$

Twierdzenie 24 pokazuje, że

$$z_{\hat{\gamma}}(\omega \otimes \mathrm{id})(W) = (\omega' \otimes \mathrm{id})(W). \tag{155}$$

Pamiętając, że $(\mathrm{id} \otimes \pi_U)W = U$ widzimy, że równość $\pi_U(\hat{\gamma}) = \tilde{\gamma}$ będzie udowodniona jeśli wykażemy, że

$$z_{\tilde{\gamma}}(\omega \otimes \mathrm{id})(U) = (\omega' \otimes \mathrm{id})(U). \tag{156}$$

Przypomnijmy, że:

$$U = \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1})) \left(\int R_{\begin{pmatrix} 0 & -x^{-1} \\ x & 0 \end{pmatrix}} \otimes dE^{\tilde{\gamma}}(x) \right) \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1})).$$

W takim razie U należy do słabego domknięcia przestrzeni rozpiętej przez elementy następującej postaci:

$$\begin{aligned} P = \big(R_z \otimes \exp\big(\mathrm{iIm}\big(w\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}\big)\big)\big) &\left(\int R_{\begin{pmatrix} 0 & -x^{-1} \\ x & 0 \end{pmatrix}} \otimes dE^{\tilde{\gamma}}(x) \right) \\ \times \left(R_{z'} \otimes \exp\left(\mathrm{iIm}\left(w'\tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}\right)\right)\right), & \end{aligned} \tag{157}$$

gdzie $R_z = R_{\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ oraz $z, w, z', w' \in \mathbb{C}$. Do udowodnienia (156) wystarczy więc wykazać, że

$$z_{\tilde{\gamma}}(\omega \otimes \mathrm{id})(P) = (\omega' \otimes \mathrm{id})(P), \tag{158}$$

co zrobimy poniżej. Wprowadźmy oznaczenie

$$U_w^{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}} = \exp\left(\mathrm{iIm}\left(w\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}\right)\right) \quad U_{w'}^{\tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}} = \exp\left(\mathrm{iIm}\left(w'\tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}\right)\right).$$

Proste przekształcenie (157) daje:

$$P = \left(I \otimes U_w^{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}}\right)\left(\int R_{\begin{pmatrix} zx & (zz'x^2-1)x^{-1} \\ x & z'x \end{pmatrix}} \otimes dE^{\tilde{\gamma}}(x)\right)\left(I \otimes U_{w'}^{\tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}}\right).$$

Element $z_{\tilde{\gamma}}$ komutuje z $U_w^{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}}$ oraz $U_{w'}^{\tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}}$ co pokazuje, że

$$\begin{aligned}&(I \otimes z_{\tilde{\gamma}})\, P \\ &= \left(I \otimes U_w^{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}}\right)(I \otimes z_{\tilde{\gamma}})\left(\int R_{\begin{pmatrix} zx & (zz'x^2-1)x^{-1} \\ x & z'x \end{pmatrix}} \otimes dE^{\tilde{\gamma}}(x)\right)\left(I \otimes U_{w'}^{\tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}}\right).\end{aligned}$$

Korzystając z własności miar spektraalnych dostajemy

$$\begin{aligned}&(I \otimes z_{\tilde{\gamma}})\left(\int R_{\begin{pmatrix} zx & (zz'x^2-1)x^{-1} \\ x & z'x \end{pmatrix}} \otimes dE^{\tilde{\gamma}}(x)\right) \\ &\qquad = \int x(1+\bar{x}x)^{-\frac{1}{2}} R_{\begin{pmatrix} zx & (zz'x^2-1)x^{-1} \\ x & z'x \end{pmatrix}} \otimes dE^{\tilde{\gamma}}(x)\end{aligned}$$

w takim razie

$$\begin{aligned}&(I \otimes z_{\tilde{\gamma}})\, P \\ &= \left(I \otimes U_w^{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}}\right)\left(\int x(1+\bar{x}x)^{-\frac{1}{2}} R_{\begin{pmatrix} zx & (zz'x^2-1)x^{-1} \\ x & z'x \end{pmatrix}} \otimes dE^{\tilde{\gamma}}(x)\right)\left(I \otimes U_{w'}^{\tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}}\right).\end{aligned}$$

Wzór (158) wynika teraz z powyższej równości oraz związku (154).

