

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Przemysław Majewski
Nr albumu: 212749

Kwantyzacja pól wektorowych w ujęciu algebraicznym

Praca magisterska
na kierunku Fizyka
w zakresie: Metody Matematyczne Fizyki.

Praca wykonana pod kierunkiem
dr hab. Jana Derezińskiego, prof. UW,
Katedra Metod Matematycznych Fizyki

27 maja 2008

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, iż niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, iż niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, iż niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Omówienie metody kwantyzacji przy użyciu C^* -algebry reguł komutacyjnych w postaci Weyla na przykładzie pola skalarnego i wektorowego, ze zwróceniem uwagi na lorentzowską współmienność prezentowanej konstrukcji. Klasyfikacja stanów quasi-swobodnych w wyżej wymienionych teoriach. Szczegółowa analiza struktury klasycznej przestrzeni rozwiązań.

Słowa kluczowe

kwantyzacja, pole wektorowe, skalarne, C^* -algebra Weyla, reprezentacja Focka, reguły komutacyjne

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.200 fizyka

Tytuł pracy w języku angielskim

Quantization of vector fields in algebraic approach.

Spis treści

1	Słowo wstępu	6
2	Pole skalarne w przestrzeni Minkowskiego	7
2.1	Teoria klasyczna: Przestrzeń rozwiązań $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ i pole skalarne.	7
2.2	Własności przestrzeni $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$. Struktura symplektyczna.	9
2.3	Przestrzenie $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ i $\mathcal{A}'(\mathcal{M})$ jako przestrzenie wektorowe z topologią	11
2.4	Dynamika w przestrzeni $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$. Nawiasy Poissona.	12
2.5	Dodatkowa struktura w przestrzeni $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$. Struktura Kählera.	14
2.6	Kompleksyfikacja przestrzeni $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$. Skompleksyfikowana struktura Kählera.	17
2.7	Podsumowanie: Przestrzeni rozwiązań $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ i sposoby jej opisu.	18
2.8	Kwantowa algebra Weyla dla pola skalarnego Kleina–Gordona	19
2.9	Stany na $\mathcal{CCR}(\mathcal{Y})$. Reprezentacje algebry $\mathcal{CCR}(\mathcal{Y})$. Grupy unitarne.	20
2.10	Reprezentacje quasi–swobodne dla pola skalarnego Kleina–Gordona	23
2.11	Podsumowanie: pole skalarne. Od teorii klasycznej do kwantowej.	24
3	Pole wektorowe w przestrzeni Minkowskiego	25
3.1	Pole wektorowe. Lagranżjan i sformułowanie klasyczne.	25
3.2	Klasyczne pole wektorowe z $m > 0$ przy $\lambda = 0$. Przestrzeń rozwiązań $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ oraz działanie grupy $\mathcal{SO}_0(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$	27
3.3	Przestrzeń dualna do przestrzeni rozwiązań. Formalizm kanoniczny oraz przestrzeń warunków początkowych.	28
3.4	Komponenta skalarna i wektorowa w teorii masywnej	30
3.5	Struktura symplektyczna przestrzeni $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$. Struktura Kählera.	31
3.6	Klasyczne pole wektorowe i jego transformata Fouriera. Formalizm Kanoniczny.	35
3.7	Kwantyzacja pola wektorowego dla $m > 0$ oraz $\lambda = 0$	37
4	Podsumowanie	39

1 Słowo wstępu

Chciałbym serdecznie podziękować za ogromną pomoc przy tworzeniu niniejszej pracy swojemu opiekunowi i promotorowi, profesorowi Janowi Derezińskiemu. Dzięki swojemu zaangażowaniu wzbogacił mnie o wiedzę niezbędną do otrzymania opisanych wyników. Swoją wdzięczność chciałbym w tym miejscu okazać też pracownikom naukowym wydziału Fizyki oraz wydziału Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego. Dzięki swojej wiedzy odślaniali oni przede mną tajemnice nauki. Dziękuję kadrze KMMF (prof. J. Dereziński, dr M. Kościelecki, prof. W. Pusz, prof. S. L. Woronowicz) za wiele ciekawych wykładów i wskazówek z fizyki matematycznej i matematyki. Dziękuję naukowcom z IFT za przygotowanie mnie w dziedzinach kwantowej teorii pola (prof. K. Meissner, prof. K. Pachucki) oraz ogólnej teorii względności (prof. J. Lewandowski, dr hab. P. Nurowski). Dziękuję również kolegom-studentom, z którymi wspólnie mogłem rozwiązywać swoje problemy naukowe. Dziękuję wszystkim innym, być może nie wymienionym w tym miejscu, za wszelką okazaną mi pomoc.

Celem pracy będzie przedstawienie całkowicie lorentzowsko współmienniczej, algebraicznej kwantyzacji masywnego pola wektorowego korzystając z metod C^* -algebry Weyla dla kanonicznych reguł komutacyjnych. Prezentowana metoda jest dobrze poznana z matematycznego punktu widzenia i oferuje zarówno prostą, jak i precyzyjną możliwość zdefiniowania kwantowych operatorów pola. W pierwszym rozdziale zostanie przedstawione jej zastosowanie w przypadku pola skalarnego i zostanie dokładnie omówiona kwestia współmienniczości lorentzowskiej. Wprowadzone tam narzędzia posłużą do opisu procedury kwantyzacji w przypadku pola wektorowego, co będzie głównym tematem rozdziału drugiego. Część przytoczonych twierdzeń pochodzi z teorii operatorów, a ich zastosowanie jest kluczowe w opisywanym podejściu do tworzenia teorii pola kwantowego.

Głównym celem i niejako ideałem przyświecającym pomysłodawcom tej pracy jest lepsze zrozumienie matematycznych podstaw kwantowej teorii pola, dziedziny, która w dzisiejszej fizyce odgrywa z pewnością rolę pierwszoplanową. Niniejsza praca dotyka oczywiście tylko małego fragmentu wielkiej dziedziny ludzkiej wiedzy.

Przemysław Majewski

2 Pole skalarne w przestrzeni Minkowskiego

W niniejszym rozdziale przedstawimy kwantyzację pola skalarnego spełniającego równanie Kleina-Gordona w przestrzeni Minkowskiego. Ten prosty i klasyczny przykład pozwoli na przybliżenie omawianej metody oraz stosowanej dalej notacji. Podane tu informacje będą w dalszej części wykorzystywane do opisanie kwantyzacji pól wektorowych.

2.1 Teoria klasyczna: Przestrzeń rozwiązań $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ i pole skalarne.

Niech $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$ będzie płaską czasoprzestrzenią z metryką Minkowskiego η taką, że

$$\eta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Przyjęcie takiej konwencji wyboru sygnatury jest uzasadnione wieloma praktycznymi względami, m.in. łatwym uogólnieniem na więcej wymiarów oraz dodatnią określonością na części przestrzennej.

Przeprowadzone w dalszej części rozdziału rozumowanie można łatwo uogólnić na przypadek, gdy \mathcal{M} jest globalnie hiperboliczną czasoprzestrzenią wymiaru $n + 1$. Rozumowanie to nie będzie zawarte w niniejszej pracy, jednak jest ono również interesującym przypadkiem zastosowania opisywanych później metod.

Przestrzeń Minkowskiego będziemy utożsamiać z przestrzenią będącą produktem przestrzeni euklidesowej (stałego czasu) i jednowymiarowej (osi czasu) stosując poniższe oznaczenia:

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \ni x = (t, \vec{x}).$$

Wszystkie przeprowadzone konstrukcje będą niezmiennicze ze względu na to utożsamienie.

Wyberzmy układ współrzędnych (t, \vec{x}) , wtedy możemy wprowadzić pojęcie funkcji przestrzennie zwartej.

Definicja 2.1 *Przestrzenią funkcji przestrzennie zwartych na rozmaitości \mathcal{M} nazywamy zbiór*

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathcal{M}) : \text{supp}(f) \subset C_{\mathcal{K}}, \mathcal{K} - \text{zwarty} \right\},$$

gdzie przez $C_{\mathcal{K}}$ rozumiemy stożek świetlny zbioru \mathcal{K} .

Uwaga 2.2 *Nietrudno spostrzec, że zbiór $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ jest niezmienniczy ze względu na wybór układu współrzędnych, zatem w szczególności względem wyboru powierzchni stałego czasu.*

W kwantyzacji interesuje nas tzw. przestrzeń rozwiązań klasycznych, czyli podzbiór zbioru $\mathcal{A}(\mathcal{M})$, spełniający równanie Kleina–Gordona, które w przestrzeni \mathcal{M} przyjmuje postać

$$(\partial_\mu \partial^\mu - m^2)f(x) = 0 \quad (2.2)$$

lub w skróconym zapisie

$$(\square - m^2)f(x) = 0. \quad (2.3)$$

Klasycznym polem skalarne Kleina-Gordona nazywamy funkcję klasy $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ spełniającą równanie (2.3). Zbiór wszystkich takich funkcji oznaczamy symbolem $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$.

Definicja 2.3 *Zbiór*

$$\mathcal{Y}_m(\mathcal{M}) = \{f \in \mathcal{A}(\mathcal{M}) : (\square - m^2)f = 0\}$$

nazywamy przestrzenią konfiguracyjną kwantowego pola skalarnego.

Z faktu, iż funkcja $f \in \mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ przy ustalonej chwili czasu, jest jako funkcja zmiennej przestrzennej, funkcją gładką o zwartym nośniku, wynika w szczególności, iż

$$f(0, \vec{x}) =: f_0(\vec{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0, \vec{x}) =: \dot{f}_0(\vec{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Wiadomo z teorii równań cząstkowych, że w przestrzeni Minkowskiego dla równania Kleina-Gordona słuszne jest następujące

Twierdzenie 2.4 *Dla dowolnych dwóch funkcji $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ istnieje dokładnie jedna funkcja f należąca do przestrzeni rozwiązań $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ taka, że*

$$u(\vec{x}) = f_0(\vec{x}) = f(0, \vec{x})$$

oraz

$$v(\vec{x}) = \dot{f}_0(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial t}(0, \vec{x}).$$

Ponadto $f(x) = 0$, gdy x leży poza stożkiem przyszłości (lub przeszłości) funkcji warunku początkowego $u(\vec{x})$ oraz $v(\vec{x})$.

Uwaga 2.5 *Stożkiem przyszłości zbioru $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ nazywamy zbiór*

$$C\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} C_x,$$

gdzie C_x jest stożkiem przyszłości punktu x . W przypadku stożka przyszłości funkcji warunku początkowego mamy na myśli stożek przyszłości jej nośnika przestrzennego w chwili $t = 0$.

Dokładne zależności między przestrzenią warunków początkowych, a przestrzenią rozwiązań $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ będą tematem kolejnych rozdziałów poświęconych przestrzeniom symplektycznym z dynamikami.

Przestrzeń $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ ma strukturę przestrzeni wektorowej nad \mathbb{C} . Przez $\mathcal{Y}^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ oznaczamy rzeczywistą podprzestrzeń przestrzeni rozwiązań lub, innymi słowy, przestrzeń rzeczywistych funkcji spełniających równanie Kleina-Gordona.

Istotnym elementem klasycznej teorii jest symetria względem działania na $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ grupy Poincarégo

$$\mathfrak{G} = \mathcal{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4.$$

W omawianym w tym rozdziale przypadku czasoprzestrzeni jest przestrzenią wektorową izomorficzną z \mathbb{R}^4 , zatem grupa \mathfrak{G} działa nań liniowo poprzez swoją reprezentację definiującą. Działanie to wyraża się wzorem

$$(\Lambda, a)x = \Lambda x + a, \tag{2.4}$$

gdzie

$$(\Lambda, a) \in \mathcal{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4.$$

Często ograniczać będziemy się do właściwej i ortochronicznej grupy Lorentza $\mathcal{SO}_0(1, 3)$, która jest spójną składową jedności grupy $\mathcal{O}(1, 3)$. Równanie Kleina-Gordona jest niezmiennicze względem transformacji z grupy $\mathcal{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4 = \mathfrak{G}$.

Oznaczmy przez

$$(\mathcal{R}_{(\Lambda, a)}f)(x) := f(\Lambda^{-1}(x - a)),$$

wtedy dla dowolnych $f \in \mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ oraz $(\Lambda, a) \in \mathfrak{G}$ prawdą jest, że $\mathcal{R}_{(\Lambda, a)}f \in \mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$, co oznacza, iż przestrzeń rozwiązań jest zamknięta ze względu na to działanie.

2.2 Własności przestrzeni $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$. Struktura symplektyczna.

Jak wspomniano w rozdziale (2.1) przestrzeń $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ ma strukturę przestrzeni liniowej nad \mathbb{C} , często jednak będziemy ograniczać się do przestrzeni rzeczywistych rozwiązań równania Kleina-Gordona $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$. $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ posiada jeszcze dodatkową naturalną strukturę - wyróżnioną formę symplektyczną. W celu jej zdefiniowania musimy w przestrzeni \mathcal{M} wprowadzić orientację. Dokonujemy tego postulując postać formy objętości Ξ , tak by w wybranym układzie współrzędnych zachodziło

$$\Xi = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz.$$

Wtedy można zdefiniować operator

$$\star : \Lambda^k T^*M \longrightarrow \Lambda^{n-k} T^*M,$$

gdzie $n = \dim \mathcal{M} = 4$, tak by dla $\beta \in \Lambda^k T^*M$ oraz dowolnych pól wektorowych $X_{k+1}, \dots, X_n \in \Gamma(TM)$ zachodziło

$$(\star\beta)(X_{k+1}, \dots, X_n) \cdot \Xi = \beta \wedge \eta(X_{k+1}) \wedge \dots \wedge \eta(X_n),$$

gdzie η jak poprzednio oznacza metrykę lorentzowską na \mathcal{M} .

