

Kolokwium dodatkowe – Analiza II 2008/2009L

1 Czerwca 2009, godz. 9:00, SDT

Wszelkie pytania oraz uwagi o błędach proszę kierować do prowadzących kolokwium!

Kolokwium 1 obejmuje zadania 1 – 4, kolokwium 2 zaś, zadania 3 – 6

Zadanie 1. Określmy szereg potęgowy wzorem

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{4(n-1)x^{4n-5}}{(2n+1)!}.$$

- (1) Znaleźć obszar zbieżności tego szeregu.
- (2) Wyrazić sumę szeregu przez funkcje elementarne.
- (3) Jeśli to możliwe, znaleźć sumę szeregu dla $x = \sqrt{\pi}$.

Wskazówka:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Zadanie 2. Niech (\mathcal{X}, d) będzie przestrzenią metryczną oraz $(\mathcal{X}, d) = (\mathbb{R}^2, d_2)$, gdzie d_2 jest standardową metryką euklidesową. Zbadać, dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$, otwartość, domkniętość, zwartość i spójność zbioru

$$\mathcal{X} \supset \mathcal{Y}_p = \{(x, y); xy = 1, -(1+p) \leq x \leq (1-p)\}.$$

Zadanie 3. Zapisać operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ w zmiennych (ξ, η) danych przez

$$x = \xi^3 - 3\xi\eta^2 \quad y = -\eta^3 + 3\xi^2\eta.$$

Zadanie 4. Określmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f(x, y) = \sin(x+y) - \sin x - \sin y$. Znaleźć i zbadać wszystkie punkty krytyczne funkcji f na jej dziedzinie.

Zadanie 5. Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x, y, z) = x + 2y + 2z$. Niech

$$\mathcal{K}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + (z+2)^2 \leq 4\}, \quad \mathcal{K}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Znaleźć $f(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2)$.

Zadanie 6. Niech $f : \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x, y, z, t) = \log z + z - 1 + 7ty + 2t^2 + 2y^2 - 3x^2.$$

Wykazać, że równanie $f(x, y, z, t) = 0$ zadaje powierzchnię. Rozstrzygnąć w jakich punktach powierzchni $f^{-1}(\{0\})$ funkcja uwikłana $z(x, y, t)$ jest dobrze określona lokalnie. Znaleźć i zbadać lokalne ekstrema funkcji $z(x, y, t)$.