Podstawy Fizyki - Wykład 2

Dynamika:
Masa
Pęd
Siła
Moment pędu
Energia mechaniczna

Piotr Nieżurawski

pniez@fuw.edu.pl

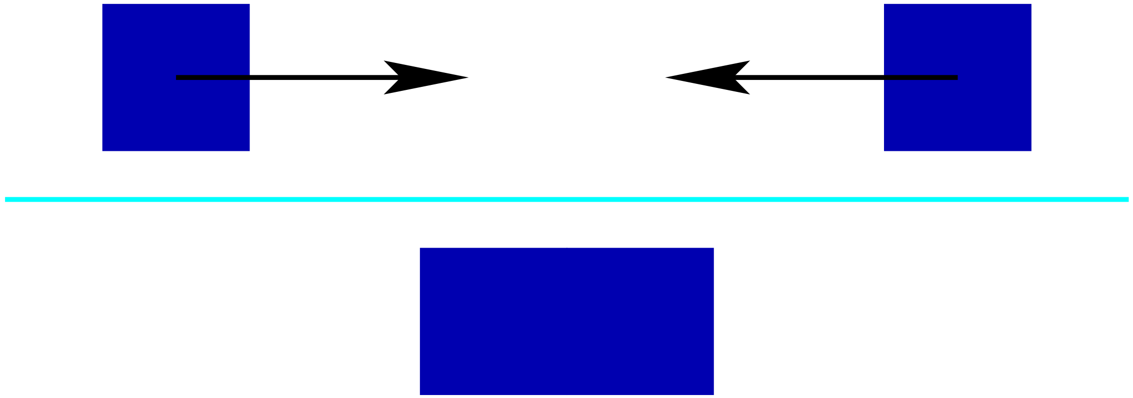
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

http://www.fuw.edu.pl/~pniez/bioinformatyka/

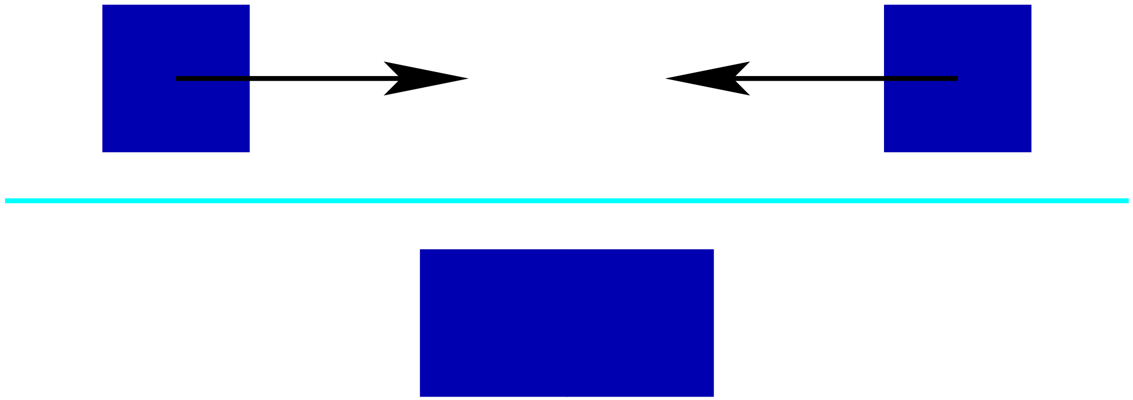
Jak opisać oddziaływania?

Zaczniemy od prostych sytuacji - **zderzeń** w układzie inercjalnym.

Załóżmy, że dwa sześciany zlepiają się w zderzeniu:



Jaka jest prędkość powstałego prostopadłościanu?



Z symetrii układu wynika, że prostopadłościan nie będzie się poruszać.

