Zadania powtórzeniowe.

16 kwietnia 2012

1. Korzystając z symulacji narysować wykres dystrybuanty rozkładu zadanego następującą gęstością prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } -1 \leqslant x < 0 \\ 1-x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla } |x| > 1 \end{cases}$$

2. * Korzystajac z symulacji (lub licząc na kartce) wyznaczyć pierwsze dwa momenty zwyczajne i centralne zmiennych losowych zadanych:

   - rozkładem (rozkład geometryczny):

   $$P(k;p) = (1-p)^{k-1}\, p$$

   Tutaj $k \geqslant 0$ jest zmienną, a $0 \geqslant p \geqslant 1$ parametrem[1]

   - funkcją gęstości (rozkład Cauchy'ego):

   $$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$$

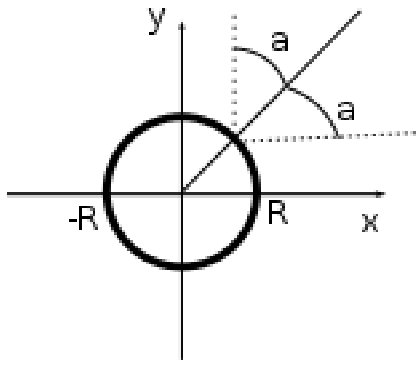
   Wskazówka:

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1} \Rightarrow \qquad \frac{df}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow \qquad \frac{df}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

   UWAGA: Jedna z tych dystrybucji nie ma momentów - zakładamy istnienie momentu w przypadku bezwzględnej całkowalności/sumowalności.

3. Przez odcinek trasy patrolowany przez posterunkowego Kowalskiego przejeżdża średnio, w ciągu czasu służby policjanta, 2000 samochodów. Prawdopodobieństwo tego, że samochód, w sposób widoczny dla posterunkowego, przekroczy prędkość i zostanie zatrzymany przez policjanta wynosi 0.005.
   Pewnego dnia, na początku służby posterunkowy zobaczył, że nie uzupełnił książeczki z mandatami i zostały mu tylko 3 blankiety. Jakie jest



Rysunek 1

prawdopodobieństwo tego, że Kowalskiemu nie wystarczy mandatów (zakładając, że każdy zatrzymany kierowca powinien jeden dostać)?

4. W pewnym mieście maturę pisze 10000 osób. Rozkład punktacji ma rozkład Gaussa ze średią $\mu = 50$ i dyspersją $\sigma = 10$. Ile studentów (średnio) nie zda, jeśli próg ustawimy na 40 punktów?

5. Z pewnego rozkładu Gaussa o średniej 5 wylosowano 12 liczb:
   0.21, 4.15, 7.21, 5.73,
   1.30, 8.93, 5.20, 5.53,
   7.70, 7.04, 3.89, 8.12
   Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że średnia z następnych, wylosowanych 12 liczb jest mniejsza od średniej z powyższych 12 liczb?

6. Student, przygotowując się do kolokwium ze swojego ulubionego przedmiotu, Wnioskowania Statystycznego, zrobił dobrze 30 z 45 zadań (każde za 1pkt). Czy student może być pewny (na 95%) zaliczenia kolokwium, o ile będzie ono wyglądać podobnie jak zadania przygotowawcze (tj. 45 zadań, każde za 1pkt; 50% zalicza)?

7. Właściciel sklepu papierniczego postanowił sprawdzić średnią długość taśmy klejącej – w tym celu zmierzył długość taśmy w 10 rolkach. Otrzymał następujące wartości:
   22.91 20.05 22.72 18.32 16.72
   18.57 21.38 16.76 20.27 17.79
   Właściciel sprawdził, że wartości te podlegają rozkładowi normalnemu. Znajdź 95% przedział ufności dla średniej długości taśmy. Zadanie rozwiąż przy pomocy bootstrapu oraz parametrycznie.

[1] Na rozkład geometryczny można spojrzeć w ten sposób: niech p oznacza prawdopodobieństwo wyrzucenia orła; wtedy $P(k; p)$ będzie prawdopodobieństwem tego, że wyrzucono orła dokładnie za k-tym razem.

8. Na odcinku $[0, 1]$ wylosowano dwa punkty x i y. Korzystając z symulacji wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że odległość $[0, x]$ jest mniejsza niż odległość między dwoma wylosowanymi punktami.

9. * Cząstki spadają równolegle do osi y na okrąg o promieniu R (umieszczony w środku układu - patrz rys. 1). Korzystając z symulacji narysować rozkład (histogram) kątów odbicia cząstek jeśli współrzędna x padającej cząstki losowana jest z rozkładu jednorodnego $\mathcal{U}\left(-R, R\right)$.

10. * Napisać program generujący wartości zmiennej losowej zdefiniowanej gęstością prawdopodobieństwa:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty < x < \infty$$