Podstawy Fizyki - Wykład 3

Energia i praca
Siła wyporu

Piotr Nieżurawski

pniez@fuw.edu.pl

Wydział Fizyki

Uniwersytet Warszawski

http://www.fuw.edu.pl/~pniez/bioinformatyka/

Co to jest praca?

Dla punktu materialnego wystartowaliśmy z równania

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \ ,$$

scałkowaliśmy obie strony równania po krzywej (torze) między punktami $\vec{r}_1$ oraz $\vec{r}_2$

$$m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \dot{\vec{v}} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

i otrzymaliśmy

$$\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Lewa strona jest różnicą energii *kinetycznych* (związanych z ruchem), jakie punkt materialny miał w położeniach $\vec{r}_2$ oraz $\vec{r}_1$

$$E_{k2} - E_{k1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Prawa strona jest nazywana ***pracą***, W, jaką wykonała siła $\vec{F}$ na ***ustalonej drodze*** między położeniami $\vec{r}_1$ oraz $\vec{r}_2$

$$W_{1\to 2} \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Możemy więc napisać

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to 2}$$

Przykład „poziomy”

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie $m = 50$ kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości $F = 80$ N na odległości $S = 2$ m. Pomijając opory ruchu łyżwiarza, oblicz szybkość, z jaką będzie się poruszał po rozpędzeniu.

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2 = ?$$

$$W_{1\to 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^S F\,dx = FS$$

Skorzystaliśmy z tego, że siła i przesunięcie są równoległe i mają ten sam zwrot.

Z równości

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to 2}$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = FS$$

Odpowiedź

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2FS/m} \\ &= \sqrt{2 \cdot 80 \text{ N} \cdot 2 \text{ m}/(50 \text{ kg})} \\ &\approx 2{,}5 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Przykład „pionowy”

Metalowa kulka została wystrzelona pionowo do góry z szybkością początkową $v_1 = 20$ m/s. Kulka porusza się w rurze próżniowej, w ziemskim polu grawitacyjnym $g = 9{,}8$ m/s^2. Na jakiej wysokości nad wylotem lufy szybkość kulki będzie równa $v_2 = 10$ m/s?

Na kulkę działa siła grawitacji ziemskiej - siła ta wykonuje pracę

$$W_{1\to 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^h (-mg)\, dz = -mgh$$

Skorzystaliśmy z tego, że siła i przesunięcie są równoległe i mają przeciwne zwroty.

Z równości

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to 2}$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -mgh$$

Odpowiedź

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2)/g \\ &= \frac{1}{2}[(20 \text{ m/s})^2 - (10 \text{ m/s})^2]/(9{,}8 \text{ m/s}^2) \\ &\approx 15 \text{ m} \end{aligned}$$

Przykład „ukośny”

Na bardzo śliskiej równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ względem poziomu postawiono sanki. Pomijając opory ruchu sanek, oblicz ich szybkość po przebyciu drogi $S = 5$ m.

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m v_1^2 = 0$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m v_2^2 = ?$$

Na sanki działa siła grawitacji ziemskiej - siła ta wykonuje pracę

$$W_{1\to 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^S mg\cos(90^\circ - \alpha)\, dl = mg\cos(90^\circ - \alpha) S$$

Skorzystaliśmy z tego, że **kąt** między siłą grawitacji i przesunięciem jest równy $90^\circ - \alpha$.

Z równości

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to 2}$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = m g \cos(90^\circ - \alpha) S$$

Odpowiedź

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2\, g \cos(90^\circ - \alpha) S} \\ &= \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \ \text{m/s}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \ \text{m}} \\ &= 7 \ \text{m/s} \end{aligned}$$

Dlaczego nie uwzględniliśmy siły, jaką działa równia (lodowisko) na sanki (łyżwiarza)?

Śliska (bez tarcia) i gładka (bez kantów) powierzchnia działa na poruszający się po niej przedmiot jedynie siłą $\vec{F}_R$, która jest prostopadła do tej powierzchni i jednocześnie do możliwego przesunięcia tego przedmiotu

$$\vec{F}_R \cdot \Delta\vec{r} = 0$$

Wobec tego praca tych ***sił reakcji*** jest równa 0.