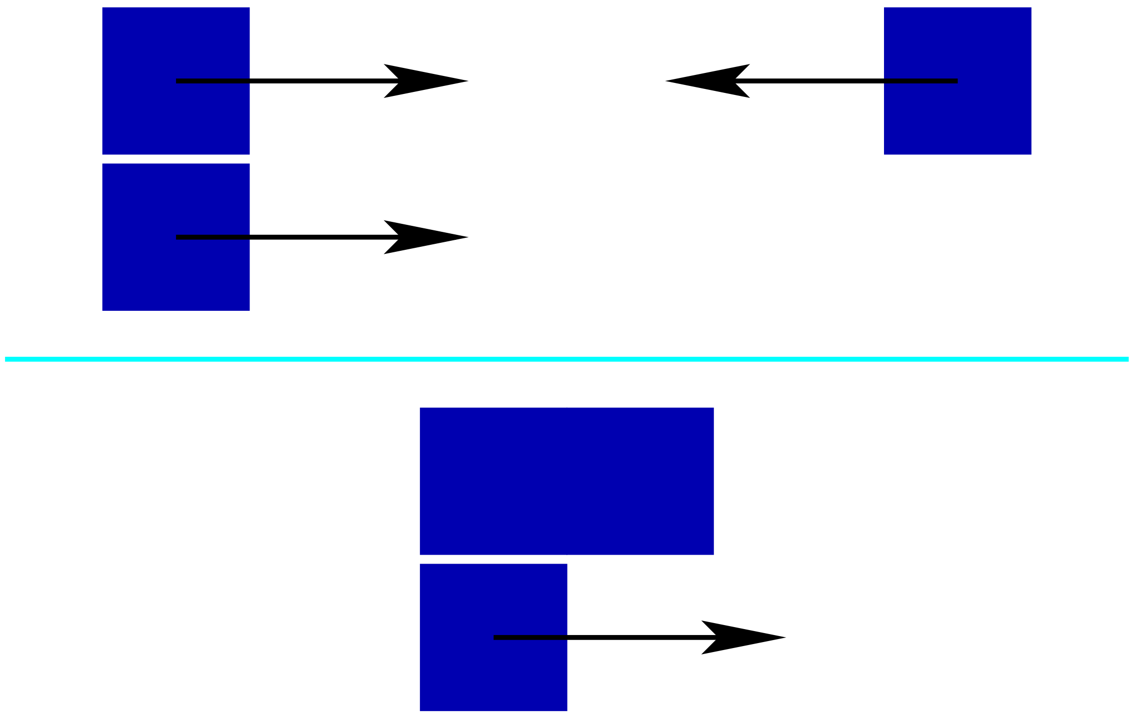
Możemy napisać proste równanie na prędkość powstałej bryły

$$\vec{v} + (-\vec{v}) \; = \; 0$$

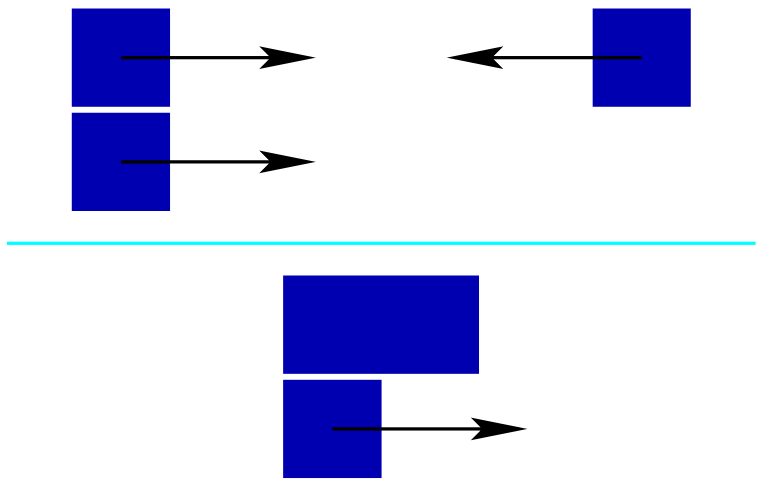
Pierwszy wynik już mamy.