Uwaga 2.6 *Tak zdefiniowany operator \star jest $C^\infty(\mathcal{M})$ -liniowy i wystarczy określać go na formach dualnych do pewnego repera ortonormalnego.*

Uwaga 2.7 *Ta definicja bez zmian stosuje się do przypadku zorientowanej rozmaitości pseudo-riemmanowskiej dowolnego wymiaru.*

Uwaga 2.8 *Przy tej definicji w wybranej przez nas sygnaturze mamy następujące, używane dalej, związki:*

- (1) $\star\Xi = 1$ oraz $\star 1 = -\Xi$,
- (2) $\star dt = dx \wedge dy \wedge dz$,
- (3) $\star d \star d = -\square$.

Pełna grupa $\mathcal{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ obejmuje wszelkie symetrie wraz ze zmianą orientacji w \mathcal{M} . Łatwo zauważyć, że największą spójną podgrupą grupy $\mathcal{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ (zachowującą orientację) jest $\mathcal{SO}_0(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$. W tak wyposażonej czasoprzestrzeni wprowadzimy kolejną niezmiennicza lorentzowsko strukturę - formę symplektyczną.

Definicja 2.9 *Dwuliniowe odwzorowanie*

$$\omega : \mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) \times \mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

takie, że dla $f, g \in \mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$

$$g\omega f = \int_{\Sigma_t} (g \wedge \star df - f \wedge \star dg) =: \int_{\Sigma_t} \omega_{g,f},$$

nazywamy formą symplektyczną na przestrzeni rozwiązań równania Kleina-Gordona. Σ_t jest dowolną powierzchnią stałego czasu w dowolnym układzie współrzędnych.

Aby sprawdzić poprawność definicji formy symplektycznej oraz jej niezmienniczość lorentzowską potrzebne jest następujące

Stwierdzenie 2.10 *Prawdziwe są poniższe łatwe stwierdzenia:*

- (1) Wartość formy ω nie zależy od wyboru powierzchni stałego czasu Σ_t .
- (2) Forma ω jest niezmiennicza pod działaniem grupy $\mathcal{SO}_0(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$.

Dowód.

Aby udowodnić (1) zauważmy, że forma $\omega_{g,f}$ jest zamknięta dla dowolnych dwóch $f, g \in \mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$. Łatwy rachunek daje, że

$$d\omega_{g,f} = dg \wedge \star df - df \wedge \star dg + g \wedge d \star df + f \wedge d \star dg = 0.$$

Korzystamy z tego, że dla tak wybranej sygnatury \star Hodge'a, ma własność

$$\star d \star d = -\square$$

oraz z faktu, iż funkcje f oraz g spełniają równanie Kleina-Gordona.

Rozważmy teraz zwarty podzbiór czasoprzestrzeni \mathcal{V} , w którego brzegu zawarte są dwie powierzchnie stałego czasu Σ_t oraz $\Sigma_{t'}$, taką by $\text{supp}(f) \subset \text{Int}(V)$ oraz $\text{supp}(g) \subset \text{Int}(V)$, wtedy z twierdzenia Stokesa mamy

$$0 = \int_V d\omega_{g,f} = \int_{\Sigma_t} \omega_{g,f} - \int_{\Sigma_{t'}} \omega_{g,f},$$

co dowodzi (1) dając rezultat

$$\int_{\Sigma_t} \omega_{g,f} = \int_{\Sigma_{t'}} \omega_{g,f}$$

dla dowolnych $f, g \in \mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ oraz $t, t' \in \mathbb{R}$. W celu udowodnienia (2) zauważmy, iż powołując się na (1) wystarczy rozważyć ω dla czasu $t = 0$ oznaczając przy tym $\Sigma := \Sigma_{t=0}$. Przy wybranej przez nas definicji operatora \star korzystając z (2.8) wyrażenie na $\omega_{g,f}$ przyjmuje prosta formę

$$\int_{\Sigma} \omega_{g,f} = \int_{\mathbb{R}^3} (g \partial_t f - f \partial_t g).$$

Niezmienniczość względem działania grupy $O(3)$ działającej w przestrzeni stałego czasu jest w tej postaci oczywista. W połączeniu z (1) daje to pełną niezmienniczość względem dowolnego wyboru powierzchni stałego czasu oraz całej grupy $\mathcal{SO}_0(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$. \square

2.3 Przestrzenie $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ i $\mathcal{A}'(\mathcal{M})$ jako przestrzenie wektorowe z topologią

Przestrzeń funkcji gładkich o zwartych nośnikach ze standardową topologią to często używana klasa funkcji, na których określa się zazwyczaj dystrybucje – ciągłe liniowe funkcjonały. Dla nas jest to klasa niewystarczająca, gdyż nasze rozwiązania mają być określone dla wszystkich chwil czasu. Dlatego w rozdziale (2.1) wprowadziliśmy definicję funkcji gładkich przestrzennie zwartych (o zwartym nośniku przestrzennym) $\mathcal{A}(\mathcal{M})$. Z definicji tej jednak nie wynika w żaden sposób jaka topologia miałaby być wprowadzona na $\mathcal{A}(\mathcal{M})$. W tym celu przedstawimy $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ jako granicę induktywną przestrzeni topologicznych.

Definicja 2.11 *W wybranym układzie współrzędnych zbiorem funkcji o zwartym nośniku przestrzennym zawartym w zwartej kostce $\mathcal{K} \times I$ nazywamy zbiór*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K},I}(\mathcal{M}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathcal{M}), f \Big|_{\Sigma_t} \in C_{\mathcal{K}}^\infty(\Sigma_t), t \in I \right\},$$

gdzie przez $C_{\mathcal{K}}^\infty$ oznaczamy funkcje gładkie o nośniku zwartym zawartym w \mathcal{K} . Topologię w zbiorach $\mathcal{A}_{\mathcal{K},I}(\mathcal{M})$ zadaje rodzina półnorm $\| \cdot \|_{\mathcal{K},I,\alpha}$ takich, że

$$\| \cdot \|_{\mathcal{K},I,\alpha} = \sup_{x \in \mathcal{K} \times I} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x^{\alpha_n}} f(x) \right|,$$

gdzie wielowskaźnik $\alpha \in \mathbb{N}^n$ oraz $n = \dim \mathcal{M} = 4$.

Nietrudno zauważyć, że dla $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$ oraz $I_1 \subset I_2$ mamy naturalne włożenie

$$\mathcal{A}_{\mathcal{K}_1,I_1}(\mathcal{M}) \hookrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{K}_2,I_2}(\mathcal{M}).$$

Teraz określamy $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ jako granicę induktywną przestrzeni topologicznych $\mathcal{A}_{\mathcal{K},I}(\mathcal{M})$. Mamy zatem

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}) = \bigcup_{\mathcal{K},I} \mathcal{A}_{\mathcal{K},I}(\mathcal{M}).$$

Jak wspomnieliśmy wcześniej przestrzeń $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ ma strukturę przestrzeni wektorowej. Możemy zatem wprowadzić do naszych rozważań przestrzeń $\mathcal{A}'(\mathcal{M})$ – przestrzeń ciągłych funkcjonałów liniowych na $\mathcal{A}(\mathcal{M})$. Będziemy ją również nazywać przestrzenią dystrybucji dla funkcji przestrzennie zwartych. Przestrzeń rozwiązań $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ jest w topologii indukowanej domkniętą podprzestrzenią wektorową w $\mathcal{A}(\mathcal{M})$. Możemy zatem określić $\mathcal{Y}'(\mathcal{M})$ jako obcięcie funkcjonałów z przestrzeni $\mathcal{A}'(\mathcal{M})$. Istnieje bowiem kanoniczna surjekcja $|_{\mathcal{Y}}$ taka, że

$$\mathcal{A}'(\mathcal{M}) \ni \Phi \longrightarrow \Phi \Big|_{\mathcal{Y}} \in \mathcal{Y}'(\mathcal{M}).$$

Wprowadzona przez nas przestrzeń dualna do przestrzeni rozwiązań jest obiektem kanonicznym z poprawnie określonym działaniem grupy $\mathcal{O}(1,3) \ltimes \mathbb{R}^4$. Dla nas szczególnie interesujące będą dwie rodziny dystrybucji, rozumiane jako klasyczny pęd i położenie. Określmy w dowolnym układzie współrzędnych (t, \vec{x}) dystrybucje $\Psi_t(\vec{x})$ oraz $\Pi_t(\vec{x})$ tak, by

$$\Psi_t(\vec{x})(f) = f(t, \vec{x})$$

oraz

$$\Pi_t(\vec{x})(f) = (\partial_t f)(t, \vec{x}).$$

W kolejnym rozdziale zajmiemy się dynamiką i strukturą przestrzeni rozwiązań analizując przestrzeń warunków początkowych dla chwili $t = 0$, co jak pokazaliśmy dotychczas, nie umniejsza ogólności rozumowania. Po bardziej pogłębionym rozumowaniu dla ustalonej chwili czasu opiszemy również rozumowanie ogólne, niezależne od tego wyboru.

2.4 Dynamika w przestrzeni $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$. Nawiasy Poissona.

Jak napisane w rozdziale (2.2) oraz (2.3) przestrzeń rozwiązań $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ może być parametryzowana przez podanie danych Cauchy'ego na powierzchni stałego czasu Σ_{t_0} w pewnym układzie współrzędnych (t, \vec{x}) . W ten sposób powstaje bijektywne utożsamienie ι_{t_0} , takie że

$$\iota_{t_0} : \mathcal{Y}_m(\mathcal{M}) \ni f(x) \longrightarrow \left(f(t_0, \vec{x}), \partial_t f(t_0, \vec{x}) \right) \in C_0^\infty(\Sigma_{t_0}) \oplus C_0^\infty(\Sigma_{t_0})$$

Ze stwierdzenia (2.10) wynika, iż przestrzeń rozwiązań $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ może być parametryzowana przez podanie danych Cauchy'ego na powierzchni zerowego czasu Σ bez utraty pożądanych własności inwariantności względem działania grupy $\mathcal{SO}_0(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$. W tym szczególnym wyborze bijektywne utożsamienie ι_{t_0} będziemy oznaczać zwyczajnie jako ι . W dalszej części rozdziału będę oznaczał parę warunków początkowych $(f(0, \vec{x}), \partial_t f(0, \vec{x}))$ jako (u, v) , gdzie $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Ponadto w przypadku czasoprzestrzeni Minkowskiego naturalnym jest, jak zostało to uczynione, utożsamianie powierzchni zerowego czasu Σ z przestrzenią euklidesową \mathbb{R}^3 . Dzięki tej identyfikacji możliwe jest proste i naturalne wprowadzenie dystrybucji położenia i pędu, w sposób zgodny z definicją kanoniczną podaną w rozdziale (2.3). Obiekty te jednak już nie będą jawnie niezmiennicze względem $\mathcal{SO}_0(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$. Rozważania w tym rozdziale prowadzimy między innymi w celu unaocznienia niezmienniczości standardowej konstrukcji względem przesunięć w czasie oraz pchnięć lorentzowskich.

Definicja 2.12 *Dla dowolnego $\vec{x} \in \Sigma \simeq \mathbb{R}^3$ określmy dystrybucje $\Pi(\vec{x}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ oraz $\Psi(\vec{x}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ działające na przestrzeni funkcji $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, tak by*

$$\Psi(\vec{x})(u, v) = u(\vec{x})$$

oraz

$$\Pi(\vec{x})(u, v) = v(\vec{x}).$$

Dystrybucje $\Psi(\vec{x})$ oraz $\Pi(\vec{x})$ nazywamy odpowiednio położeniem i pędem w punkcie $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Działanie dystrybucji Ψ oraz Π ogranicza się odpowiednio do przestrzeni położeń albo pędów. Korzystne jest wprowadzenie oznaczeń

$$\Psi(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(\vec{x})u(\vec{x})d\vec{x}$$

oraz

$$\Pi(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \Pi(\vec{x})v(\vec{x})d\vec{x}.$$

O parze (u, v) mówimy, iż są one funkcjami rozsmarowującymi lub – krótko – kształtami, odpowiednio w przestrzeni pędów albo położeń.

