

## 1 Część i całość

Student otrzymał zadanie obliczenia siły, jaką jedna półkula jednorodnej kuli działa na drugą półkulę. Po wielu bezsensownych nocach doszedł do wniosku, że musi skorzystać z następującego twierdzenia:

*Zbiór  $Z$  punktów materialnych jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów punktów materialnych:  $A$  oraz  $B$ . Jeśli oddziaływania między punktami materialnymi spełniają III zasadę dynamiki, to siła, jaką działa zbiór punktów  $B$  na zbiór punktów  $A$ , jest równa sile, jaką działa zbiór punktów  $Z$  na zbiór punktów  $A$ .*

Udowodnij to twierdzenie.

## 2 Niemożliwa bryła

Czy można skonstruować taki wielościan wypukły, aby przez żadną ze ścian nie przechodziła prosta zawierająca środek masy wielościanu i prostopadła do płaszczyzny zawierającej daną ścianę? Jak zachowywałby się taki wielościan? Pomyśl nad silniejszym twierdzeniem dotyczącym tylko dwóch ścian o wspólnej krawędzi.

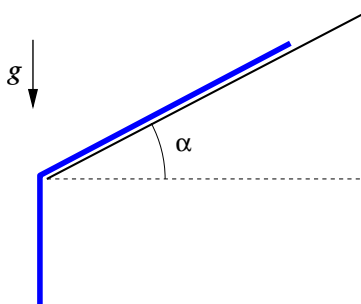
## 3 Kula z wydrążeniem

W ołowianej kuli o promieniu  $a = 20$  cm znajduje się kuliste wydrążenie o promieniu  $b = 3$  cm. Odległość między środkiem kuli a środkiem wydrążenia wynosi  $d = 10$  cm. Znajdź położenie środka masy tej bryły.

## 4 Zwisająca lina

Część  $q$  elastycznej liny zwisa ze stołu, którego blat jest nachylony pod kątem  $\alpha \in [0, \pi/2]$  względem poziomu. Część  $1 - q$  liny leży na blacie. Lina pozostaje w spoczynku. Co można powiedzieć o współczynniku tarcia statycznego liny o stół? Uzyskaj również wynik liczbowy, jeśli  $q = 0,4$ . Przyjmij, że tuż przy brzegu blatu tarcie nie występuje (tam, gdzie zagina się lina). Jak sprawdzić eksperymentalnie, czy takie założenie jest poprawne?

*Uwaga: Pamiętaj, że w przypadku statycznym  $T = \mu N$  jest wartością maksymalną siły tarcia statycznego (aktualna wartość może być mniejsza lub równa).*



---

<sup>1</sup>e-mail: [Piotr.Niezurawski@fuw.edu.pl](mailto:Piotr.Niezurawski@fuw.edu.pl)

## 5 Trójkąt grawitacyjny

Jakie warunki muszą być spełnione, aby odległości między trzema swobodnymi punktami materialnymi były stałe, jeśli znane są ich masy oraz wiadomo, że punkty nie leżą na prostej? Punkty materialne oddziałują jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Oblicz prędkość kątową punktów materialnych w inercjalnym układzie, w którym środek ich masy spoczywa. Wyprowadź warunki na odległości pomiędzy ciałami.

## 6 Zderzenie centralne

Kula o masie  $m_1$  i prędkości  $v_1$  zderza się z kulą o masie  $m_2$  i prędkości  $v_2$ . Zderzenie jest idealnie sprężyste, a środki geometryczne kul cały czas znajdują się na tej samej prostej. Kule nie wirują. Oblicz prędkość kuli o masie  $m_1$  po zderzeniu. Wynik doprowadź do postaci, w której nie występuje pierwiastek kwadratowy. Sprawdź wynik w przypadku, gdy  $m_1/m_2 \rightarrow 0$ , oraz w przypadku, gdy  $m_2/m_1 \rightarrow 0$ .

*Spróbuj rozwiązać układ równań sprytnie, bez standardowej procedury dla trójmianu kwadratowego.*

## 7 Wagon i deszcz

Wagon o masie  $m_0$  zaczął poruszać się bez tarcia po poziomych torach. Jego prędkość początkowa wynosiła  $v_0$ . Ze względu na pionowo padający, przymarzający deszcz masa wagonu zwiększa się w tempie  $w$ . Znajdź zależność prędkości wagonu od czasu. Po jakim czasie od startu wagonu jego prędkość zmniejszy się stokrotnie, jeśli  $m_0 = 10^4$  kg,  $w = 0,99$  kg/s?

## 8 Kosmiczny walc

Dwa kuliste, jednorodnie obiekty o masach  $M_a$  oraz  $M_b$  wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. Okres tego ruchu wynosi  $T$ . Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit. Wyniki sprawdź w przypadku, gdy  $M_a/M_b \rightarrow 0$ , oraz w przypadku, gdy  $M_a = M_b$ .

## 9 Kamyk w obręczy

Wewnątrz pionowo ustawionej obręczy o promieniu  $R$  krąży bez tarcia kamyk o masie  $m$ . Wyznacz wartość wektora prędkości kamyka w zależności od kąta azymutalnego  $\phi$  (przyjmij, że środek układu współrzędnych pokrywa się ze środkiem obręczy), jeśli wiadomo, że całkowita energia mechaniczna kamyka w najniższym punkcie toru wynosi  $E$ . Wyznacz również wektor siły w zależności od  $\phi$ , z jaką kamyk działa na obręcz. Jaki warunek musi spełniać  $E$ , aby kamyk nie oderwał się od obręczy? Pomiń rozmiary kamyka.