A jeśli nie ma takiej symetrii?

Zaczniemy od „ciała”, które się składa z dwóch sześcianów i łatwo się dzieli



Prędkość jedynego lecącego sześcianu jest niezmieniona.



Równanie na prędkość „wolnego” sześcianu

$$2\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v}$$

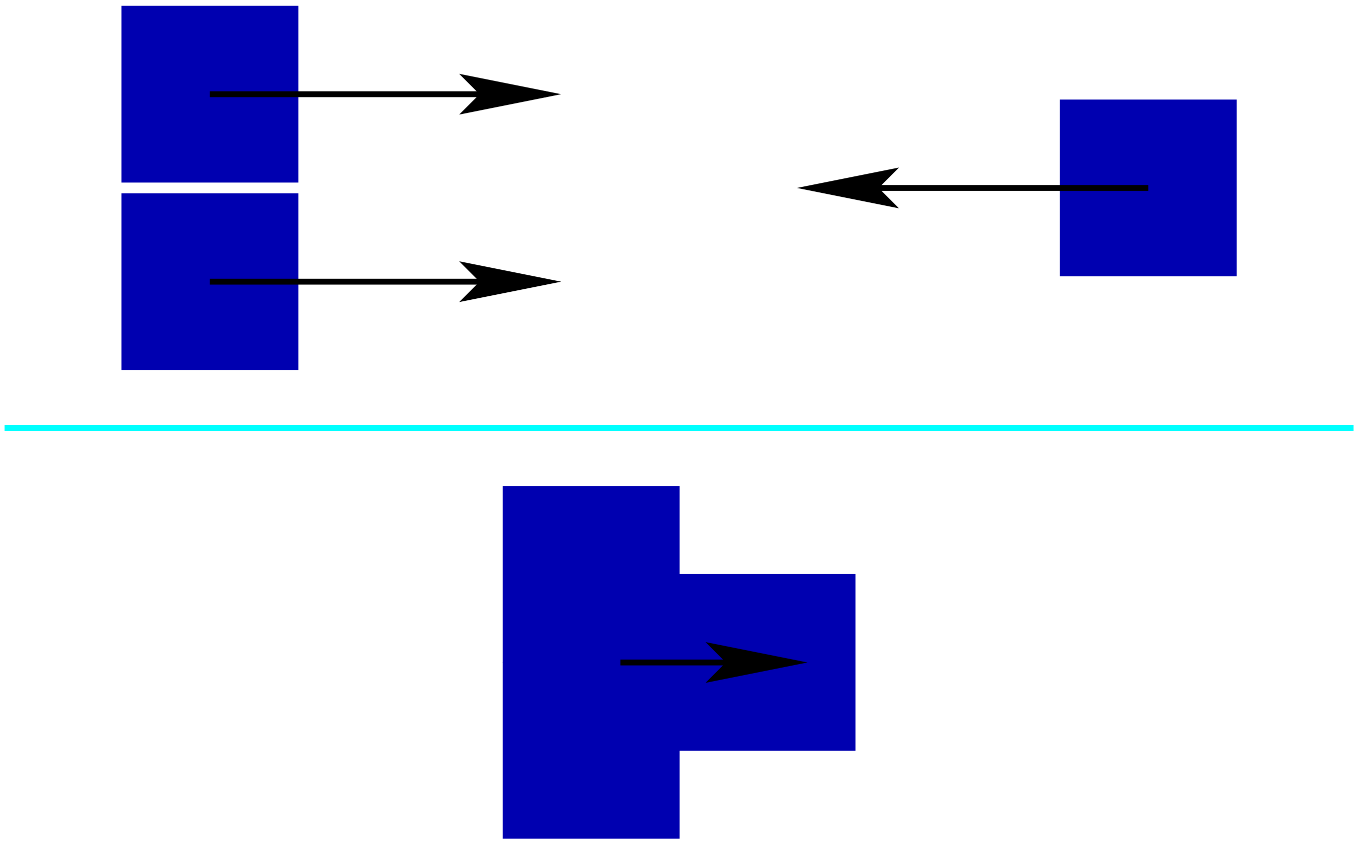
a uogólniając:

$$m_1\vec{v} + m_2(-\vec{v}) = (m_1 - m_2)\ \vec{v}$$

gdzie m_1 oznacza liczbę sześcianów nadlatujących z lewej,

a m_2 nadlatujących z prawej.

