

Podstawy fizyki - Ćwiczenia 12

Piotr Nieżurawski, Piotr.Niezurawski@fuw.edu.pl, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

*Powinniśmy porzucić rozróżnienie pomiędzy myślą naukową a nienaukową.
Właściwe rozróżnienie polega na podziale na myśl logiczną i nielogiczną.*

Clive Staples Lewis (1898–1963)

1 Zadanie - Stany ortonormalne

Niech

$$\psi_+ \equiv \psi_+(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{+ikx}$$

$$\psi_- \equiv \psi_-(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-ikx}$$

gdzie $k = 2\pi/L$ oraz $L \neq 0$. Rozważ funkcję

$$\psi = a_+ \psi_+ + a_- \psi_-$$

opisującą cząstkę, która na pewno znajduje się w sześcianie o krawędzi L . Zagadnienie rozważ w układzie kartezjańskim, którego dodatnie półosie zawierają 3 krawędzie sześcianu. Wykaż bezpośrednim rachunkiem, że

a)

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int_{L \times L \times L} |\psi|^2 dV = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \bar{\psi} \psi dx dy dz$$

jest równe

$$|a_+|^2 + |a_-|^2$$

b) oraz że

$$\langle \psi_{\pm} | \psi \rangle = \int_{L \times L \times L} \bar{\psi}_{\pm} \psi dV = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \bar{\psi}_{\pm} \psi dx dy dz$$

jest równe

$$a_{\pm}$$

2 Zadanie - Cząstka uwięziona w sześciacie

Cząstka o masie m jest uwięziona w sześciacie o krawędzi L . Energia potencjalna cząstki wewnątrz sześciatu jest równa 0. Cząstka nie może znaleźć się poza sześciatem. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki powinna dążyć do 0 przy zbliżaniu się do dowolnej ze ścian. Zagadnienie rozważ w układzie kartezjańskim, którego dodatnie półosie zawierają 3 krawędzie sześciatu.

a) Znajdź unormowane funkcje falowe tej cząstki oraz możliwe wartości jej energii.

b) Wyraż uzyskane funkcje falowe przez funkcje własne operatorów poszczególnych składowych pędu:

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}.$$

c) Oblicz średnią wartość składowej X pędu cząstki

$$\langle p_x \rangle = \int_0^L \bar{\psi}_n \hat{p}_x \psi_n dx$$

d) Dla stanu o najniższej energii oblicz iloczyn maksymalnej niepewności położenia cząstki i maksymalnej niepewności pędu cząstki.

3 Zadanie - Sferycznie symetryczne rozwiązania atomu wodoru

Napisz równanie Schrödingera dla bezspinowego elektronu w polu nieruchomego protonu.

a) Wykaż, że dla funkcji zależnej jedynie od odległości od początku układu r zachodzi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(r) = \left(\frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right) \psi(r)$$

b) Żądając, aby nieunormowana funkcja postaci

$$\psi_1 = \exp(-r/b)$$

spełniała równanie Schrödingera, oblicz wartość stałej b oraz energię tego stanu.

c) Podobnie uczyni z funkcją

$$\psi_2 = (1 + ar) \exp(-r/b)$$

Kącik rozrywki

Wszechświat, jak to zaobserwowaliśmy, jako całość nie jest pod żadnym względem dobry, chociaż ma pewne szczegóły, które są w rzeczywistości bardzo dobre, na przykład truskawki, morze, wschód słońca i śpiew ptaków.

Clive Staples Lewis

Przyspieszony Archimedes

Na podłodze windy stoi akwarium z wodą, w wodzie pływa częściowo zanurzona łódka. Jak zmieni się zanurzenie łódki, gdy winda ruszy do góry?