Przejdźmy do dowodu równości $\pi(\hat{\alpha}) = \tilde{\alpha}$ oraz $\pi(\hat{\delta}) = \tilde{\delta}$. Ze wzoru (141) wynika, że

$$(I \otimes \exp(\mathrm{iIm}(z\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1})))W(I \otimes \exp(-\mathrm{iIm}(z\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1}))) = (R_{\bar{z}} \otimes I)W$$

gdzie $\hat{\gamma}$ należy rozumieć jako operator mnożenia przez zmienną γ działający na $L^2(G)$ (w tym sensie jest on odwracalny). Podobnie

$$(I \otimes \exp(\mathrm{iIm}(z\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1})))U(I \otimes \exp(-\mathrm{iIm}(z\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))) = (R_{\bar{z}} \otimes I)U.$$

Powyższe równości pokazują, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ operatory

$$\exp(\mathrm{iIm}(z\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(-\mathrm{iIm}(z\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1})) \in \mathrm{B}(H)$$

komutują z $\pi_U(A^s) \subset \mathrm{B}(H)$. Dla $z \in \mathbb{C}$ połóżmy

$$\tau_z = \exp(\mathrm{iIm}(z\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(-\mathrm{iIm}(z\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1})).$$

Odwzorowanie $\mathbb{C} \ni z \mapsto \tau_z \in \mathrm{B}(H)$ jest reprezentacją addytywnej grupy $\mathbb{C}$. Faktycznie:

$$\begin{aligned}
&\tau_z\tau_{z'}\\
&= \exp(\mathrm{iIm}(z\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(-\mathrm{iIm}(z\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(\mathrm{iIm}(z'\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(-\mathrm{iIm}(z'\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))\\
&= \exp(\mathrm{iIm}(z'\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(\mathrm{iIm}(z\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(-\mathrm{iIm}(z\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(-\mathrm{iIm}(z'\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))\\
&= \exp\left(\frac{s}{2}\mathrm{iIm}(z\bar{z}')\right)\exp(\mathrm{iIm}((z+z')\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1}))\exp\left(\frac{s}{2}\mathrm{iIm}(z'\bar{z})\right)\exp(-\mathrm{iIm}((z+z')\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))\\
&= \exp(\mathrm{iIm}((z+z')\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(-\mathrm{iIm}((z+z')\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1})) = \tau_{z+z'},
\end{aligned}$$

gdzie w pierwszej równości skorzystaliśmy z tego, że operatory

$$\exp(\mathrm{iIm}(z'\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1})), \quad \exp(\mathrm{iIm}(z\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(-\mathrm{iIm}(z\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))$$

komutują. Niech C_1 będzie infinitezymalnym generatorem reprezentacji τ. Z definicji, jest on operatorem normalnym działającym na H takim, że

$$\exp(\mathrm{iIm}(z\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(-\mathrm{iIm}(z\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1})) = \exp(\mathrm{iIm}(zC_1)),$$

dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Element $\exp(\mathrm{iIm}(zC_1))$ komutuje z $\pi_U(A^s)$. W takim razie komutuje on z $\exp(\mathrm{iIm}(z\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1}))$ oraz z $\exp(-\mathrm{iIm}(z\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))$, co pokazuje, że

$$\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1} \dotplus C_1. \tag{159}$$

Analogiczne dowodzimy istnienia operatora normalnego C_2 działającego na H takiego, że

$$\pi_U(\hat{\delta})\tilde{\gamma}^{-1} = \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1} \dotplus C_2. \tag{160}$$