Niech wszystko się zlepi!



Jaka będzie prędkość bryły składającej się z 3 sześcianów?

Proponujemy

$$2\vec{v} + (-\vec{v}) \qquad = \qquad 3(\frac{1}{3}\vec{v}) = 3\vec{v}'$$

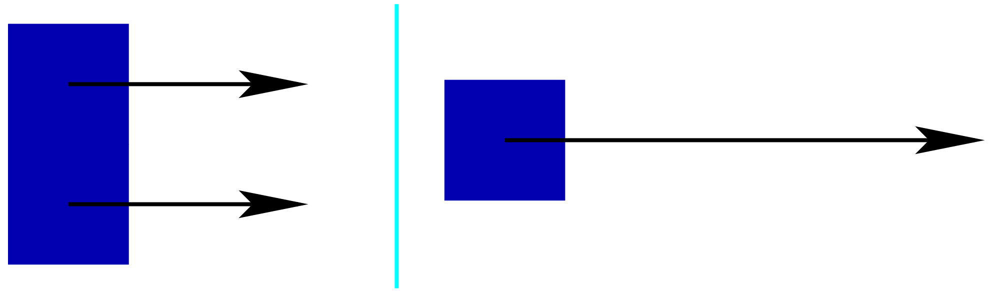
a uogólniając:

$$m_1\vec{v} + m_2(-\vec{v}) \ = (m_1 + m_2) \ \ \vec{v}'$$

gdzie

$$\vec{v}' = \vec{v}\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

Moja propozycja: reinterpretacja iloczynu $m\vec{v}$



$$m\vec{v} = (m/n)(\vec{v}n)$$

Możemy wtedy sformułować prawa dla dowolnych $\vec{v}_i$ i m_i dla zderzenia niesprężystego (pociski sklejają się)

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_3\vec{v}_3$$

$$m_1 + m_2 = m_3$$

Wielkość

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

nazywamy **pędem**.

Świat nie składa się tylko z identycznych sześcianów...

Uznajmy jeden obiekt za wzorcowy (np. wzorzec kilograma), dla reszty obiektów ustalmy ile (m) ich „odpowiada" wzorcowi:

$$\vec{v} + m(-\vec{v}) \;=\; 0$$

Masa dowolnego obiektu to liczba m z informacją, jakiego wzorca użyto (np. 5 kg).

Zasada zachowania pędu

Załóżmy, że sześciany się nie zlepiają albo przynajmniej nie wszystkie:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4$$

Ogólnie prawo zachowania pędu (układ inercjalny, brak sił zewnętrznych)

$$\sum_i m_i\vec{v}_i = \overrightarrow{\mathrm{const}}$$

Czy propozycja $m\vec{v} = (m/n)(\vec{v}n)$ jest dobra?

Matematycznie tak, ale okazuje się, że fizycznie nie...

Czasoprzestrzeń jest bardziej skomplikowana - nie zaobserwowano obiektów poruszających się szybciej niż światło w próżni

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Moja propozycja na to pozwala: miliard sześcianów o szybkości 1 m/s przekazuje cały pęd jednemu sześcianowi - będzie miał on szybkość 10^9 m/s.

Dla szybkości $\ll c$ nasz opis (tzw. *mechanika nierelatywistyczna*) jest wystarczający.

Tematy do samodzielnych studiów dla zainteresowanych: transformacja Galileusza, transformacja Lorentza, szczególna teoria względności Einsteina.

Jak stosować zasadę zachowania pędu?