A jeśli występuje tarcie?

Siła tarcia jest zawsze przeciwnie skierowana do ruchu przedmiotu względem podłoża

$$\vec{F}_T = -\frac{\vec{v}}{v} F_T$$

Np. popychając przedmiot musimy działać siłą $\vec{F}$ o wartości równej lub większej od F_T. Równanie ruchu

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} + \vec{F}_T$$

doprowadzi do równania

$$\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{F} + \vec{F}_T) \cdot d\vec{r}$$

Możemy powiedzieć, że nad ciałem wykonaliśmy pracę

$$W_{1\to 2}^{nasza} \equiv \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Praca ta jednak nie skutkowała tylko zwiększeniem energii kinetycznej przedmiotu. Pokonywaliśmy bowiem siły tarcia, a więc część energii zużyliśmy na ogrzanie ciał, ich deformację itp.

$$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_T \cdot d\vec{r} = W_{1\to 2}^{nasza}$$

Przykład „poziomy” z tarciem

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie $m = 50$ kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości $F = 80$ N na odległości $S = 2$ m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość $F_T = 30$ N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszał po rozpędzeniu.

$$\begin{aligned} E_{k1} &= \frac{1}{2} m v_1^2 = 0 \\ E_{k2} &= \frac{1}{2} m v_2^2 = ? \\ W_{1\to 2}^{nasza} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^S F\, dx = FS \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z tego, że siła i przesunięcie są równoległe i mają ten sam zwrot.

„Praca” sił tarcia (zawsze ujemna!)

$$\int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_T \cdot d\vec{r} = \int\limits_0^S (-F_T)\, dx = -F_T S$$

Skorzystaliśmy z tego, że siła tarcia jest zawsze skierowana przeciwnie niż przesunięcie.

Z równości

$$E_{k2} - E_{k1} - \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_T \cdot d\vec{r} = W_{1\to 2}^{nasza}$$

otrzymujemy

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + F_T S = F S$$

Odpowiedź

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{2(F - F_S)S/m} \\ &= \sqrt{2 \cdot 50 \text{ N} \cdot 2 \text{ m}/(50 \text{ kg})} \\ &= 2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Jak są powiązane praca i energia potencjalna?

Praca siły $\vec{F}$ na ustalonej drodze to

$$W_{1\to 2} \equiv \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

A energią potencjalną np. komety w polu siły grawitacyjnej $\vec{F}$ i w punkcie wskazywanym przez wektor $\vec{r}_1$ nazwaliśmy

$$E_{p1} \equiv V(\vec{r}_1) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}\,|_{\vec{r}=\vec{r}_1}$$

Oczywisty więc wydaje się związek

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2}$$

Ale ponieważ energia potencjalna jest zdefiniowana

dla punktu w przestrzeni (nie zależy od historii ciała),

więc związek jest prawdziwy dla tych sił,

dla których praca **nie zależy od drogi**,

a jedynie od położeń końcowego i początkowego ciała.

Takie siły nazywane są ***zachowawczymi***.

Przykład w naszej sali

Praca siły grawitacji nad odważnikiem o masie $m = 1$ kg podczas jego **spadania** z wysokości $h = 1$ m nad podłogą.

Jeśli - jak zwykle - oś Z jest skierowana do góry, to

$$W_{1\to 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{h}^{0} (-mg)\, dz = mgh$$

Energia potencjalna dla dowolnego z

$$V(z) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = mgz + C$$

Związek

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2}$$

$$mgh = mgh - mg0$$

Podnoszenie - odpowiedź na pytanie z wykładu

W ziemskim polu grawitacyjnym **podnosimy ze stałą prędkością** odważnik o masie $m = 1$ kg. Zmiana wysokości $h = 1$ m.