W tak przyjętych oznaczeniach Hamiltonian H omawianego tu pola skalarnego Kleina-Gordona przyjmuje postać

$$H = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} [\Pi(\vec{x})^2 + \Psi(\vec{x})(-\Delta + m^2)\Psi(\vec{x})] d\vec{x}.$$

Uwaga 2.13 *Forma symplektyczna ω cofnięta na Σ w przyjętych oznaczeniach wyraża się wzorem*

$$(u_1, v_1)\omega(u_2, v_2) = \int_{\mathbb{R}^3} (u_1v_2 - u_2v_1)d\vec{x}.$$

W przestrzeni fazowej określone są również nawiasy Poissona

$$\{\cdot, \cdot\} : (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)) \times (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \oplus \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Nawiasy Poissona to odwzorowanie dwuliniowe, dla którego zachodzą :

(1) reguła Leibniza

$$\{A(\vec{x}), B(\vec{x})C(\vec{x})\} = B(\vec{x})\{A(\vec{x}), C(\vec{x})\} - \{A(\vec{x}), B(\vec{x})\}C(\vec{x}), \quad (2.5)$$

(2) tożsamość Jacobiego

$$\{A(\vec{x}), \{B(\vec{x}), C(\vec{x})\}\} + \{B(\vec{x}), \{C(\vec{x}), A(\vec{x})\}\} + \{C(\vec{x}), \{A(\vec{x}), B(\vec{x})\}\} = 0. \quad (2.6)$$

Ponadto dla zmiennych kanonicznie sprzężonych mamy

$$\{\Psi(\vec{x}), \Pi(\vec{x}')\} = \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.7)$$

Równania ruchu określające dynamikę układu można teraz zapisać w dwóch dualnych postaciach dla funkcji (u, v) (1) lub dystrybucji (Ψ, Π) (2):

(1)

$$\partial_t u = v \quad (2.8)$$

oraz

$$\partial_t v = -(-\Delta + m^2)u \quad (2.9)$$

(2)

$$\partial_t \Psi(\vec{x}) = \Pi(\vec{x}) \quad (2.10)$$

oraz

$$\partial_t \Pi(\vec{x}) = -(-\Delta + m^2)\Psi(\vec{x}) \quad (2.11)$$

Stwierdzenie 2.14 *Równania ruchu można zapisać równoważnie posługując się nawiasem Poissona dla dystrybucji w następujący sposób:*

$$\partial_t \Psi(\vec{x}) = \{\Psi(\vec{x}), H\} \quad (2.12)$$

$$\partial_t \Pi(\vec{x}) = \{\Pi(\vec{x}), H\} \quad (2.13)$$

Dowód.

W celu udowodnienia równoważności (2.10) z (2.12) skorzystamy z definicji nawiasów Poissona (2.7). Mamy

$$\begin{aligned}\partial_t \Psi(\vec{x}) &= \{\Psi(\vec{x}), H\} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \{\Psi(\vec{x}), \Pi(\vec{x}')^2 + \Psi(\vec{x}')(-\Delta + m^2)\Psi(\vec{x}')\} d\vec{x}' = \\ &= \int_{\Sigma} \Pi(\vec{x}) \{\Psi(\vec{x}), \Pi(\vec{x}')\} d\vec{x}' = \Pi(\vec{x})\end{aligned}$$

Podobnie dla drugiej pary równań mamy

$$\begin{aligned}\partial_t \Pi(\vec{x}) &= \{\Pi(\vec{x}), H\} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \{\Pi(\vec{x}), \Pi(\vec{x}')^2 + \Psi(\vec{x}')(-\Delta + m^2)\Psi(\vec{x}')\} d\vec{x}' = \\ &= \int_{\Sigma} \{\Pi(\vec{x}), \Psi(\vec{x}')\}(-\Delta + m^2)\Pi(\vec{x}') d\vec{x}' = -(\Delta + m^2)\Psi(\vec{x})\end{aligned}$$

□

Pisząc

$$\{\Psi(\vec{x}), H\}(u, v)$$

oraz

$$\{\Psi(\vec{x}), H\}(u, v)$$

korzystając przy tym z definicji dystrybucji Ψ i Π otrzymujemy równania ruchu dualne do dystrybucyjnych.

Warto zauważyć, że cała przedstawiona procedura jest kowariantna względem działania grupy $\mathcal{O}(1, 3) \times \mathbb{R}^4$, w związku z czym nie tracimy żadnych własności teorii względem grupy Poincarégo. Jawne pokazanie tego faktu wymaga jednak poświęcenia nieco większej uwagi strukturze przestrzeni rozwiązań. Poświęcony temu będzie kolejny rozdział, bezpośrednio poprzedzający procedurę kwantowania.

2.5 Dodatkowa struktura w przestrzeni $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$. Struktura Kählera.

Standardowo pisząc $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ rozumiemy, że funkcje doń należące przyjmują wartości zespolone, zaś symbolem $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ oznaczamy przestrzeń rozwiązań zawierającą wyłącznie funkcje o rzeczywistych wartościach. W tym rozdziale będziemy stosować notację uproszczoną, o ile nie będzie to budzić wątpliwości.

Celem niniejszego rozdziału jest dokładniejsze przeanalizowanie użyteczności utożsamienia ι i przyjrzeniu się strukturze zbioru $\mathcal{Y} = (C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}^3))^{\mathbb{R}}$. Przestrzeń wektorową \mathcal{Y} traktujemy jako rzeczywistą przestrzeń symplektyczną z formą symplektyczną ω daną wzorem

$$(u_1, v_1)\omega(u_2, v_2) = \int_{\mathbb{R}^3} (u_1 v_2 - u_2 v_1) d\vec{x},$$

gdzie $(u_i, v_i) \in \mathcal{Y}$. W notacji macierzowej piszemy

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

traktując ω jako macierz blokową oraz pamiętając o tym, że \mathcal{Y} jest sumą prostą dwóch izomorficznych podprzestrzeni. Elementy przestrzeni \mathcal{Y} dalej będziemy zapisywali jako

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t \in \mathcal{Y},$$

gdzie indeks t oznacza chwilę czasu w ewolucji wektora $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Nie będziemy pisać indeksów, gdy wybraną chwilą czasu będzie $t = 0$, o ile nie będzie powodować to niejasności.

W przestrzeni symplektycznej (\mathcal{Y}, ω) mamy określoną dynamikę, daną za pomocą równań

$$\partial_t u = v \tag{2.14}$$

oraz

$$\partial_t v = -(-\Delta + m^2)u. \tag{2.15}$$

W niniejszym rozdziale będziemy stosować zapis

$$\partial_t \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(-\Delta + m^2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

co definiuje operator

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(-\Delta + m^2) & 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy z teorii równań liniowych pierwszego rzędu wiadomo, że

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_t = e^{(t-t_0)b} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{t_0}.$$

Możemy zatem b traktować jako generator translacji w czasie lub mówiąc fizycznie - ewolucję układu. Zauważmy, że hamiltonian układu można wyrazić za pomocą formy symplektycznej i generatora translacji czasowych wzorem

$$\beta = -\frac{1}{2}\omega b = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(-\Delta + m^2) & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\Delta + m^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Co w inny sposób można zapisać jako

$$\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \beta \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} [v(\vec{x})^2 + u(\vec{x})(-\Delta + m^2)u(\vec{x})] d\vec{x}.$$

Jako dodatnio określona forma kwadratowa β definiuje poprawny iloczyn skalarny, czyniąc z przestrzeni \mathcal{Y} rzeczywistą przestrzeń z iloczynem skalarnym oraz formą symplektyczną. Warto zauważyć, że b jest elementem algebry symplektycznej i infinitezymalnie zachowuje formę ω , zachodzi bowiem

$$b^\# \omega + \omega b = 0.$$

Skoro $b \in sp(\mathcal{Y})$, prawdą jest, że $e^{tb} \in Sp(\mathcal{Y})$, tzn. e^{tb} jest elementem grupy zachowującej formę symplektyczną ω – symplektomorfizmem, dokładniej

$$e^{tb\#} \omega e^{tb} = \omega.$$

Dodatkowo zauważmy, że w iloczynie skalarnym β operator b jest antysymetryczny. Oznaczmy przez b^* operator sprzężony do b w iloczynie skalarnym β , mamy wtedy

$$|b| = (b^*b)^{\frac{1}{2}} = (-b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Z formuły polaryzacyjnej wiemy, iż zachodzi

$$b = |b|j = (-b^2)^{\frac{1}{2}}j.$$

z własności antysymetrii operatora b wynika, iż j jest antyinvolucją, tzn. $j^2 = -1$. Proste obliczenia dają

$$j = \begin{bmatrix} 0 & (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \\ -(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Prosty rachunek pokazuje, że

$$[b, j] = 0 \tag{2.16}$$

z czego w łatwy sposób wynika zależność

$$e^{-tb}j e^{tb} = j, \tag{2.17}$$

co oznacza, iż struktura zespolona j jest zachowywana przez ewolucję układu (translację w czasie) oraz w rezultacie przez dowolne transformacje z grupy Lorentza. Wprowadzone dotychczas obiekty posłużą do skonstruowania odwzorowania odwrotnego do bijekcji ι , która utożsamia rozwiązanie z jego warunkiem początkowym w pewnej chwili czasu.

$$\iota_{t_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{(t-t_0)b} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{t_0}.$$

Rachunek pokazuje, że

$$e^{tb} = \cos(t(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin(t(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}) \begin{bmatrix} 0 & (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \\ -(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\iota_{t_0}^{-1} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{t_0} \right) = \begin{bmatrix} \cos((t-t_0)(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}) & (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \sin((t-t_0)(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}) \\ \sin((t-t_0)(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}) & \cos((t-t_0)(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{t_0}.$$

Można napisać, iż

$$\iota_{t_0}^{-1} \left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{t_0} \right) = f(t, \vec{x}).$$

Odwzorowanie ι wraz z przekształceniem odwrotnym zadają jawne utożsamienie przestrzeni rozwiązań klasycznych $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ z przestrzenią warunków początkowych. Ponadto umożliwia ono

transport obiektów skonstruowanych w przestrzeni warunków początkowych do przestrzeni rozwiązań klasycznych $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$, np. zapisanie struktury zespolonej w $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$. Jawne wzory na strukturę zespoloną w przestrzeni rozwiązań nie będą istotnie potrzebne w niniejszej pracy w związku z czym zostaną pominięte. Aby w przestrzeni \mathcal{Y} wprowadzić strukturę Kählera należy zdefiniować symetryczną formę dodatnio określoną

$$\alpha = -\omega j = \begin{bmatrix} (-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

Teraz można zadać hermitowski iloczyn skalarny wektorów $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ wzorem

$$(y_1 | y_2) = y_1 \alpha y_2 + i y_1 \omega y_2.$$

Taka przestrzeń traktowana jako zespolona przestrzeń liniowa względem j , jest w istocie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $(\cdot | \cdot)$. Tak wyposażoną przestrzeń za [6] nazywać będziemy przestrzenią Kählera. Jest to rzeczywista przestrzeń wektorowa wyposażona w formę symplektyczną, strukturę zespoloną oraz dodatnio określoną formę symetryczną, które jak opisane wyżej, tworzyć mają hermitowski iloczyn skalarny. Nazwa ta stosowana jest w niniejszej pracy celem położenia nacisku na znaczenie poszczególnych składników konstruowanego iloczynu skalarnego.

Kolejnym aspektem jest stworzenie zespolonej przestrzeni z dynamiką oraz hermitowskim iloczynem skalarnym - tzw. skompleksyfikowanej przestrzeni Kählera. Jak wcześniej wspomniano, taka przestrzeń w istocie jest przestrzenią Hilberta (jeśli jest zupełna) i może służyć do skonstruowania przestrzeni Focka, czy reprezentacji Focka algebry kanonicznych reguł komutacyjnych. Pojęcia te będą rozwinięte w kolejnym rozdziale, znacznie dokładniejsze omówienie tematu można znaleźć w [6].

2.6 Kompleksyfikacja przestrzeni $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$. Skompleksyfikowana struktura Kählera.

Ważnym krokiem jest zidentyfikowanie w naszej przestrzeni rozwiązań konceptów takich jak przestrzeń dodatnio-energetycznych rozwiązań, przestrzeń pól rzeczywistych oraz zespolonych. Zajmują one ważne miejsce w interpretacji mechaniki kwantowej, daje się je jednak wyróżnić już na poziomie rozwiązań klasycznych. Dla przypomnienia, w poprzednim rozdziale wyposażyliśmy przestrzeń symplektyczną $(\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}), \omega)$ w dodatkową strukturę, wykorzystując do tego dynamikę. W efekcie wyposażyliśmy $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ w strukturę Kählera (lub Hilberta), na którą składają się struktura zespolona j , forma symplektyczna ω , symetryczna forma dodatnio określona $\alpha = -\omega j$ i hermitowski iloczyn skalarny $(\cdot | \cdot) = \alpha + i\omega$.

Kompleksyfikacja przestrzeni liniowych z różną strukturą jest szerzej opisana w [6], na potrzeby tej pracy przytaczam skrócone, lecz pełne rozumowanie. Chcąc pracować z funkcjami (polami) o wartościach zespolonych w pierwszej kolejności kompleksyfikujemy przestrzeń $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ w sposób standardowy. Niech $Y_m(\mathcal{M}) = \mathbb{C}\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$, formy α oraz ω rozszerzamy do form półtoraliniowych, natomiast strukturę zespoloną j rozszerzamy przez \mathbb{C} -liniowość. W naturalny sposób pojawiają się dwa operatory rzutowe

$$P_Z = \frac{1 - ij}{2}$$

oraz

$$P_{\bar{\mathcal{Z}}} = \frac{1 + ij}{2}.$$

W iloczynie skalarnym $\alpha + i\omega$ są one ortogonalne i w związku z tym mamy rozkład

$$\mathbb{C}\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}.$$

Podprzestrzenie \mathcal{Z} i $\bar{\mathcal{Z}}$ nazywamy odpowiednio holomorficzną i antyholomorficzną. Można powiedzieć, iż w teoriach kwantowych rozróżniają one między kreatorami a anihilatorami. Przestrzeń rozwiązań rzeczywistych $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ możemy identyfikować z przestrzenią

$$\text{Re}(\mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}}) = \left\{ (z, \bar{z}) \in \mathcal{Z} \oplus \bar{\mathcal{Z}} \right\}.$$

Wybór tej identyfikacji nie jest jednak kanoniczny i zależy od przyjętych konwencji, które w niniejszej pracy nie będą odgrywać szczególnej roli.