W przestrzeni kosmicznej statek Gżegżółka rozpadł się na dwie części: jedną o masie 4 t, drugą o masie 50 kg. Wg obserwatora początkowo statek spoczywał, a po rozpadzie prędkość cięższej części była równa 2 m/s. Oblicz prędkość lżejszej części.

Pęd początkowy = pęd końcowy

$$0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

czyli

$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1\frac{m_1}{m_2}$$

Wektory prędkości muszą być *współliniowe* i o *przeciwnych zwrotach*

- problem jednowymiarowy,

możemy zająć się wartościami prędkości

(„długość każdej strony równania”)

$$|\vec{v}_2| \ = \ | - \vec{v}_1 \frac{m_1}{m_2}|$$

czyli

$$v_2 \ = \ v_1 \frac{m_1}{m_2} = 2 \text{ m/s} \frac{4000 \text{ kg}}{50 \text{ kg}} = 160 \text{ m/s}$$

Jaki jest związek pędu z siłą?

Siła $\vec{F}$ to „prędkość” zmian pędu. Jest to treść **II zasady dynamiki Newtona**.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Dla ciał o stałej masie

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

A więc ten „przepis” na zmianę prędkości - jak mówiłem o sile - to po prostu podanie przyśpieszenia i pomnożenie go przez masę.

Przykłady

Nasza skala: Siła przyciągania ziemskiego w sali

$$\vec{F} = m\vec{g} = \overrightarrow{\text{const.}}$$

Przyśpieszenie ciała $\vec{a} = ?$

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

Skala kosmiczna: Siła przyciągania Ziemi przez Słońce

$$\vec{F} = -GmM\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Przyśpieszenie Ziemi $\vec{a} = ?$

$$m\vec{a} = -GmM\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Czy coś jest niezmienne, gdy działa siła?

Jeśli siła działa cały czas wzdłuż wektora położenia ciała $\vec{r}$ (tzw. *siła centralna*), to zachowany jest **moment pędu** $\vec{J}$:

$$\vec{J} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

Definicja: ***Iloczyn wektorowy*** wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ to wektor $\vec{W}$:

$$\vec{W} = \vec{A} \times \vec{B}$$

o wartości

$$W = AB \sin \alpha$$

Wektor $\vec{W}$ jest **prostopadły** do płaszczyzny rozpiętej przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, gdy zaczepimy je w tym samym punkcie; jego zwrot wyznaczamy za pomocą reguły śruby prawoskrętnej: śrubę ustawiamy prostopadle do płaszczyzny rozpiętej przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, śrubę obracamy po kącie α od wektora $\vec{A}$ do wektora $\vec{B}$, powoduje to wkręcanie w płaszczyznę lub wykręcanie śruby, **zwrot** $\vec{W}$ jest zgodny z ruchem postępowym śruby.

Z dwóch kątów między wektorami wybieramy mniejszy (wtedy $\alpha \in [0,\ \pi]$).

Reguła mnemotechniczna: *Zwrot $\vec{J}$ wskazuje kciuk prawej ręki, jeśli pozostałe palce prawej dłoni będą wskazywać kierunek intuicyjnie oczywistego obrotu, zgodnego z pędem.*

Przykłady

$$
\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{A} &= 0 \\
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{A} \times \vec{B} &= -\vec{B} \times \vec{A}
\end{aligned}
$$

Przykład - Kometa Halleya

Oblicz największą wartość prędkości komety, jeśli najmniejsza i największa odległość od komety do Słońca równa jest odpowiednio r_P oraz r_A (peryhelium oraz aphelium). Najmniejsza szybkość komety jest równa $v_A = 1$ km/s. Przyjmij $r_P = 9 \cdot 10^{10}$ m, $r_A = 5 \cdot 10^{12}$ m.

