Kolokwium nr 1 - Analiza II 2008/2009L

30 Marca 2009, godz. 9:00, P17

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować do prowadzących kolokwium!

Zadanie 1. Określmy szereg potęgowy wzorem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(-x^2)^n}{(2n+4)!}.$$

(1) Znaleźć obszar zbieżności tego szeregu.

(2) Wyrazić sumę szeregu przez funkcje elementarne.

(3) Jeśli to możliwe, znaleźć sumę szeregu dla $x = \pi$.

Wskazówka:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Zadanie 2. Niech $(\mathcal{X}, d)$ będzie przestrzenią metryczną oraz $(\mathcal{X}, d) = (\mathbb{R}^2, d_2)$, gdzie d_2 jest standardową metryką euklidesową. Zbadać otwartość, domkniętość, zwartość i spójność zbioru

$$\mathcal{X} \supset \mathcal{Y}_p = \{(x,y);\ xy \geq 0,\ y = p(p-x)\},$$

dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. W obszarze $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y);\ x > 0, y > 0\}$ wprowadźmy nowe zmienne (ξ, η) wzorami

$$x = \eta\xi, \quad y = \frac{\xi}{\eta}.$$

Zapisać równanie

$$y\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda\, x$$

w zmiennych (ξ, η) i rozwiązać je. Parametr $\lambda \in \mathbb{R}$ jest dowolny. Uzyskane rozwiązanie zapisać w wyjściowych zmiennych (x, y).

Zadanie 4. Określmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y);\ xy = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Znaleźć położenie punktów krytycznych funkcji f na jej dziedzinie. Znaleźć maksymalną wartość funkcji f na zbiorze

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y);\ x > 0, y > 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ \frac{\pi}{12} \leq \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{\pi}{6}\right\}.$$