Operatory $\tilde{\alpha}$ oraz $\tilde{\delta}$ silnie komutują, w takim razie C_1 i C_2 silnie komutują. Wykażemy teraz, że $C_1 = 0 = C_2$. Korzystając ze wzoru (141) dostajemy

$$\begin{aligned}
U &= (\mathrm{id} \otimes \pi_U)W\\
&= \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes C_1))V_2(\tilde{\gamma})\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes C_2))\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1})).
\end{aligned}$$

Porównując powyższe wyrażenie ze wzorem (153) widzimy, że

$$V_2(\tilde{\gamma}) = \exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes C_1))V_2(\tilde{\gamma})\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes C_2)).$$

Operatory normalne C_1, C_2 oraz $\tilde{\gamma}$ silnie komutują. Pamiętając, że T_r generuje przesunięcia wzdłuż podgrupy Γ oraz korzystając z definicji $V_2(\tilde{\gamma})$ podanej w Uwadze 8 widzimy, że powyższa równość jest równoważna następującej tożsamości macierzowej:

$$\begin{pmatrix} 0 & -x^{-1} \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -x^{-1} \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dla wszystkich $z_1 \in \mathrm{Sp}(C_1)$, $z_2 \in \mathrm{Sp}(C_2)$ oraz $x \in \mathrm{Sp}(\tilde{\gamma}) \setminus \{0\}$. Stąd $\mathrm{Sp}(C_1) = \{0\} = \mathrm{Sp}(C_2)$ oraz $C_1 = 0 = C_2$. W takim razie (159) oraz (160) upraszczają się do równości $\pi_U(\hat{\alpha})\tilde{\gamma}^{-1} = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}$, $\pi_U(\hat{\delta})\tilde{\gamma}^{-1} = \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}$ co kończy dowód naszego twierdzenia. $\square$

Następnym naszym celem będzie opis reprezentacji w których element $\hat{\gamma}$ jest zerowany. Wiadomo, że takie reprezentacje faktoryzują się przez reprezentacje C*-algebry A_0^s. Przejdźmy więc do zbadania koreprezentacji grupy kwantowej $(\mathrm{C}_r^*(G_0), \mathrm{Ad}_X\hat{\Delta})$. Dowód poniższego stwierdzenia jest analogiczny do dowodu Stwierdzenia 14.

Stwierdzenie 16. *Niech (A_0^s, Δ^Ψ) będzie grupą kwantową wprowadzoną w Rozdziale 3.1, $(\mathrm{C}_r^*(G_0), \mathrm{Ad}_X\hat{\Delta})$ będzie grupą kwantową dualną do (A_0^s, Δ^Ψ), H będzie przestrzenią Hilberta, $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0) \in H_0(\mathcal{A}^s)$ gdzie $H_0(\mathcal{A}^s)$ jest zbiorem opisanym w Definicji 15 oraz $V_{02}(\tilde{\alpha})$ będzie elementem wprowadzonym w Uwadze 7.*

Wtedy operator

$$\exp(\mathrm{iIm}(T_r \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\beta}))V_{02}(\tilde{\alpha}) \in \mathrm{M}(\mathrm{C}_r^*(G_0) \otimes \mathcal{K}(H))$$

jest koreprezentacją grupy kwantowej $(\mathrm{C}_r^*(G_0), \mathrm{Ad}_X\hat{\Delta})$.

Twierdzenie 35. *Niech A^s będzie C*-algebrą kwantowej grupy Heisenberga-Lorentza, H będzie przestrzenią Hilberta oraz $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0) \in H_0(\mathcal{A}^s)$. Wtedy istnieje dokładnie jedna reprezentacja $\pi \in \mathrm{Rep}(A^s; H)$ taka, że $\pi(\hat{\alpha}) = \tilde{\alpha}$, $\pi(\hat{\beta}) = \tilde{\beta}$, $\pi(\hat{\gamma}) = 0$, $\pi(\hat{\delta}) = \tilde{\alpha}^{-1}$.*