Rozwiązanie

Z zasady zachowania momentu pędu

$$\vec{r}_P \times m\vec{v}_P = \vec{r}_A \times m\vec{v}_A$$

$\vec{r} \perp \vec{v}$ w peryhelium i w aphelium

$$r_P v_P = r_A v_A$$

Wynik

$$v_P = v_A \frac{r_A}{r_P} \approx 56 \text{ km/s}$$

Czy jeszcze jakaś wielkość jest niezmienna w ruchu komety?

Jest zachowana **energia mechaniczna** komety, która jest sumą energii *kinetycznej* (związanej z ruchem) i *potencjalnej* (związanej z siłą, jaka działa na kometę)

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p \\ E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\ E_p &= -G\frac{mM_S}{r} \end{aligned}$$

Można więc wyznaczyć prędkość komety w dowolnym punkcie toru (odległym o r od Słońca) z równania

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_S}{r} = \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{mM_S}{r_A}$$

Energia mechaniczna w naszej skali

W ziemskim polu grawitacyjnym nadającym przyśpieszenie g:

$$
\begin{aligned}
E &= E_k + E_p \\
E_k &= \frac{1}{2}mv^2 \\
E_p &= gmh
\end{aligned}
$$

gdzie h jest wysokością nad ustalonym umownie poziomem (jeśli h ma wartość ujemną, to ciało jest poniżej tego poziomu).

Np. dla spadku w rurze próżniowej

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + gmh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + gmh_2$$

Co z czego wynika?

Sposobów dochodzenia do omówionych zasad jest przynajmniej kilka. Spróbujmy wystartować teraz z trzech zasad dynamiki Newtona:

I zasada-postulat dynamiki Newtona (kłopoty z weryfikacją i logicznym sformułowaniem)

Istnieje układ odniesienia w pustej przestrzeni, w którym ciało spoczywa lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Taki układ nazywamy ***układem inercjalnym***.

II zasada dynamiki Newtona - definicja siły

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \ ,$$

gdzie

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

III zasada dynamiki Newtona

Jeśli ciało A działa siłą $\vec{F}_{BA}$ na ciało B, to ciało B działa siłą

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

na ciało A.

Notacja kropka = pochodna po czasie

$$\dot{\vec{p}} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Zachowanie pędu izolowanego układu?

N punktów materialnych, oddziaływania między punktami materialnymi spełniają III zasadę dynamiki.

Równanie ruchu punktu materialnego o indeksie i

$$\dot{\vec{p}}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

Całkowity pęd

$$\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \ ,$$

więc

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

Ale

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(-\vec{F}_{ij}) \ ,$$

gdzie wykorzystałem

- dowolność indeksowania,
- przemienność dodawania
- i III zasadę dynamiki.

Mini-zadanie: Pokaż, że $\vec{F}_{ii} = 0$.

Wobec tego

$$2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = 0$$

i otrzymujemy

$$\dot{\vec{P}} = 0 \ ,$$

co kończy dowód.

A bez zamiany indeksów, sum itd.?

Wypisujemy kolejne siły

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{P}} &= \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} \\
&= \vec{F}_{11} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \cdots + \vec{F}_{1N} \\
&+ \vec{F}_{21} + \vec{F}_{22} + \vec{F}_{23} + \cdots + \vec{F}_{2N} \\
&+ \cdots \\
&+ \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{N3} + \cdots + \vec{F}_{NN} \\
&= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \cdots \\
&= \vec{F}_{12} - \vec{F}_{12} + \cdots \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Zachowanie momentu pędu punktu materialnego?

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

Mnożymy obie strony wektorowo przez wektor położenia:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Jeśli $\vec{r} \parallel \vec{F}$, to $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ i otrzymujemy

$$\vec{r} \times \dot{\vec{p}} = 0$$

Ale

$$\begin{aligned}
\vec{r} \times \dot{\vec{p}} &= \vec{r} \times \dot{\vec{v}} m \\
&= (\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}}) m \\
&= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v} m) \\
&= \dot{\vec{J}}
\end{aligned}$$

Czyli

$$\dot{\vec{J}} = 0 \ ,$$

co kończy dowód.