Tak skompleksyfikowana przestrzeń Kählera, jeśli jest zupełna, staje się przestrzenią Hilberta i może posłużyć do skonstruowania przestrzeni Focka $\Gamma(Y_m(\mathcal{M}))$ lub ściślej mówiąc - reprezentacji Focka na algebrze $\mathcal{CCR}(\mathcal{Y})$.

2.7 Podsumowanie: Przestrzeni rozwiązań $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ i sposoby jej opisu.

Zdefiniowane wcześniej przestrzenie, wyposażone w różnorodne struktury posłużą do dokonania procesu kwantyzacji. By dokonać podsumowania roli wprowadzonych obiektów w zrozumieniu teorii kwantowych zamieszczam diagram, przedstawiający ich wzajemną hierarchię oraz ukazujący poglądowo standardowo przeze mnie stosowaną notację.

$$\begin{array}{ccc} f \in \mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})' \ni \Upsilon \\ \downarrow \iota & & \downarrow \tilde{\iota} \\ (u, v) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & D(\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3) \ni (\Psi(\vec{x}), \Pi(\vec{x})) \end{array}$$

Powyżej poziome strzałki pochodzą od kanonicznych włożeń przestrzeni funkcji próbnych w odpowiednie przestrzenie dystrybucji, natomiast strzałki pionowe pochodzą od zdefiniowanego wcześniej bijektywnego utożsamienia rozwiązania z jego warunkiem początkowym. Wszystkie przestrzenie wyposażone są w strukturę Kählera, na którą składa się forma symplektyczna ω , forma symetryczna α i struktura zespolona j , łącznie dające hermitowski iloczyn skalarny $\alpha + i\omega$. Korzystając z bijekcji ι dostajemy izomorficzne struktury we wszystkich przestrzeniach występujących w diagramie.

W przypadku dystrybucji oznaczać będziemy ich działanie na funkcjach próbnych jako

$$\Upsilon_{t_0}(f) = \int_{\Sigma_{t_0}} \Psi_{t_0}(\vec{x}) f(t_0, \vec{x}) + \Pi_{t_0}(\vec{x}) \partial_t f(t_0, \vec{x}).$$

Podczas procedury kwantyzacji opisane powyżej dystrybucje stają się dobrze znanymi w fizyce teoretycznej operatorami pól kwantowych.

2.8 Kwantowa algebra Weyla dla pola skalarnego Kleina–Gordona

Przypomnijmy, iż przestrzeń rozwiązań równania Kleina-Gordona oznaczana poprzednio przez $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ posiada strukturę zespolonej przestrzeni liniowej z formą symplektyczną ω . W niniejszym rozdziale interesować nas będzie przestrzeń rzeczywistych funkcji spełniających równanie Kleina-Gordona $\mathcal{Y}^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$, wyposażona w tę samą formę symplektyczną oznaczaną, tak samo jak poprzednio, ω .

Kolejnym krokiem w kierunku kwantyzacji teorii pola skalarnego będzie zdefiniowanie pewnej algebry kwantowych obserwabi, oznaczanej jako $\mathcal{CCR}(\mathcal{Y})$. Niektóre elementy tej algebry będą jednoznacznie związane z odpowiednimi funkcjami ze zbioru $\mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$. Mnożenie elementów wewnątrz tej algebry ma w naturalny sposób odzwierciedlać reguły komutacyjne w postaci Weyla. Szersza wiedzę na temat algebr tego rodzaju znaleźć można w [1],[2], skąd są również zaczerpnięte przytoczone dalej stwierdzenia i fakty na temat \mathcal{C}^* -algebr.

Poniższe twierdzenie zawiera w sobie obszerny opis własności \mathcal{C}^* -algebry $\mathcal{CCR}(\mathcal{Y})$. Jego dowód wraz z dodatkowymi, obszernymi informacjami o tego typu \mathcal{C}^* -algebrach zawarty jest w [1],[2]. Twierdzenie poniższe umożliwia wykorzystanie metody GNS¹ do konstrukcji reprezentacji stanów na $\mathcal{CCR}(\mathcal{Y})$, co prowadzi do poprawnej i ścisłej matematycznie definicji kwantowych operatorów pola.

Twierdzenie 2.15 *Niech (\mathcal{Y}, ω) będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową z formą symplektyczną ω . Rozważmy algebrę generowaną przez niezerowe elementy $W(y)$ przypisane każdemu $y \in \mathcal{Y}$, tak by dla dowolnych $y, y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ zachodziło*

$$W(y)^* = W(-y) \quad (2.18)$$

oraz

$$W(y_1)W(y_2) = e^{-\frac{i}{2}y_1\omega y_2} W(y_1 + y_2). \quad (2.19)$$

Zachodzą wówczas następujące stwierdzenia:

- (1) $\mathcal{CCR}(\mathcal{Y})$ istnieje i jest \mathcal{C}^* -algebrą wyznaczoną z dokładnością do \star -automorfizmów.
- (2) $\mathcal{CCR}(\mathcal{Y})$ posiada jedynekę i jest nią $W(0)$, ponadto dla dowolnego $y \in \mathcal{Y}$ mamy

$$W(y)^*W(y) = 1$$

oraz, gdy $y \neq 0$

$$\|W(y) - 1\| = 2.$$

- (3) $\mathcal{CCR}(\mathcal{Y})$ jest prosta.
- (4) $\mathcal{CCR}(\mathcal{Y})$ jest nieośrodkowa, jeśli $\mathcal{Y} \neq \{0\}$.
- (5) Jeśli $T \in Sp(\mathcal{Y})$ (T jest symplektomorfizmem), wtedy istnieje jedyny \star -automorfizm γ taki, że

$$\gamma(W(y)) = W(Ty).$$

¹GNS – od nazwisk Gelfand–Najmark–Segal.

Powyższe twierdzenie daje algebrę wraz ze wszystkimi strukturami potrzebnymi do zdefiniowania kwantowej teorii pola. Umożliwia ono prostą, a jednocześnie matematycznie ścisłą procedurę definicji przestrzeni stanów, obserwabli etc., korzystając z dobrze poznanego formalizmu C^* -algebr.

2.9 Stany na $CCR(\mathcal{Y})$. Reprezentacje algebry $CCR(\mathcal{Y})$. Grupy unitarne.

Analiza teorii kwantowego pola skalarnego wymaga dodatkowego pojęcia stanu na C^* -algebrze $CCR(\mathcal{Y})$ oraz w następnej kolejności konstrukcji reprezentacji GNS dla danego stanu. Określenie stanu na C^* -algebrze należy rozumieć tu jako podanie „próżniowych” wartości oczekiwanych dla obserwabli zawartych w $CCR(\mathcal{Y})$.

Definicja 2.16 *Funkcjonałem dodatnim na C^* -algebrze \mathfrak{A} nazywamy \mathbb{C} -liniowe odwzorowanie*

$$\omega : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{C},$$

takie, że dla dowolnych $A \in \mathfrak{A}$, mamy

$$A \neq 0 \Rightarrow \omega(A^*A) > 0.$$

Definicja 2.17 *Stanem na C^* -algebrze \mathfrak{A} nazywamy funkcjonal dodatni ω spełniający*

$$\omega(1) = 1.$$

Uwaga 2.18 *Na C^* -algebrze $CCR(\mathcal{Y})$ potrzeba i wystarcza określić stan ω na elementach postaci $W(y)$ dbając o jego zgodność z działaniem, ponieważ z (2.19) wynika, iż mnożenie elementów tej postaci nadal jest elementem typu $W(y)$. Dokładniej, określmy dla każdej bazy $(y_i)_{i \in \mathcal{I}}$ w \mathcal{Y} zbiór*

$$\mathbf{Gen}[(y_i)_{i \in \mathcal{I}}] = \left\{ W(\alpha y_i) : \alpha \in \mathbb{R}, i \in \mathcal{I} \right\}.$$

Dowolne przypisanie

$$\hat{\omega} : \mathbf{Gen}[(y_i)_{i \in \mathcal{I}}] \ni W(y) \longrightarrow \hat{\omega}(y)$$

wyznacza jednoznacznie funkcjonal $\omega : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{C}$. Innymi słowy, w celu określenia stanu na C^ -algebrze $CCR(\mathcal{Y})$ potrzeba i wystarcza określić jego wartość dla wektorów należących do wybranych kierunków bazowych.*

Pozostałe wartości stanu ω dostajemy z liniowości oraz w wyniku działania w C^ -algebrze $CCR(\mathcal{Y})$.*

Wiadomo z ogólnej teorii C^* -algebr, że dla każdego stanu $\omega : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ istnieje przestrzeń Hilberta \mathcal{H}_ω , reprezentacja $\Pi_\omega : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ oraz wektor cykliczny $\mathcal{V}_\omega \in \mathcal{H}_\omega$, takie że

$$\omega(W(y)) = (\mathcal{V}_\omega | \Pi_\omega(W(y)) \mathcal{V}_\omega).$$

Procedura ta jest dobrze znana w ogólnej teorii C^* -algebr pod nazwą konstrukcji GNS – [1],[2].

Znany również jest fakt, iż każda C^* -algebra, zatem również $CCR(\mathcal{Y})$, jest izomorficzna pewnej podalgebrze w $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dla odpowiedniej przestrzeni Hilberta \mathcal{H} (twierdzenie o postaci

C^* –algebr nieprzemiennej, [1],[2]). Dyskretna reprezentacja Π algebry $\mathcal{CCR}(\mathcal{Y})$ nie posiada jednak wielu pożądaných własności, co uniemożliwia łatwe jej użycie do konstruowania kwantowych teorii. Jedną z takich wad jest brak silnej ciągłości grupy unitarnej

$$\mathcal{U}_t(W(y)) := \Pi(W(ty)),$$

co, jak dalej opiszemy, oznacza brak samosprężonego generatora (operatora pola). Konieczne jest więc rozważanie pewnej konkretnej klasy stanów o dobrych własnościach oraz reprezentacji związanych z tymi stanami, nie zaś zajmowanie się ogólnymi reprezentacjami, znanymi w teorii C^* –algebr.

Przedstawiane tu problemy są dość dobrze poznane dla C^* –algebr i nie będą głównym tematem niniejszej pracy. W związku z tym przytoczymy tu tylko niektóre stwierdzenia i definicje uznane za najistotniejsze w omawianym temacie.

W celu opisania ograniczeń na stany oraz uzyskania pożądaných własności w reprezentacjach konieczne jest omówienie kilku faktów i definicji z teorii operatorów. Szczególnie interesującym pojęciem jest grupa unitarna, która będzie odgrywać główną rolę w opisie dynamiki układu kwantowego.

Definicja 2.19 *1-parametrową grupą unitarną \mathcal{U} nazywamy odwzorowanie*

$$\mathcal{U} : \mathbb{R} \ni t \longrightarrow \mathcal{U}_t \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

spełniające warunki

- (1) $\mathcal{U}_0 = 1$,
- (2) $\mathcal{U}_{t_1}\mathcal{U}_{t_2} = \mathcal{U}_{t_1+t_2}$.

Z powyższych łatwo wynika, że zachodzi

$$\mathcal{U}_{t_1}^{-1} = \mathcal{U}_{t_1}^* = \mathcal{U}_{-t_1}.$$

Uwaga 2.20 *Będziemy pomijać przedrostek „1-parametrowa”, gdyż tylko takie grupy unitarne będą występować w niniejszej pracy.*

Definicja 2.21 *Grupę unitarną \mathcal{U} nazywamy silnie ciągłą jeśli dla dowolnego wektora $x \in \mathcal{H}$ odwzorowanie*

$$\mathbb{R} \ni t \longrightarrow \mathcal{U}_t(x) \in \mathcal{H}$$

jest ciągłe w normie.

Silnie ciągłe grupy unitarne zajmują niebywale ważne miejsce w opisie układów kwantowych. Zachodzi poniższe

Twierdzenie 2.22 (Stone) *Dla dowolnej silnie ciągłej grupy unitarnej \mathcal{U} istnieje dokładnie jeden gęsto określony operator \mathcal{A} istotnie samosprężony taki, że*

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}_t - \mathcal{U}_0}{it} = \mathcal{A}.$$

W związku z tym możemy poprawnie zdefiniować e^{itA} jako grupę unitarną generowaną przez element \mathcal{A} . Będziemy pisać

$$\mathcal{U}(t) = e^{itA}.$$

Pozwala to na określenie pewnego typu reprezentacji C^* -algebry $CCR(\mathcal{Y})$, dla którego będzie można określić generatory – operatory pola.

Definicja 2.23 *Reprezentację $\Pi : CCR(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazywamy regularną jeśli dla każdego $y \in \mathcal{Y}$ grupa unitarna \mathcal{U}_y określona odwzorowaniem*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \Pi(W(ty)) =: \mathcal{U}_{(t,y)} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

jest silnie ciągła.

Uwaga 2.24 *W przypadku regularnej reprezentacji każda jednoparametrowa grupa unitarna wyznaczona przez element $y \in \mathcal{Y}$ posiada generator i można ją jednoznacznie zapisać jako*

$$e^{it\Phi(y)} = \mathcal{U}_{(t,y)} [= \Pi(W(ty))],$$

gdzie Φ jest odwzorowaniem przypisującym wektorowi y samosprężony generator grupy unitarnej \mathcal{U}_y . Φ Jest poprawnie określone, gdyż grupy unitarne wyznaczone przez różne wektory $y, y' \in \mathcal{Y}$ są różne.