Dowód. Tak jak w dowodzie Twierdzenia 34, pokazujemy najpierw istnienie reprezentacji $\varsigma \in \mathrm{Rep}(A_0^s; H)$ takiej, że $\varsigma(\hat{\alpha}_0) = \tilde{\alpha}$ oraz $\varsigma(\hat{\beta}_0) = \tilde{\beta}$. Niech $\pi_0 \in \mathrm{Mor}(\mathrm{A^s}; \mathrm{A_0^s})$ będzie surjektywnym morfizmem z ciągu dokładnego (118). Łatwo sprawdzić, że $\pi = \varsigma \circ \pi_0 \in \mathrm{Rep}(A^s; H)$ jest reprezentacją o której mowa w naszym twierdzeniu. $\square$

Łącząc Twierdzenia 34 oraz 35 dostajemy

Twierdzenie 36. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta, A^s będzie C*-algebrą Kwantowej Grupy Heisenberga-Lorentza, elementy $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}\ \eta\ A^s$ będą jej generatorami oraz $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ będzie elementem zbioru $H(\mathcal{A}^s)$ wprowadzonego w Definicji 16. Istnieje dokładnie jedna reprezentacja $\pi \in \mathrm{Rep}(A^s; H)$ taka, że*

$$\begin{array}{ll} \pi(\hat{\alpha}) = \tilde{\alpha} & \pi(\hat{\beta}) = \tilde{\beta} \\ \pi(\hat{\gamma}) = \tilde{\gamma} & \pi(\hat{\delta}) = \tilde{\delta}. \end{array}$$

Ponadto dla każdej reprezentacji $\pi \in \mathrm{Rep}(A^s; H)$ mamy $\Big(\pi(\hat{\alpha}), \pi(\hat{\beta}), \pi(\hat{\gamma}), \pi(\hat{\delta})\Big) \in H(\mathcal{A}^s)$.

Dowód. Przypomnijmy że czwórka $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) \in H(\mathcal{A}^s)$ jest z definicji sumą prostą $(\tilde{\alpha}_{\tilde{\gamma}}, \tilde{\gamma}_{\tilde{\gamma}}, \tilde{\delta}_{\tilde{\gamma}}) \in H_\gamma(\mathcal{A}^s)$ oraz $(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0) \in H_0(\mathcal{A}^s)$. Z Twierdzeń 34 oraz 35 wynika istnienie $\pi_1 \in \mathrm{Rep}(A^s; H_1)$ oraz $\pi_2 \in \mathrm{Rep}(A^s; H_2)$ gdzie $H_1 = \ker\tilde{\gamma}$ oraz $H_2 = H_1^\perp$ takich, że

$$\pi_1(\hat{\alpha}) = \tilde{\alpha}_{\tilde{\gamma}} \quad \pi_1(\hat{\gamma}) = \tilde{\gamma}_{\tilde{\gamma}} \quad \pi_1(\hat{\delta}) = \tilde{\delta}_{\tilde{\gamma}},$$

$$\pi_2(\hat{\alpha}) = \tilde{\alpha}_0 \quad \pi_2(\hat{\beta}) = \tilde{\beta}_0.$$

Łatwo sprawdzić, że suma prosta $\pi_1 \oplus \pi_2 \in \mathrm{Rep}(A^s; H_1 \oplus H_2)$ daje reprezentację spełniającą tezę naszego twierdzenia.

Dowód drugiej części powyższego twierdzenia łatwo wynika z dowodu Twierdzenia 31. $\square$

3.2.6. **Komnożenie.** Niech (A^s, Δ^Ψ) będzie Kwantową Grupą Heisenberga-Lorentza. Wiemy już, że C*-algebra A^s jest generowana przez cztery elementy stowarzyszone $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$. W niniejszym rozdziale zbadamy działanie komnożenia Δ^Ψ na generatorach.