Skorzystaliśmy z tego, że $\vec{v} \times \vec{v} = 0$.

Zachowanie momentu pędu izolowanego układu?

N punktów materialnych, oddziaływania między punktami materialnymi spełniają III zasadę dynamiki.

Równanie ruchu punktu materialnego o indeksie i

$$\dot{\vec{J}}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Całkowity moment pędu

$$\vec{J}_C \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{J}_i \ ,$$

więc

$$\dot{\vec{J}}_C = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{J}}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Ale

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij} &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_j\times\vec{F}_{ji}\\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j\times\vec{F}_{ji}\\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j\times\left(-\vec{F}_{ij}\right)\ ,
\end{aligned}
$$

gdzie wykorzystałem

- dowolność indeksowania,
- przemienność dodawania
- i III zasadę dynamiki.

Wobec tego (tym razem stosuję trochę inny „chwyt”):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &= (\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij})/2 = \\
&= (\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j \times \vec{F}_{ij})/2 = \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}/2
\end{aligned}$$

Jeśli dla każdych dwóch punktów materialnych siła, jaką jeden z nich działa na drugi,

jest równoległa do prostej przechodzącej przez te punkty materialne,

to $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$ i otrzymujemy

$$\dot{\vec{J}}_C = 0 \ ,$$

co kończy dowód.

Zachowanie energii punktu materialnego?

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

Całkujemy obie strony równania po krzywej między punktami $\vec{r}_1$ oraz $\vec{r}_2$

$$m\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \dot{\vec{v}} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Najpierw lewa strona. Korzystamy z $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \dot{\vec{v}} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}\, dt = \frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v}\,\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

Prawa strona. Wprowadźmy oznaczenie

$$V(\vec{r}) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Wtedy całe równanie

$$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = -V(\vec{r}_2) + V(\vec{r}_1)$$

można przepisać tak, że wszystkie zmienne związane z położeniem początkowym są po jednej stronie, a po drugiej - z końcowym

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + V(\vec{r}_2) = \frac{1}{2}mv_1^2 + V(\vec{r}_1)$$

Równość dla dowolnych punktów, więc jest to **stała ruchu**.

Do czego to prowadzi w naszej skali i sali?

Obliczmy jeszcze raz prawą stronę równania

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Podstawiamy

$$\vec{F} = m\vec{g} = \overrightarrow{\text{const.}}$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{g} \cdot d\vec{r} &= m\vec{g} \cdot \vec{r}\,\Big|_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \\ &= m\vec{g} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \end{aligned}$$

Dla

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_{i=1,2} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$$

dochodzimy do znanej zależności

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + gmz_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + gmz_1$$

A w skali kosmicznej?

Prawa strona równania ($\vec{r}$ ma początek w centrum siły)

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -GMm \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{r}$$

Całka

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{r} &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\, dr \\ &= -\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \end{aligned}$$

Wynik

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{r_2} = \frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM}{r_1}$$