Analiza wszystkich stanów na $CCR(\mathcal{Y})$ jest zajęciem trudnym, wymagającym użycia wielu narzędzi analizy funkcjonalnej. Wprowadziwszy pojęcie reprezentacji regularnej można dalej ograniczyć przestrzeń rozpatrywanych stanów. Posłuży ku temu

Definicja 2.25 *Stan ω nazywamy regularnym, wtedy i tylko wtedy, gdy jego reprezentacja GNS $(\mathcal{H}_\omega, \Pi_\omega, \mathcal{V}_\omega)$ jest regularna.*

Nadal badanie wszystkich stanów regularnych na $CCR(\mathcal{Y})$ wydają się przerastać możliwości i potrzeby tej pracy. W związku z tym wprowadzimy pojęcie stanów quasi-swobodnych², które, jak zobaczymy, będą posiadały wszystkie pożądane własności fizyczne. Warto nadmienić, iż stan Focka, stany termiczne itp. należą do tejże klasy.

Definicja 2.26 *Reprezentacja GNS stanu ω*

$$\Pi_\omega : CCR(\mathcal{Y}) \ni W(y) \mapsto \Pi_\omega(W(y)) =: \mathcal{U}(y) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$$

nosi nazwę quasi-swobodnej, wtedy i tylko wtedy, gdy w \mathcal{H}_ω istnieje cykliczny wektor quasi-swobodny Ψ .

Wektorem quasi-swobodnym nazywamy wektor $\Psi \in \mathcal{H}_\omega$, dla którego zachodzi

$$\langle \Psi | \mathcal{U}(y)\Psi \rangle = \exp\left(-\frac{1}{4}y\eta y\right),$$

gdzie η jest pewną dodatnio określoną formą kwadratową na \mathcal{Y} .

Stan ω na $CCR(\mathcal{Y})$ nazywamy quasi-swobodnym jeśli

$$\omega(W(y)) = \exp\left(-\frac{1}{4}y\eta y\right).$$

²Podjęcie do omawianego tematu jest w zgodzie z [3]. Zawarte są tam również dodatkowe informacje na temat stanów quasi-swobodnych oraz ich reprezentacji GNS.

Wprost z definicji (2.26) wynika następujące proste

Stwierdzenie 2.27 *Reprezentacja quasi-swobodna jest regularna.*

Możemy zatem w poprawny sposób zdefiniować operatory pola $\Phi(y)$ jako generatory grup $\mathcal{U}_t(y)$. Dalej zamiast $\mathcal{U}_t(y)$ będziemy pisać $e^{i\Phi(y)}$.

Dobrze znane dla przestrzeni Focka twierdzenie Wicka zachodzi również dla stanów quasi-swobodnych. W związku z tym każda $2m$ -punktowa funkcja korelacji policzona dla wektora quasi-swobodnego Ψ , wyraża się poprzez funkcje dwupunktowe, a każda taka $2m + 1$ -punktowa funkcja korelacji jest tożsamościowa równa zeru. Ponadto zachodzi wzór

$$\langle \Psi | \Phi(y_1)\Phi(y_2)\Psi \rangle = y_1(\eta + \frac{i}{2}\omega)y_2.$$

Dzięki określeniu formy kwadratowej η , na \mathcal{Y} można wprowadzić dodatkową strukturę normy, tak by dla dowolnego $y \in \mathcal{Y}$ było

$$\|y\| = |y\eta y|^{\frac{1}{2}}.$$

Wtedy prawdziwa jest nierówność

$$|y_1\omega y_2| \leq 2\|y_1\|\|y_2\|.$$

Nierówność ta oraz inne ograniczenia na wykorzystywane do konstrukcji stanów formy odgrywają rolę w opisie reprezentacji oraz w klasyfikacji stanów na danej algebrze. Niewielka część z nich zostanie użyta i opisana w tej pracy. Teraz zajmiemy się opisem wszystkich quasi-swobodnych reprezentacji dla pola skalarnego.

2.10 Reprezentacje quasi-swobodne dla pola skalarnego Kleina–Gordona

Przypomnijmy, że na przestrzeni rozwiązań $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ określonej w rozdziale (2.1) działa grupa $\mathfrak{G} = \mathcal{O}(1, 3) \times \mathbb{R}^4$. Naturalnym jest żądanie, by stan quasi-swobodny posiadał własność niezmienniczości ze względu na działanie grupy \mathfrak{G} . Ponadto stan ten powinien być niezmienniczy ze względu na dynamikę. Pokażemy, iż takich stanów jest niewiele, bowiem żądania niezmienniczości względem na działania grupy Poincarégo oraz niezmienniczości względem dynamiki wprowadzają silne ograniczenia na postać stanów.

Twierdzenie 2.28 *Wszystkie stany quasi-swobodne dla skalarnego pola Kleina-Gordona niezmiennicze ze względu na $\mathcal{O}(1, 3) \times \mathbb{R}^4$ oraz dynamikę scharakteryzowane są przez liczbę rzeczywistą $\rho_0 \in [1, +\infty[$.*

Dowód.

Ogólny stan quasi-swobodny wyraża się poprzez formę kwadratową σ jako

$$\omega_\sigma(W(f)) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y} [f(0, \vec{y}) \quad \partial_t f(0, \vec{y})] \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x, y) & \sigma_{12}(x, y) \\ \sigma_{21}(x, y) & \sigma_{22}(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0, \vec{x}) \\ \partial_t f(0, \vec{x}) \end{bmatrix}\right).$$

Pisząc $\sigma(x, y)$ mamy na myśli dystrybucyjne jądro całkowe formy σ . Wykorzystamy teraz postulat niezmienniczości ze względu na grupę Poincarégo zaczynając od translacyjnej niezmienniczości. Działając elementem $(1, a) \in \mathcal{O}(1, 3) \times \mathbb{R}^4$ na funkcje podcałkowe (dokonując zamiany zmiennych) od razu otrzymujemy, iż dla każdego elementu macierzowego musi być spełnione

$$\sigma_{ab}(x + a, y + a) = \sigma_{ab}(x, y),$$

gdzie $a, b = 1, 2$. Stąd wynika, iż $\sigma_{ab}(x, y)$ są w istocie dystrybucjami jednej zmiennej, i oznaczają je będziemy przez $\sigma_{ab}(x - y)$. Ograniczyliśmy zatem rozważane stany do postaci

$$\omega_\sigma(W(f)) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{y} [f(0, \vec{y}) \quad \partial_t f(0, \vec{y})] \begin{bmatrix} \sigma_{11}(x-y) & \sigma_{12}(x-y) \\ \sigma_{21}(x-y) & \sigma_{22}(x-y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0, \vec{x}) \\ \partial_t f(0, \vec{x}) \end{bmatrix}\right).$$

Postać splotu sugeruje użycie transformaty Fouriera jako narzędzia ułatwiającego dalszą analizę. Po transformacji mamy bowiem

$$\omega_\sigma(W(f)) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} [\hat{f}(\vec{k}) \quad \widehat{\partial_t f}(\vec{k})] \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11}(\vec{k}) & \hat{\sigma}_{12}(\vec{k}) \\ \hat{\sigma}_{21}(\vec{k}) & \hat{\sigma}_{22}(\vec{k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}(\vec{k}) \\ \widehat{\partial_t f}(\vec{k}) \end{bmatrix}\right).$$

Stosując do powyższego postulat niezmienniczości względem dynamiki oraz niezmienniczości względem transformacji Lorentza, otrzymujemy, że

$$\hat{\sigma}(\vec{k}) = \rho_0 \hat{\alpha}(k),$$

gdzie

$$\hat{\alpha}(\vec{k}) = \begin{bmatrix} (\vec{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (\vec{k}^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix},$$

a $\rho_0 \in \mathbb{R}$. Liczba ρ_0 musi być dodatnia. Z teorii stanów quasi-swobodnych wiadomo, że musi być również $\rho_0 \geq 1$, a ponadto dla $\rho_0 = 1$ reprezentacja GNS skonstruowanego stanu jest (jedyną) reprezentacją Focka. \square

Dalsza konstrukcja obejmuje standardową procedurę konstruowania reprezentacji GNS wraz z komponentami wchodzącymi w jej skład i należy do kanonów, w związku z czym nie będzie dalej opisywana. Dodać można, iż stany dla $\rho_0 > 1$ są stanami termicznymi, a ich reprezentacje są dobrze poznane. Należą one do klasy reprezentacji Arakiego-Woodsa i są szeroko opisane w [3].

2.11 Podsumowanie: pole skalarne. Od teorii klasycznej do kwantowej.

Idea zaprezentowana w pierwszej części tej pracy, choć dotyczy pola skalarnego, może być stosowana z powodzeniem do teorii bardziej skomplikowanych. W kolejnej części pracy przedstawimy jej zastosowanie do kwantyzacji pola wektorowego, gdzie jak zobaczymy, zostanie ona zastosowana bez większych modyfikacji.

3 Pole wektorowe w przestrzeni Minkowskiego

W poprzedniej części zostało opisane algebraiczne podejście do kwantowania pola skalarnego. Wprowadzone symbole i pojęcia będą teraz kluczowe w zwięzłym i prostym opisie kwantyzacji pola wektorowego masywnego. Ciekawym tematem jest opis pola bezmasowego, temat ten jednak nie zostanie omówiony w tej pracy. W pierwszej części rozpatrzemy przypadek pola masywnego, omawiając różne teorie wyjściowe i nie narzucając na pola żadnych dodatkowych warunków przed kwantyzacją.

3.1 Pole wektorowe. Lagranżjan i sformułowanie klasyczne.

W celu systematycznego opisanie różnic i podobieństw między stosowanymi w fizyce teoretycznej opisami pól wektorowych oraz zrozumieniu procedury kwantyzacji takiego pola, przedstawimy po krótko przegląd lagranżowskiego podejścia do omawianego tematu. Stosowane tu oznaczenia są typowe dla podręczników fizyki kwantowej i z tego powodu nie są ściśle definiowane. Braki te zostaną uzupełnione w kolejnych rozdziałach przy systematycznej definicji rozmaitych obiektów związanych z teorią wektorową.

Wprowadźmy dwuparametrową rodzinę lagranżjanów $\mathcal{L}_{m,\lambda}$. Teorie, które rozpatrujemy, opisuje gęstość lagranżjanu

$$\mathcal{L}_{m,\lambda} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\lambda(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu).$$

Dla $\lambda = 1$ otrzymujemy lagranżjan znany w literaturze pod nazwą lagranżjanu Proca i piszemy

$$\mathcal{L}_{m,\lambda=1} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu.$$

W przypadku, gdy spełnione jest jednocześnie $\lambda = 1$ oraz $m = 0$ mamy przypadek lagranżjanu dla elektrodynamiki bez źródeł,

$$\mathcal{L}_{m=0,\lambda=1} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}.$$

Równania Eulera-Lagrange'a dla ogólnego lagranżjanu $\mathcal{L}_{m,\lambda}$ przyjmują postać

$$[(\square - m^2)\delta^\mu_\nu - \lambda\partial^\mu\partial_\nu]A^\nu = 0. \quad (3.20)$$

Z równania (3.20) poprzez różniczkowanie obu stron, wynika w prosty sposób, że

$$[(\square - m^2) - \lambda\square]\partial_\nu A^\nu = 0,$$

co po uporządkowaniu daje

$$[(1 - \lambda)\square - m^2]\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (3.21)$$

W przypadku gdy $\lambda = 1$, a $m > 0$ równanie (3.21) przyjmuje postać tzw. warunku Lorentza. Mamy

$$\partial_\nu A^\nu = 0.$$

Oznacza to że lagranżjan $\mathcal{L}_{\lambda=1, m>0}$ narzuca warunek $\partial_\nu A^\nu = 0$ na pola wektorowe w tej teorii. Interesujący jest przypadek, gdy $m > 0$ oraz $\lambda \in [0, 1[$, wtedy możemy napisać dla $\partial_\mu A^\mu$ równanie

$$\left(\square - \frac{m^2}{1-\lambda}\right)\partial_\nu A^\nu = 0.$$

Sugeruje to, że skalarne pole $\partial_\mu A^\mu$ spełnia równanie Kleina-Gordona ze zmodyfikowaną masą m_λ . Mamy

$$m_\lambda = \frac{m}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

Umożliwia to stwierdzenie, iż masa komponenty skalarnej masywnego pola wektorowego dąży do nieskończoności, gdy parametr λ dąży do jedności. Niejako wymusza to na polu A^μ warunek Lorentza, co również wynikało z równań ruchu dla lagranżjanu Proca. W rozważaniach pola wektorowego z masą w niniejszej pracy najbardziej interesujący będzie przypadek $\lambda = 0$, gdyż, jak później pokażemy, warunek Lorentza można w sposób kowariantny narzucić w dowolnym momencie kwantyzacji (poprzez wprowadzenie pewnych operatorów rzutowych), np. podczas konstrukcji stanów kwantowych na algebrze obserwabli.