Używając reprezentacji $\pi^{\mathrm{kan}} \in \mathrm{Rep}(A^s; L^2(G))$ wprowadzonej w Uwadze 6 możemy traktować elementy $\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}\ \eta\ A^s$ jak operatory działające na przestrzeni Hilberta $L^2(G)$. Zauważmy, że wtedy $\hat{\gamma}$ jest operatorem odwracalnym. W poniższych formułach $\hat{\gamma}^{-1}$ będzie rozumiany jak operator działający na $L^2(G)$ odwrotny do operatora $\hat{\gamma}$. Korzystając z Twierdzenia 2 widzimy, że $\tilde{\gamma} = \hat{\gamma} \otimes \hat{\alpha} \dotplus \hat{\delta} \otimes \hat{\gamma}$ jest normalnym, odwracalnym operatorem działającym na $L^2(G) \otimes L^2(G)$. Tak jak w Rozdziale 2 wprowadzamy parę operatorów $\tilde{\alpha}, \tilde{\delta}$ działających na przestrzeni Hilberta $L^2(G) \otimes L^2(G)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \tilde{\gamma}(\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1} \otimes 1) - \hat{\gamma}^{-1} \otimes \hat{\gamma}, \\ \tilde{\delta} &= \tilde{\gamma}(1 \otimes \hat{\delta}\hat{\gamma}^{-1}) - \hat{\gamma} \otimes \hat{\gamma}^{-1}, \end{aligned} \tag{161}$$

taką, że trójka $(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ jest elementem $(L^2(G) \otimes L^2(G))_{\hat{\gamma}}(\mathcal{A}^s)$. Z Twierdzenia 34 wynika istnienie reprezentacji $\pi_\Delta \in \mathrm{Rep}(A^s; L^2(G) \otimes L^2(G))$, która na generatorach dana jest wzorem:

$$\begin{aligned} &\pi_\Delta(\hat{\alpha}) = \tilde{\alpha} \quad \pi_\Delta(\hat{\beta}) = \tilde{\gamma}^{-1}(\tilde{\alpha}\tilde{\delta} - 1) \\ &\pi_\Delta(\hat{\gamma}) = \tilde{\gamma} \quad \pi_\Delta(\hat{\delta}) = \tilde{\delta}. \end{aligned} \tag{162}$$

Zauważmy, że powyższe operatory są formalnie dane przez działanie komnożenia w Kwantowej Grupie Heisenberga-Lorentza (89). Pokażmy to na przykład dla $\pi_\Delta(\hat{\alpha})$:

$$\begin{aligned} \pi_\Delta(\hat{\alpha}) &= \tilde{\gamma}(\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1} \otimes 1) - \hat{\gamma}^{-1} \otimes \hat{\gamma} \\ &= (\hat{\gamma} \otimes \hat{\alpha} \dotplus \hat{\delta} \otimes \hat{\gamma})(\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1} \otimes 1) - \hat{\gamma}^{-1} \otimes \hat{\gamma} \\ &= \hat{\alpha} \otimes \hat{\alpha} + \Big(\hat{\gamma}^{-1}(\hat{\alpha}\hat{\delta} - 1)\Big) \otimes \hat{\gamma} \\ &= \hat{\alpha} \otimes \hat{\alpha} + \hat{\beta} \otimes \hat{\gamma}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 37. *Niech $\pi_\Delta \in \mathrm{Rep}(A^s; L^2(G) \otimes L^2(G))$ będzie wprowadzoną powyżej reprezentacją C*-algebry A^s pochodzącą od $(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) \in (L^2(G) \otimes L^2(G))_{\hat{\gamma}}(\mathcal{A}^s)$. Pokrywa się ona z komnożeniem na A^s tzn.:*

$$\pi_\Delta(a) = \Delta^\Psi(a) \in \mathrm{B}(L^2(G) \otimes L^2(G)). \tag{163}$$

Twierdzenie to pokazuje, że komnożenie Δ^Ψ na A^s w działaniu na generatorach $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ pokrywa się, z dokładnością do szczegółów technicznych, z komnożeniem dla $SL(2, \mathbb{C})$ (patrz (89)).