Jeszcze raz iloczyn skalarny z ostatniej całki

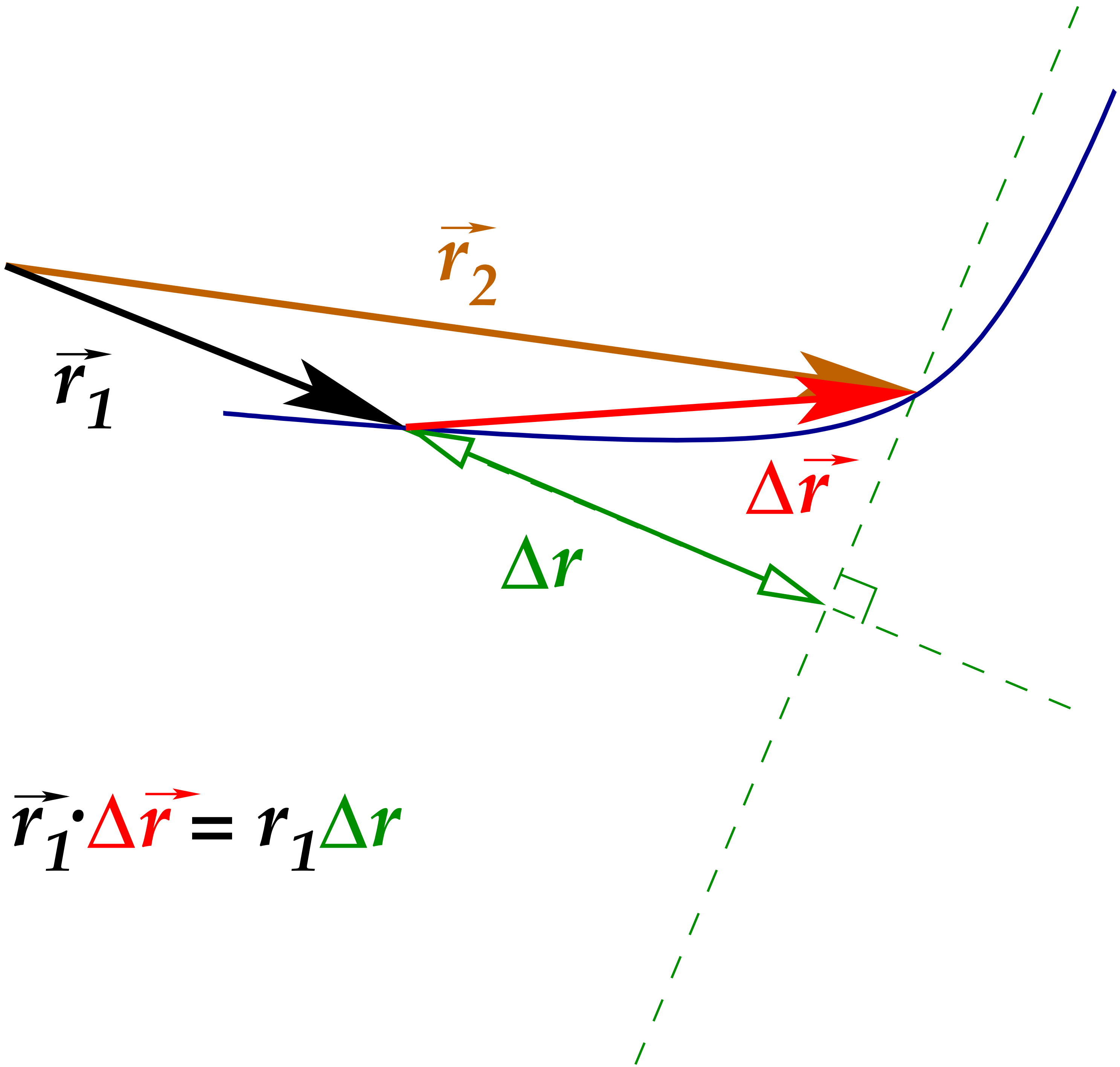
$$\int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\, dr$$

$\vec{r}$ to wektor położenia ciała, którego ruch badamy; $\vec{r}$ ma początek w centrum siły.

$d\vec{r}$ lub lepiej $\Delta\vec{r}$ jest ***„małym" przesunięciem***, mogącym mieć dowolny kierunek; $\Delta\vec{r}$ to ***zmiana wektora położenia*** $\vec{r}$.

Iloczyn skalarny $\vec{r} \cdot \Delta\vec{r}$ jest równy $r\,\Delta r$, gdzie r jest długością wektora $\vec{r}$, a Δr (w całce: dr) to ***zmiana odległości ciała od centrum siły***, czyli zmiana r

To samo inaczej: Δr jest długością rzutu wektora $\Delta\vec{r}$ na wektor $\vec{r}$



$$\vec{r}_1 \cdot \Delta\vec{r} = r_1 \Delta r$$