Nieco inny jest przypadek masy zerowej, w przypadku, gdy parametr $\lambda \in [0, 1[$. W tym przypadku mamy po prostu

$$\square \partial_\mu A^\mu = 0.$$

Oznacza to, że podłużna składowa pola wektorowego jest bezmasowym polem skalarnym Kleina-Gordona. W przypadku teorii elektrodynamiki dla $\mathcal{L}_{\lambda=1, m=0}$ równanie (3.21) staje się trywialne i nie daje żadnej dodatkowej informacji na temat występujących pól w teorii. Równania ruchu w tym przypadku przyjmują postać

$$\square A^\mu = 0.$$

Zatrzymajmy się jeszcze chwilę by przedyskutować jak wyrażają się pędy kanoniczne dla ogólnego lagranżjanu $\mathcal{L}_{m,\lambda}$. Elementarny rachunek daje, że

$$\Pi^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}_{m,\lambda}}{\delta(\partial_0 A_\mu)} = -\partial^0 A^\mu + \lambda \partial^\mu A^0 = \partial_0 A^\mu + \lambda \eta^{\mu\nu} \partial_\nu A^0.$$

W przypadku gdy $\lambda = 0$ powyższe wyrażenie trywializuje się do

$$\Pi^\mu = \partial_0 A^\mu.$$

Ciekawe jest jednak zachowanie tego pola, gdy parametr λ położymy równy jeden. Wtedy dostajemy dwa różne wyrażenia,

$$\Pi^0 = 0,$$

oraz

$$\Pi^i = \partial_0 A^i + \partial_i A^0.$$

Prowadzi to do rozważania układu z więzami. W tej pracy zajmiemy się głównie sytuacją, gdy $\lambda = 0$ i $m > 0$. Przypadek $\lambda = 0$ jest niejako szerszy i pozostawia więcej swobody. Prawdą jest również, że dla $\lambda = 0$ pola A^μ nie są polami cechowania jak ma to miejsce w przypadku $\lambda = 1$. Fakt bycia polami cechowania powoduje, iż początkowo układ nie jest dynamiczny, właśnie ze względu na swobodę

$$A^\mu \rightsquigarrow A^\mu + \partial^\mu f.$$

Aby przeprowadzić kwantyzację, należy najpierw przejść do klas równoważności względem tego działania. Dopiero wtedy otrzymana przestrzeń ilorazowa, potraktowana jako układ dynamiczny (bez swobody cechowania) podlegać może kwantyzacji. Z powodu ograniczeń szersze omówienie tego tematu nie znajdzie się w niniejszej pracy.

Przytoczymy jeszcze hamiltonian klasyczny dla przypadku z $\lambda = 0$. Jest to po prostu hamiltonian czterech pól skalarnych z odpowiednio dobranymi znakami (zgodnie z wybraną postacią metryki). Mamy

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} \left(\Pi^\mu(\vec{x}) \Pi_\mu(\vec{x}) + A^\mu(\vec{x}) (-\Delta + m^2) A_\mu(\vec{x}) \right)$$

Dodatnia określoność tego wyrażenia, postrzeganego jako hamiltonian kwantowy, będzie jednym z tematów dyskusji w niniejszych rozdziałach.

Zastosowany w tej pracy formalizm traktował będzie używane w fizyce pola A^μ , czy Π^μ jako dystrybucje, a po kwantyzacji - jako „dystrybucje o wartościach operatorowych”.

Opisanie różnych wyborów cechowania, przeanalizowanie granicy zerowej masy i kowariantna definicja stanu Focka w kwantowej elektrodynamice są z pewnością bardzo ciekawymi tematami badawczymi, niestety nie wszystkie z nich znajdą swoje miejsce w tej pracy. W kolejnym podrozdziale na chwilę zatrzymamy się przy polu masywnym, by dokładniej omówić własności kwantowej algebry Weyla dla pola wektorowego z masą. Jest to zapewne punkt wyjścia do przeprowadzenia granicy bezmasowej, co jak wcześniej wspomnieliśmy może być ciekawym tematem do analizy.

3.2 Klasyczne pole wektorowe z $m > 0$ przy $\lambda = 0$.

Przestrzeń rozwiązań $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ oraz działanie grupy $\mathcal{SO}_0(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$.

Podobnie jak w przypadku pola skalarnego będziemy rozważali przestrzeń rozwiązań równania Kleina-Gordona z zastrzeżeniem, by parametr m był dodatni. Przestrzeń rozwiązań dla pola wektorowego oznaczamy $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$. Nietrudno spostrzec, że

$$\mathcal{V}_m(\mathcal{M}) = \mathbb{C}^4 \otimes \mathcal{Y}_m(\mathcal{M}).$$

Podobnie przestrzeń rzeczywistych pól wektorowych, można zdefiniować jako

$$\mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) = \mathbb{R}^4 \otimes \mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}).$$

Będziemy mówili, że f^μ jest rozwiązaniem i należy do $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ wtedy, i tylko wtedy, gdy

$$(\square - m^2)f^\mu = 0.$$

Istotną różnicą między $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ a $\mathcal{Y}_m(\mathcal{M})$ jest działanie grupy $\mathcal{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ przez swoją reprezentację definiującą. Odróżnia ono pole wektorowe od kolekcji czterech pól skalarnych. Jego rola w kwantyzacji pola masywnego ujawni się jednak dopiero podczas konstruowania stanów fizycznych (niezmienniczych względem działania) na algebrze $\mathcal{CCR}(\mathcal{V})$. Wcześniejsze „etapy” kwantyzacji będą analogiczne do przypadku pola skalarnego – uwzględnić należy jedynie tensorową strukturę kwantowanej przestrzeni rozwiązań klasycznych.

Grupa $\mathcal{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ działa przez reprezentację definiującą w przestrzeni \mathcal{M} . Dla przypomnienia, działanie to wyraża się wzorem

$$(\Lambda, a)x = \Lambda x + a, \quad (3.22)$$

gdzie

$$(\Lambda, a) \in \mathcal{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4.$$

Jak poprzednio z powodu wybranej orientacji, ograniczać będziemy się do właściwej i ortochronicznej grupy Lorentza $\mathcal{SO}_0(1, 3)$. Na $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ grupa $\mathcal{O}(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ działa przez reprezentację definiującą tak, że

$$(\mathcal{R}_{(\Lambda, a)}^\mu{}_\nu f^\nu)(x) = \Lambda^\mu{}_\nu f^\nu(\Lambda^{-1}(x - a)).$$

Równanie Kleina-Gordona jest niezmiennicze względem powyższego działania, co oznacza, że dla dowolnych $f^\mu \in \mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ oraz $(\Lambda, a) \in \mathfrak{G}$ zachodzi

$$\mathcal{R}_{(\Lambda, a)}^\mu{}_\nu f^\nu \in \mathcal{V}_m(\mathcal{M}).$$

Jak później opiszemy, działanie tej reprezentacji dla pola wektorowego bezmasowego jest kluczowym punktem istotnie różniącym go od przypadku masywnego.

W przypadku gdy $m > 0$ mamy dość prostą sytuację – reprezentacja definiująca grupy $\mathcal{SO}_0(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ rozkłada się na dwie składowe nieprzywiedlne, z których jedna — skalarna — ma jeden stopień swobody, druga — wektorowa — trzy stopnie swobody. Wobec tego przestrzeń $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ przedstawia się jako suma prosta przestrzeni niezmienniczych dla obu składowych nieprzywiedlnych. Mamy

$$\mathcal{V}_m(\mathcal{M}) = \mathcal{V}_m(\mathcal{M})_S \oplus \mathcal{V}_m(\mathcal{M})_V.$$

Rozkład ten oraz analiza obu składowych w powyższym rozkładzie dadzą interesujące wyniki dotyczące procedury kwantyzacji.

3.3 Przestrzeń dualna do przestrzeni rozwiązań. Formalizm kanoniczny oraz przestrzeń warunków początkowych.

Niezbędne jest wprowadzenie ścisłej notacji, jednocześnie zgodnej z konwencjami przyjętymi w fizyce teoretycznej. W definicji przestrzeni rozwiązań dla pola wektorowego odwołujemy się do przypadku pola skalarnego. W rozdziale (2.3) przestrzeń rozwiązań dla pola skalarnego została zdefiniowana jako przestrzeń liniowa z topologią. Ponadto podane w (2.4) bijektywne utożsamienie przestrzeni rozwiązań z przestrzenią warunków początkowych jest użyte do skonstruowania takiego utożsamienia dla teorii wektorowej. Łatwość stosowania wprowadzonych dla teorii skalarnej obiektów bierze się z wygodnego wyboru równań ruchu, ie. wyboru $\lambda = 0$ w lagranżjanie. Dzięki temu przestrzeń rozwiązań dla pola wektorowego oraz wszelkie obiekty w niej skonstruowane będą miały tensorową strukturę.

Poniższy diagram przedstawia typowe oznaczenia dla elementów, przestrzenie do których one należą oraz powiązania między nimi.

$$\begin{array}{ccc}
f^\mu \in \mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{R}^4 \otimes \mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathcal{Y}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})' \otimes \mathbb{R}^4 \simeq \mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})' \ni \Upsilon^\mu \\
\downarrow 1_{\mathbb{R}^4} \otimes \iota & & \downarrow \widetilde{1_{\mathbb{R}^4} \otimes \iota} \\
(u^\mu, v^\mu) \in \mathbb{R}^4 \otimes (C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}^3)) & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \otimes D(\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3) \ni (A^\mu(\vec{x}), \Pi^\mu(\vec{x}))
\end{array}$$

Powyższy graf jest analogiczny do diagramu podanego w (2.7) dla pola skalarnego. Podobne jest również znaczenie zamieszczonych w nim obiektów. Warto przypomnieć, iż to właśnie dystrybucje stają się po kwantyzacji operatorami pola, zaś funkcje rozsmarowujące (rozwiązania) pozostają wielkościami przemienymi. Będziemy pisać, w sensie notacji, że

$$A^\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^3} A^\mu(\vec{x}) u_\mu(\vec{x}),$$

oraz

$$\Pi^\mu(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \Pi^\mu(\vec{x}) v_\mu(\vec{x}).$$

Tyczy się to przestrzeni warunków początkowych, w przypadku elementów przestrzeni $\mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ będziemy pisać, w układzie współrzędnych (t, \vec{x}) dla chwili czasu t_0 , że

$$\Upsilon_{t_0}^\mu(f) = \int_{\Sigma_{t_0}} A_{t_0}^\mu(\vec{x}) f_\mu(t_0, \vec{x}) + \Pi_{t_0}^\mu(\vec{x}) \partial_t f_\mu(t_0, \vec{x}).$$

Jak uzasadniono w pierwszym rozdziale, dotyczącym pola skalarnego, cała procedura identyfikacji z warunkiem początkowym jest odpowiednio niezmiennicza lorentzowsko.

Jak poprzednio wspomniano, po utworzeniu algebry $\mathcal{CCR}(\mathcal{V})$ (rozsmarowane) operatory pola spełniają reguły komutacyjne zadane relacją

$$[A^\mu(u), \Pi^\nu(v)] = (u, 0)\omega(0, v) = \int_{\mathbb{R}^3} u^\alpha v_\alpha. \quad (3.23)$$

Uzasadnimy, iż standardowa forma reguł komutacyjnych, tzn. relacja

$$[A^\mu(x), \Pi^\nu(x')] = \eta^{\mu\nu} \delta(x - x'), \quad (3.24)$$

jest w zgodzie z podaną wyżej wersją rozsmarowaną. Z definicji (notacji) pól rozsmarowanych, mamy, że

$$[A^\mu(u), \Pi^\nu(v)] = \int \int d\vec{x} d\vec{x}' (A^\mu(\vec{x}) \Pi^\nu(\vec{x}') - \Pi^\nu(\vec{x}') A^\mu(\vec{x})) u_\mu(\vec{x}) v_\nu(\vec{x}'),$$

co po zastosowaniu reguł komutacyjnych w formie dystrybucyjnej daje dokładnie wyrażenie (3.23). W dalszej części oba związki komutacyjne będą traktowane w jednakowy sposób i używane wymiennie.

Warto spostrzec, iż reguły komutacyjne w postaci (3.24) prowadzą przy niektórych konstrukcjach, np. Gupta-Bleuler, do indefinitnych metryk w przestrzeni stanów i tym podobnych problemów. Prezentowany w tej pracy jest pogląd odmienny - poprawny wybór struktury kwantowanej przestrzeni i dobry dobór (ściśle dodatnio określonego) stanu, umożliwi kwantyzację pełnego pola wektorowego (spin 1 + spin 0) z dodatnio określoną metryką, i co za tym idzie, poprawnie zdefiniowaną przestrzenią stanów.

3.4 Komponenta skalarna i wektorowa w teorii masywnej

W niniejszej sekcji opiszemy w pełny sposób rzuty na wspomniane pod koniec poprzedniego rozdziału podprzestrzenie składowych skalarnej i wektorowej. Rozkład

$$\mathcal{V}_m(\mathcal{M}) = \mathcal{V}_m(\mathcal{M})_S \oplus \mathcal{V}_m(\mathcal{M})_V$$

jest kluczowy przy zrozumieniu struktury przestrzeni rozwiązań. W przypadku masywnym, jak wspomnieliśmy w rozdziale (3.1) dążenie parametru λ do jedności, powoduje „włączenie” warunku Lorentza $\partial_\mu f^\mu = 0$ dla rozwiązań poprzez wzrost masy komponenty transwersalnej do nieskończoności. Lagranżjan dla $\lambda = 1$ oraz $m > 0$ ma formę lagranżjanu Proca.

Teoria klasyczna rozumie pole wektorowe jako funkcję $f^\mu \in \mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ spełniającą warunek $\partial_\mu f^\mu = 0$. Warunek ten jest wyrażeniem liniowym, w związku z czym wyznacza w $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ podprzestrzeń wektorową (domkniętą). W przypadku masywnym łatwo jest skonstruować jawnie niezmiennicze lorentzowsko rzuty na podprzestrzeń pól wektorowych.