Dowód Twierdzenia 37. Korzystając ze Stwierdzenia 14 widzimy, że

$$U = \exp(\mathrm{i}\mathrm{Im}(T_r \otimes \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})\exp(\mathrm{i}\mathrm{Im}(T_r \otimes \tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1}))$$

jest koreprezentacją grupy kwantowej $(\mathrm{C}_r^*(G), \mathrm{Ad}_X\hat{\Delta})$ oraz π_Δ i U związane są następującym wzorem $(\mathrm{id}\otimes\pi_\Delta)W = U$ gdzie W jest operatorem multyplikatywnym unitarnym dla (A^s, Δ^Ψ). Z drugiej strony $(\mathrm{id}\otimes\Delta^\Psi)W = W_{12}W_{13}$. Więc do dowodu równości (163) wystarczy pokazać, że $U = W_{12}W_{13}$.

W poniższych rachunkach $(\hat{\gamma}^{-1}\otimes\hat{\gamma})\tilde{\gamma}^{-1}$ oraz $(\hat{\gamma}\otimes\hat{\gamma}^{-1})\tilde{\gamma}^{-1}$ oznaczają iloczyn silnie komutujących, normalnych operatorów działających na $L^2(G)\otimes L^2(G)$.

$$\begin{aligned} U = \exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})\exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes\tilde{\delta}\tilde{\gamma}^{-1})) = \exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1}))_{12} \\ \times\ \exp\left(\mathrm{iIm}\left(T_r\otimes((-\hat{\gamma}^{-1}\otimes\hat{\gamma})\tilde{\gamma}^{-1})\right)\right)V_2(\tilde{\gamma})\exp\left(\mathrm{iIm}\left(T_r\otimes((-\hat{\gamma}\otimes\hat{\gamma}^{-1})\tilde{\gamma}^{-1})\right)\right) \\ \times\ \exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes\hat{\delta}\hat{\gamma}^{-1}))_{13}. \end{aligned} \tag{164}$$

Z drugiej strony, korzystając ze wzoru (141) dostajemy

$$\begin{aligned} W_{12}W_{13} = \exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1}\otimes I)) \\ \times V_2(\hat{\gamma})_{12}\exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes\hat{\delta}\hat{\gamma}^{-1}\otimes I))\exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes I\otimes\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1}))V_2(\hat{\gamma})_{13} \\ \times\exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes I\otimes\hat{\delta}\hat{\gamma}^{-1})). \end{aligned} \tag{165}$$

Porównując (164) i (165) widzimy, że tożsamość $U = W_{12}W_{13}$ jest równoważna temu, że:

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes(-\hat{\gamma}^{-1}\otimes\hat{\gamma})\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})\exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes(-\hat{\gamma}\otimes\hat{\gamma}^{-1})\tilde{\gamma}^{-1})) \\ = V_2(\hat{\gamma})_{12}\exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes\hat{\delta}\hat{\gamma}^{-1}\otimes I))\exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes I\otimes\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1}))V_2(\hat{\gamma})_{13}. \end{aligned} \tag{166}$$

Zauważając, że

$$\exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes\hat{\delta}\hat{\gamma}^{-1}\otimes I))\exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes I\otimes\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1})) = \exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes((\hat{\gamma}^{-1}\otimes\hat{\gamma}^{-1})\tilde{\gamma}))),$$

przekształcamy (166) do postaci:

$$\begin{aligned} \exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes(-\hat{\gamma}^{-1}\otimes\hat{\gamma})\tilde{\gamma}^{-1}))V_2(\tilde{\gamma})\exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes(-\hat{\gamma}\otimes\hat{\gamma}^{-1})\tilde{\gamma}^{-1})) \\ = V_2(\hat{\gamma})_{12}\exp(\mathrm{iIm}(T_r\otimes(\hat{\gamma}^{-1}\otimes\hat{\gamma}^{-1})\tilde{\gamma}))V_2(\hat{\gamma})_{13}. \end{aligned}$$