Definicja 3.1 *Określmy*

$$P_S = \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{m^2}$$

oraz

$$P_V = 1 - P_S = \delta^\mu_\nu - \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{m^2}.$$

Uwaga 3.2 *Podobnie jak w definicji rzutów, pomijając będziemy indeksy lorentzowskie, chyba że powodowałoby to błędy w notacji.*

Stwierdzenie 3.3 *Prawdą jest, że*

- (1) *Operatory P_S oraz P_V są rzutami,*
- (2) *P_S i P_V są jawnie współzmiennicze względem działania grupy $SO_0(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$.*

Dowód.

Jasne jest, że m jest liczbą, a ∂_μ transformuje się jak wektor. Należy jeszcze sprawdzić, że zdefiniowane powyżej operatory są idempotentami.

Mamy

$$(P_S)^2 = \frac{\partial^\mu \partial_\alpha \partial^\alpha \partial_\nu}{m^4} = \frac{\partial^\mu \square \partial_\nu}{m^4} = \frac{\partial^\mu \partial_\nu \square}{m^2 m^2} = \frac{\square}{m^2} \cdot P_S,$$

jednak na przestrzeni rozwiązań $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ mamy $\square = m^2$, zatem

$$(P_S)^2 = P_S.$$

z ogólnej algebry mamy, że jeśli P_S jest idempotentem to $1 - P_S = P_V$ też jest idempotentem. \square

Uwaga 3.4 *Często bardziej poglądowy dla fizyka jest obraz po transformacji Fouriera, wtedy zdefiniowane powyżej operatory rzutowe przyjmą postać*

$$\hat{P}_S = -\frac{k^\mu k_\nu}{m^2}$$

oraz

$$\hat{P}_V = 1 - P_S = \delta^\mu{}_\nu + \frac{k^\mu k_\nu}{m^2}.$$

„Daszki” nad operatorami będziemy często pomijać, gdy nie będzie budzić to wątpliwości. Transformata Fouriera zajmujemy się szczegółowo dopiero w dalszej części pracy oraz wtedy, gdy będzie ona ułatwieniem przy opisie omawianych zagadnień.

W dalszej części okaże się, że rzuty te są ortogonalne w pewnym skonstruowanym dalej iloczynie skalarnym oraz „dzielą” przestrzeń rozwiązań wraz z całą jej strukturą na dwie przestrzenie symplektyczne. Rzuty te odegrają kluczową rolę w konstruowaniu dodatnich stanów na algebrze $\mathcal{CCR}(\mathcal{V})$.

3.5 Struktura symplektyczna przestrzeni $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$. Struktura Kählera.

Tak samo jak w przypadku pola skalarnego (2.2), w przestrzeni Minkowskiego wyróżniamy formę objętości Ξ oraz wprowadzamy operator \star działający na formy różniczkowe.

W przypadku pola wektorowego formę symplektyczną definiujemy bardzo podobnie jak poprzednio, bowiem

Definicja 3.5 *Dwuliniowe odwzorowanie*

$$\omega : \mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) \times \mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

takie, że dla $f^\mu, g^\mu \in \mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$

$$g\omega f = \int_{\Sigma_t} (g^\mu \wedge \star df_\mu - f^\mu \wedge \star dg_\mu) =: \int_{\Sigma_t} \omega_{g,f},$$

nazywamy formą symplektyczną na przestrzeni pól wektorowych. Σ_t jest dowolną powierzchnią stałego czasu w dowolnym układzie współrzędnych.

Zachodzi poniższe łatwe stwierdzenie, podobne do (2.10) dla pola skalarnego:

Stwierdzenie 3.6 *Prawdą jest, że*

- (1) *Wartość formy ω nie zależy od wyboru powierzchni stałego czasu Σ_t ,*
- (2) *Forma ω jest niezmiennicza pod działaniem grupy $\mathcal{SO}_0(1,3) \ltimes \mathbb{R}^4$.*

Dowód powyższego jest nieznacznym zmienionym dowodem stwierdzenia (2.10), więc zostanie pominięty.

W identyczny sposób wprowadzamy w $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ strukturę zespoloną j oraz symetryczną formę α (rzeczywisty iloczyn skalarny). Wyrażenia są identyczne jak w przypadku pola skalarnego z uwzględnieniem tensorowej struktury przestrzeni $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$, np.

$$j_{vec} = j_{sc} \otimes 1_{\mathbb{C}^4}.$$

Kompleksyfikacja przebiega w identyczny sposób, a interpretacja fizyczna podziału na przestrzenie \mathcal{Z} oraz $\bar{\mathcal{Z}}$ nie ulega zmianie.

Jak wspomnieliśmy w poprzednim rozdziale, wprowadzone operatory P_S oraz P_V rozkładają przestrzeń $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ na sumę prostą dwóch przestrzeni symplektycznych. Aby uściślić ten fakt należy zauważyć, iż zachodzi

$$(P_V)^\# \omega P_S = 0$$

oraz

$$(P_S)^\# \omega P_V = 0.$$

Tożsamości te sprawdza się w łatwy sposób bezpośrednim rachunkiem. Połóżmy

$$\omega_S := (P_S)^\# \omega P_S$$

oraz

$$\omega_V := (P_V)^\# \omega P_V,$$

wtedy

$$\omega = \omega_S \oplus \omega_V,$$

ponadto możemy napisać, że

$$(\mathcal{V}_m(\mathcal{M}), \omega) = (\mathcal{V}_m(\mathcal{M})_S, \omega_S) \oplus (\mathcal{V}_m(\mathcal{M})_V, \omega_V).$$

Powyższa tożsamość mówi, że forma symplektyczna ω jest blokowo diagonalna względem wprowadzonych rzutów. Inaczej – w formalizmie kanonicznym – można powiedzieć, że położenie należy do wybranej podprzestrzeni, wtedy i tylko wtedy, gdy sprzężony pęd kanoniczny również do niej należy.

Jednak naiwne powtórzenie procedury dokonanej dla pola skalarnego, doprowadzi do wyposażenia przestrzeni warunków początkowych dla pola wektorowego w formę $\eta_{\mu\nu} \otimes (\alpha_{sc} + i\omega_{sc})$, która nie jest dodatnio określona, w związku z czym nie da poprawnego iloczynu skalarnego, ani nie może być podstawą konstruowania poprawnie określonych stanów.

Rozwiązaniem tej sytuacji jest dokonanie „zmiany znaku” przy składowej transwersalnej pola wektorowego, ale w sposób kowariantny. Możliwe jest to bez dokonywania modyfikacji reguł komutacyjnych, jedynie poprzez zmianę struktury zespolonej. Zmiana ta nie może jednak zmieniać własności $j_{vec}^2 = -1$. Przypomnijmy prosty fakt z algebry.

Stwierdzenie 3.7 *Jeśli $P \neq 0, 1$ jest idempotentem, $a, b \in \mathbb{R}_+$, to $a - bP$ jest involucją, wtedy i tylko wtedy, gdy $a=1$ i $b=0$ lub gdy $a=1$ i $b=-2$.*

Dowód.

Oczywiście $(a + bP)^2 = a^2 + (-2ab + b^2)P$. Musi być $a^2 = 1$ oraz $(-2ab + b^2 = 0)$, co od razu implikuje tezę stwierdzenia. \square

Istnieje zatem tylko jeden sposób zmodyfikowania struktury zespolonej w $\mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$. W naszej teorii dostępne są tylko dwa kanonicznie określone rzuty - rzut na komponentę skalarną i rzut na komponentę wektorową. Wybór nie jest istotny, gdyż w tym przypadku otrzymamy izomorficzne struktury - „zmiana znaku”, może mieć miejsce zarówno przy komponentie wektorowej, jak i przy skalarnej, i nie gra to istotnej roli.

Stwierdzenie 3.8 *Położmy*

$$j = (\delta^\mu{}_\nu - 2 \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{m^2}) \otimes j_{sc} = (1_{\mathbb{R}^4} - 2P_{sc}) \otimes j_{sc}.$$

Prawdą jest, że:

- (1) j jest poprawną strukturą zespoloną w $\mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$,
 (2) $(\mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M}), \omega, j, \alpha)$ tworzy przestrzeń Kählera z dodatnio określonym iloczynem skalarnym gdzie $\alpha = -\omega j$ jest dodatnio określoną formą symetryczną.

Dowód.

By j było poprawną strukturą zespoloną wystarczy, by było $j^2 = -1$. Zdefiniowana struktura zespolona j jest iloczynem tensorowym inwolucji i antyinwolucji, w związku z czym jest antyinwolucją. Do dowodu drugiego punktu posłuży następujący

Lemat 3.9 Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Forma

$$\gamma = a\eta_{\mu\nu} - b\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2}$$

jest ściśle dodatnio określona dla $0 < a < b$.

Dowód.

Do dowodu lematu wykorzystamy transformatę Fouriera. Wtedy,

$$\hat{\gamma} = a\eta_{\mu\nu} + b\frac{k_\mu k_\nu}{m^2}.$$

Przypomnijmy, że

$$\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1),$$

w związku z czym teza wynika w oczywisty sposób po przejściu do układu spoczynkowego dla wybranego pędu. \square

Teraz w $\mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ mamy

$$\alpha = -\omega j = (\eta_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\nu - 2\frac{\partial^\mu\partial_\nu}{m^2})) \otimes (\omega_{sc}j_{sc}) = (\eta_{\mu\nu} - 2\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2}) \otimes \alpha_{sc}.$$

z powyższego lematu i z postaci struktury Kählera dla pola skalarnego wynika teza stwierdzenia. \square

Uwaga 3.10 Jak poprzednio wspomniano jest to jedyny wybór dodatnio określonej, niezmienniczej formy α , przy którym $j = \alpha^{-1}\omega$ jest antyinwolucją. Stąd wynika, że kompleksyfikacja $\mathbb{C}\mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ jest przestrzenią Hilberta, a jak dokładniej opiszemy, stan quasi-swobodny związany z α jest jedynym stanem Focka na $CCR(\mathcal{V})$.

Konkludując całość dotychczasowych rozważań, przestrzeń $\mathbb{C}\mathcal{V}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$ jest wyposażona w półtoraliniowy iloczyn skalarny dany wzorem, zapisany w uproszczonej notacji macierzowej jako

$$(f_1|f_2) = \int_{\Sigma_0} [\bar{f}_1^\mu(0, \vec{x}) \quad \partial_i \bar{f}_1^\mu(0, \vec{x})] \left((\eta_{\mu\nu} - 2\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2})\alpha_{sc} + i\eta_{\mu\nu}\omega_{sc} \right) \begin{bmatrix} f_2^\nu(0, \vec{x}) \\ \partial_i f_2^\nu(0, \vec{x}) \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

gdzie dla przypomnienia,

$$\alpha_{sc} = \begin{bmatrix} (-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix},$$

natomiast

$$\omega_{sc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 3.11 Powyższy wzór jest zapisany w wybranym układzie współrzędnych w chwili $t = 0$. Oczywiście można, korzystając ze wzorów podanych dla pola skalarnego, przeewoluować wyrażenie do dowolnej chwili czasu. Kwestia niezmienniczości względem dynamiki i grupy $SO_0(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$ jest przedyskutowana w pierwszym rozdziale poświęconym polu skalarnemu, tensorowa struktura czyni dyskusję w przypadku pola wektorowego niemal identyczną.

Uwaga 3.12 Można zapisać ten iloczyn skalarny dla przestrzeni warunków początkowych,

$$\mathbb{R}^4 \otimes (C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}^3)),$$

pamiętając, że operator ∂_t nie ma w niej sensu i należy go zastąpić odpowiednim wyrażeniem korzystając z równań ruchu, co prowadzi do mniej zwartej formuły na iloczyn skalarny, nie istotnej w tej pracy.

Uwaga 3.13 Czasem wygodnie się posługiwać formą powyższego iloczynu dla przestrzeni transformaty Fouriera. Zależnie od przyjętych konwencji, iloczyn skalarny dla transformat funkcji przyjmuje postać typu

$$(f_1|f_2) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} [\bar{f}_1^\mu(\vec{k}) \quad \partial_t \bar{f}_1^\mu(\vec{k})] \left((\eta_{\mu\nu} + 2 \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}) \alpha_{sc} + \eta_{\mu\nu} \omega_{sc} \right) \left[\begin{array}{c} f_2^\nu(\vec{k}) \\ \partial_t f_2^\nu(\vec{k}) \end{array} \right], \quad (3.26)$$

gdzie ω_{sc} oczywiście nie ulega zmianie, natomiast,

$$\alpha_{sc} = \left[\begin{array}{cc} (\vec{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (\vec{k}^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} E_k & 0 \\ 0 & E_k^{-1} \end{array} \right].$$

Przez $\partial_t f(\vec{k})$ rozumiemy transformatę Fouriera funkcji $\partial_t f(0, \vec{x})$, natomiast $E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

Prawdą jest również, że wprowadzone rzuty P_S i P_V są ortogonalne w zdefiniowanym wyżej iloczynie skalarnym. Wobec tego skompleksyfikowana przestrzeń Kählera³ $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$ rozkłada się na dwie ortogonalne podprzestrzenie. Każda z nich może ulec osobno kwantyzacji w sposób identyczny z opisaniem w części pierwszej dla pola skalarnego (po obcięciu przestrzeni z całą jej strukturą do podprzestrzeni). Dalej opiszemy nieco inne podejście. Można bowiem korzystając ze zdobytej wiedzy na temat niezmienniczych dodatnio określonych form na $\mathcal{V}_m(\mathcal{M})$, zdefiniować poprawne, niezmiennicze lorentzowsko stany na całej algebrze $\mathcal{CCR}(\mathcal{V})$. Kosztem takiego postępowania będzie jednak hamiltonian nie ograniczony z dołu. Podobnie jak dla pola skalarnego istniał będzie jedyny stan Focka, jednak nie jest to stan powstały przez „dopisanie” wskaźników lorentzowskich do wielkości zdefiniowanych dla pola skalarnego. W istocie jest to stan złożony ze stanów podstawowych osobno dla komponenty skalarnej i wektorowej, z nieco zmodyfikowaną strukturą zespoloną, zamieniającą miejscami pojęcie antycząstki i cząstki dla komponenty skalarnej.