Przypomnijmy, że T_r generuje przesunięcie wzdłuż podgrupy Γ. Z definicji $V_2(\hat{\gamma})$ podanej w Uwadze 8 oraz z faktu, że operatory $\tilde{\gamma}$, $\hat{\gamma}\otimes I$ oraz $I\otimes\hat{\gamma}$ silnie komutują wynika, że powyższa równość operatorowa jest równoważna następującej tożsamości macierzowej:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & (-\hat{\gamma}\otimes\hat{\gamma}^{-1})z^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -z^{-1} \\ z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (-\hat{\gamma}^{-1}\otimes\hat{\gamma})z^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\gamma}^{-1}\otimes I \\ \hat{\gamma}\otimes I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (\hat{\gamma}^{-1}\otimes\hat{\gamma}^{-1})z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I\otimes\hat{\gamma}^{-1} \\ I\otimes\hat{\gamma} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dla wszystkich $z\in\mathrm{Sp}(\tilde{\gamma})\setminus\{0\}$. Sprawdzenie jej jest prostym rachunkiem, który pozostawiamy czytelnikowi. $\square$

Bibliografia

[1] S. Baaj, G. Skandalis: *Unitaries multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de* C^**-algèbres.*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4^e série, t. **26** (1993), 425-488.

[2] E. Bedos, L. Tuset: *Amenability and co-amenability for locally compact quantum groups.* Int. J. Math. **14** no. 8 (2003), 865-884.

[3] A. Connes : *Noncommutative Geometry.*

[4] A. Connes : *An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a* C^**-algebra by an action of* $\mathbb{R}$. Adv. in Math. **39** (1981), 31-55.

[5] J. Dixmier, P. Malliavin: *Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables.* Bull. Sci. Math., II Ser. 102, 305-330 (1978).

[6] M. Enock, L. Vainerman: *Twisted Kac algebras obtained from 2-cocycles.* Commun. Math. Phys. **178**, (1996)

[7] E.C. Lance *Hilbert* C^**-modules. A toolkit foroperator algebraists.*

[8] M.B. Landstad: *Duality theory for covariant systems. Trans. AMS* **248**, No. 2 (1979), 223–267.

[9] T. Masuda, Y. Nakagami, S.L. Woronowicz: *A* C^**-algebraic framework for quantum groups.* International Journal of Mathematics. **14**, No. 9, (2003), 903 – 1001.

[10] K. Napiórkowski, S.L. Woronowicz: *Operator theory in* C^**-algebraic framework.* Reports on Math. Phys. **31**, No. 3, (1992)

[11] G.K. Pedersen: C^**-algebras and their automorphism groups.* Academic Press 1979.

[12] P. Podleś, S.L. Woronowicz: *Quantum deformation of Lorentz group.* Commun. Math. Phys. **130**, (1990)

[13] W. Pusz & P.M. Sołtan: *Analysis on a homogeneous space of a quantum group.* Preprint OA/0509610.

[14] M.A. Rieffel: *Deformation quantization for action of* $\mathbb{R}^d$. Mem. Am. Math. Soc. **506** (1993).

[15] M.A. Rieffel: *Non-Compact Quantum Groups Associated with Abelian Subgroups.* Commun. in Math. Phys. **171**, (1995)

[16] P. M. Sołtan, S. L. Woronowicz: *W przygotowaniu.*

[17] S.L. Woronowicz: C^**-algebras generated by unbounded elements.* Reviews on Mathematical Physics. **7**, No. 3, (1995), 481 – 521.

[18] S.L. Woronowicz: *From multiplicative unitaries to quantum groups.* International Journal of Math. **7**, No. 1 (1996)

[19] S.L. Woronowicz: *Unbounded elements affiliated with* C^**-algebras and non-compact quantum groups.* Commun. Math. Phys. **136**, (1991)

[20] S.L. Woronowicz, S. Zakrzewski: *Quantum deformations of Lorentz group. Hopf *-algebra level.* Compositio Mathematica **90**, No 2, (1994)

[21] S.L. Woronowicz, S. Zakrzewski: *Quantum Lorentz group having Gauss decomposition property.* Publications of RIMS, Kyoto University **28**, (1992)