³Tu przestrzeń Kählera może być również traktowana jako przestrzeń Hilberta.

3.6 Klasyczne pole wektorowe i jego transformata Fouriera. Formalizm Kanoniczny.

Podobnie jak w przypadku pola skalarnego pracujemy w wybranym układzie współrzędnych w chwili czasu zero. Na tym etapie wszelkie wypisywane formuły nie są jawnie kowariantne. Analiza tego problemu jest identyczna jak w przypadku pola skalarnego i była opisana w pierwszym rozdziale niniejszej pracy. Rozwiązanie równania Kleina-Gordona najłatwiej zapisać w postaci transformaty Fouriera, standardowo w fizyce teoretycznej wprowadza się

$$f^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} [e^{ikx} f^\mu(\vec{k}) + e^{-ikx} \bar{f}^\mu(\vec{k})],$$

dla $E_k > 0$. Aby zdefiniowana funkcja była rozwiązaniem równań ruchu dla $\mathcal{L}_{m,\lambda=0}$ potrzeba, by spełniony był warunek powłoki masy

$$k^2 = -m^2.$$

Stosujemy oznaczenie

$$E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}.$$

W powyższym wyrażeniu $f^\mu(\vec{k})$ to cztery zespolone funkcje, których części rzeczywiste i urojone są funkcjami znikającymi w przestrzennej nieskończoności, przestrzeń pędów po której przebiega całkowanie utożsamiamy z przestrzenią \mathbb{R}^3 . Suma w powyższym wyrażeniu wyznacza podział na część o dodatniej oraz na część o ujemnej energii, o czym decyduje znak przy E_k . Gdy w wybranym układzie współrzędnych położymy $t = 0$, przechodzimy do przestrzeni transformaty Fouriera warunków początkowych. Mamy (dla dystrybucji $A^\mu(\vec{x})$ oraz $\Pi^\mu(\vec{x})$)

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} (e^{ikx} A^\mu(\vec{k}) + e^{-ikx} \bar{A}^\mu(\vec{k})), \quad (3.27)$$

oraz

$$\Pi^\mu(x) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_k}{2}} (e^{ikx} A^\mu(\vec{k}) - e^{-ikx} \bar{A}^\mu(\vec{k})). \quad (3.28)$$

Podział ten jest odpowiedni z podziałem skompleksyfikowanej przestrzeni rozwiązań rzeczywistych na przestrzenie: holomorficzną Z oraz antyholomorficzną \bar{Z} , ale dla struktury zespolonej wybranej „nawnie”. Mamy (w uproszczonej notacji macierzowej)

$$j_0 = 1_{\mathbb{R}^4} \otimes \begin{bmatrix} 0 & (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \\ -(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Wtedy rzuty

$$P_Z = \frac{1 - ij_0}{2}$$

oraz

$$P_{\bar{Z}} = \frac{1 + ij_0}{2}$$

w naturalny sposób wybierają część o odpowiednio dodatniej lub ujemnej energii. Prosty rachunek, dość łatwy do przeprowadzenia w postaci odwrotnej transformaty Fouriera daje dla części

holomorficznej, że

$$P_{\mathcal{Z}} \begin{bmatrix} A^\mu(x) \\ \Pi^\mu(x) \end{bmatrix} = \left(\frac{1 - ij_0}{2} \right) \begin{bmatrix} A^\mu(x) \\ \Pi^\mu(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} (e^{ikx} A^\mu(\vec{k})) \\ i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_k}{2}} (e^{ikx} A^\mu(\vec{k})) \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

i analogicznie dla części antyholomorficznej

$$P_{\overline{\mathcal{Z}}} \begin{bmatrix} A^\mu(x) \\ \Pi^\mu(x) \end{bmatrix} = \left(\frac{1 + ij_0}{2} \right) \begin{bmatrix} A^\mu(x) \\ \Pi^\mu(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} (e^{-ikx} \overline{A}^\mu(\vec{k})) \\ -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_k}{2}} (e^{-ikx} \overline{A}^\mu(\vec{k})) \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Jest to standardowo w fizyce stosowana procedura opisana tu nieco dokładniej z naciskiem na struktury zespolone występujące w omawianym problemie. Poprzednio jednak wykazaliśmy, że „naiwny” wybór struktury zespolonej prowadzi do niepoprawnie określonego iloczynu skalarnego, w związku z czym dokonaliśmy modyfikacji struktury zespolonej, tak by

$$j_0 = (1_{\mathbb{R}^4} - 2P_S) \otimes \begin{bmatrix} 0 & (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \\ -(-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$P_S = \frac{\partial^\mu \partial_\nu}{m^2}.$$

Należy zatem zmodyfikować transformaty Fouriera pól $A^\mu(x)$ oraz $\Pi^\mu(x)$, tak, by były w zgodzie ze zmodyfikowaną strukturą zespoloną, prowadzi to do wyrażeń

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \left([e^{ikx} (1 - \hat{P}_S)^\mu{}_\nu + e^{-ikx} (\hat{P}_S)^\mu{}_\nu] A^\nu(\vec{k}) + [e^{-ikx} (1 - \hat{P}_S)^\mu{}_\nu + e^{ikx} (\hat{P}_S)^\mu{}_\nu] \overline{A}^\nu(\vec{k}) \right)$$

oraz

$$\Pi^\mu(x) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{E_k}{2}} \left([e^{ikx} (1 - \hat{P}_S)^\mu{}_\nu - e^{-ikx} (\hat{P}_S)^\mu{}_\nu] A^\nu(\vec{k}) - [e^{-ikx} (1 - \hat{P}_S)^\mu{}_\nu - e^{ikx} (\hat{P}_S)^\mu{}_\nu] \overline{A}^\nu(\vec{k}) \right),$$

gdzie dodatkowe wyrazy pochodzą z rozkładu rzutowego względem

$$\hat{P}_S = -\frac{k^\mu k_\nu}{m^2}.$$

Zauważmy, że modyfikacja której dokonano, to zamiana miejscami cząstki i antycząstki dla składowej transwersalnej, nie zmieniając przy tym składowej czysto wektorowej. Nieco wyprzedzając fakty, zauważmy, że rezultatem tego rozumowania będą poprawnie określone reguły komutacji dla operatorów kreacji i anihilacji w reprezentacji pędowej. Kanoniczne reguły komutacji dla $A^\mu(x)$ oraz $\Pi^\mu(x)$ przybierają postać (w chwili $t = 0$)

$$[A^\mu(0, \vec{x}), \Pi^\nu(0, \vec{x}')] = i\eta^{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (3.32)$$

i będą one niebawem zdefiniowane formalnie dla generatorów grup unitarnych dla reprezentacji algebry $\mathcal{CCR}(\mathcal{V})$, co pozwoli nadać matematyczny sens tożsamości (3.32). Nie mniej jednak, można odwrócić transformaty Fouriera i korzystając z kanonicznych reguł komutacyjnych w postaci (3.32) dostać reguły komutacyjne w reprezentacji pędowej. Mamy wtedy

$$[A_\mu(\vec{k}), A_\nu^*(\vec{k}')] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') (\eta_{\mu\nu} + 2 \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}), \quad (3.33)$$

a pozostałe komutatory znikają. Rachunek ten jest dość długi, ale elementarny, w związku z czym został pominięty. Bardzo korzystnym rezultatem jest, że reguły komutacji w postaci (3.33) zadane są przez formę dodatnio określoną, w związku z tym przestrzeń stanów jest określona poprawnie i posiada dobry iloczyn skalarny, jak niebawem się okaże, dla jedynego stanu Focka, jest to ten iloczyn skalarny, który skonstruowaliśmy już wcześniej w przestrzeni rozwiązań $\mathcal{CV}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$. Należy tu nadmienić, iż przedstawiony w rozdziale (3.1) hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{x} \left(\Pi^\mu(\vec{x}) \Pi_\mu(\vec{x}) + A^\mu(\vec{x}) (-\Delta + m^2) A_\mu(\vec{x}) \right),$$

po kwantyzacji przybierze postać

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} E_k A_\mu^*(\vec{k}) A^\mu(\vec{k}).$$

Uzasadnimy, że powyższy kwantowy hamiltonian nie ma spektrum ograniczonego od dołu ani od góry. Łatwo widać, iż jest on różnicą hamiltonianu dla trzech oscylatorów i hamiltonianu dla jednego oscylatora harmonicznego. Spostrzeżenie to implikuje, że omawiany hamiltonian nie jest ograniczony od dołu, a ponadto ma wiele stanów o zerowej energii. Stanem podstawowym dla reprezentacji Focka będzie stan, który jest podstawowy jednocześnie dla hamiltonianu komponenty skalarnej i hamiltonianu komponenty wektorowej. Dodatkowo w teorii oddziałującej, do źródeł sprzęgać się będzie jedynie część wektorowa tego hamiltonianu, i energia „nie będzie mogła uciekać” do komponenty skalarnej. Wydaje się to być pożądaną sytuacją fizyczną, ponadto taka prezentacja pola masywnego może umożliwić poprawne przeprowadzenie granicy zerowej masy. Przypadki te nie będą opisane w niniejszej pracy, ale z pewnością mogą stanowić kolejny temat do analizy.

3.7 Kwantyzacja pola wektorowego dla $m > 0$ oraz $\lambda = 0$

W rozdziale (3.4) skonstruowano dodatni iloczyn skalarny w przestrzeni rozwiązań $\mathcal{CV}_m^{\mathbb{R}}(\mathcal{M})$, zadany formą półtora liniową

$$(\eta_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2}) \alpha_{sc} + i \eta_{\mu\nu} \omega,$$

jak we wzorze (3.25). Konstruujemy algebrę $\mathcal{CCR}(\mathcal{V})$ złożoną z symboli $W(f^\mu)$, w sposób opisany w części poświęconej polu skalarnemu. Na tak określonej C^* -algebrze zadajemy, w wybranym układzie współrzędnych stan quasi-swobodny wzorem

$$\omega_{a,b}(W(f^\mu)) = \exp \left(- \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{t_0}} d\vec{x} [f^\mu(x) \quad \partial_t f^\mu(x)] \left((a \eta_{\mu\nu} - b \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{m^2}) \alpha_{sc} \right) \left[\begin{array}{c} f^\nu(x) \\ \partial_t f^\nu(x) \end{array} \right] \Big|_{t=t_0} \right),$$

dla

$$\alpha_{sc} = \begin{bmatrix} (-\Delta + m^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (-\Delta + m^2)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

Stan ten jest poprawnie zdefiniowany, jeśli forma, która go zadaje jest ściśle dodatnio określona. Jest to równoważne z warunkiem, by parametry a, b spełniały nierówność $0 < a < b$. Ponadto, dla $a = 1$ i $b = 2$ mamy stan Focka i jest on jedyny co potwierdzają rozważania analogiczne jak w przypadku skalarnym. Dla pola wektorowego z masą mamy zatem dwuparametrową rodzinę stanów quasi-swobodnych niezmienniczych ze względu na dynamikę oraz działanie grupy $\mathcal{SO}_0(1, 3) \ltimes \mathbb{R}^4$. Dowód tego faktu korzysta z przypadku skalarnego oraz wiedzy na temat lorentzowsko niezmienniczych dwuform w przestrzeni Minkowskiego. Z uwagi na spore podobieństwo do przypadku skalarnego zostanie on pominięty.

Rodzina takich stanów dla zmiennej, dążącej do zera masy, może być podstawą do przeprowadzenia granicy bezmasowej, interpretowanej jako granicy (próżniowych) wartości oczekiwanych operatorów Weyla.

4 Podsumowanie

Przedstawioną tu ideę wprowadzenia struktury Hilberta w przestrzeni rozwiązań klasycznych, by następnie korzystając z niej zdefiniować poprawnie określone stany na algebrze kanonicznych reguł komutacyjnych $\mathcal{CCR}(\mathcal{V})$, można stosować również w szerszym aspekcie. Znaczna część rozumowania jest poprawna w przypadku zakrzywionej (globalnie hiperbolicznej) czasoprzestrzeni. Ponadto opisywane podejście pozwala na przeprowadzenie granicy bezmasowej, jako granicy wartości oczekiwanych operatorów Weyla. Z uwagi na szeroki charakter zagadnienia te nie zostały umieszczone w niniejszej pracy, ale z pewnością są kolejnym ciekawym tematem do badania i „polem” do stosowania opisanego tu formalizmu.

Literatura

- [1] Bratelli, O., Robinson, D.: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1, Springer-Verlag 1987
- [2] Bratelli, O., Robinson, D.: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2, Springer-Verlag 1996
- [3] Dereziński, J.: Introduction to Representations of Canonical Commutation and Anticommutation Relations, Notatki
- [4] Dereziński, J., Siedentop, H.: Large Coulomb Systems, Springer-Verlag 2006
- [5] Dereziński, J.: C^* -algebras, Notatki do wykładu, 2006
- [6] Dereziński, J., Gérard, C.: Mathematics of Quantization and Quantum Fields, w przygotowaniu, 2008