Ciężar odważnika

$$\vec{Q} = m\vec{g}$$

Siła, jaką my działamy

$$\vec{F}_{my}$$

Ciało porusza się ze stałą prędkością, więc zgodnie z II zasadą dynamiki wypadkowa siła działająca na nie jest równa 0.

$$\vec{F} = \vec{Q} + \vec{F}_{my} = 0$$

Stąd wynika, że

$$\vec{F}_{my} = -\vec{Q}$$

Odpowiednie prace (oś Z skierowana do góry):

Praca **siły wypadkowej (całkowitej)** działającej na ciało

$$W_{1\to 2}^{wyp} = \int\limits_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{0}^{h} 0\, dz = 0$$

Z zasady zachowania energii wynika, że energia kinetyczna nie zmieniła się (zgodnie z założeniem $\vec{v}$ jest stała).

Praca **siły, jaką my** (**nasza praca**) działaliśmy na ciało

$$W_{1\to2}^{nasza} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{my} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-\vec{Q}) \cdot d\vec{r}$$
$$= \int_0^h mg\, dz = mgh$$

Wykonaliśmy pracę dodatnią. Gdzie ona się podziała, skoro ciało nie przyśpieszyło?

Praca **siły grawitacji** działającej na ciało

$$W_{1\to2}^{graw} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{Q} \cdot d\vec{r}$$
$$= \int_0^h (-mg)\, dz = -mgh$$

Pole grawitacyjne „wykonało" ujemną pracę.

A więc „tutaj" została nasza praca zmagazynowana - w postaci energii potencjalnej

$E_{p2} = mgh$ układu końcowego.

$$\begin{aligned} W_{1\to 2}^{graw} &= E_{p1} - E_{p2} \\ &= mg0 - mgh \end{aligned}$$

Jak więc jest z tą zasadą zachowania energii?

Jeśli na punkt materialny działa wypadkowa (całkowita) siła $\vec{F}$, to jest spełniony związek

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Jeśli praca nie zależy od drogi (siła jest zachowawcza), to

$$W_{1\to 2} = E_{p1} - E_{p2}$$

i otrzymujemy zasadę zachowania energii mechanicznej

$$E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1} = E = \text{const.}$$

Przykład - II prędkość kosmiczna dla Ziemi?

II prędkość kosmiczna dla Ziemi, jest minimalną prędkością, jaką należy nadać ciału na powierzchni „błękitnej planety”, aby odleciało dowolnie daleko (do nieskończoności). Pomijamy wpływ innych ciał.

Zasada zachowania energii mechanicznej

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

$$\frac{1}{2}mv_{II}^2 - G\frac{M_Z m}{R_Z} = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 - G\frac{M_Z m}{r_{\infty}}$$

$$v_{II}^2 = 2G\frac{M_Z}{R_Z} + v_\infty^2 - 2G\frac{M_Z}{r_\infty}$$

Jeśli $r_\infty \to \infty$, to $r_\infty^{-1} \to 0$,

a v_{II} będzie najmniejsze, gdy $v_\infty = 0$

i otrzymujemy

$$v_{II} = \sqrt{2G\frac{M_Z}{R_Z}}$$

Czy energia izolowanego układu jest zachowana?

Zacznijmy od **dwóch** ciał A i B oddziałujących siłą zależną od **względnego położenia** ciał $\vec{r}$

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &\equiv \vec{r}_B - \vec{r}_A \\
\dot{\vec{p}}_A &= \vec{F}_{AB} \\
\dot{\vec{p}}_B &= \vec{F}_{BA}
\end{aligned}
$$

Kłopot z całkowaniem równań oddzielnie, bo $\vec{F}$ zależy od obu położeń

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{p}}_A \cdot \Delta\vec{r}_A &= \vec{F}_{AB} \cdot \Delta\vec{r}_A \\
\dot{\vec{p}}_B \cdot \Delta\vec{r}_B &= \vec{F}_{BA} \cdot \Delta\vec{r}_B
\end{aligned}
$$

Ale zauważamy, że

$$-\vec{F}_{AB} = \vec{F}_{BA} \equiv \vec{F}(\vec{r})$$

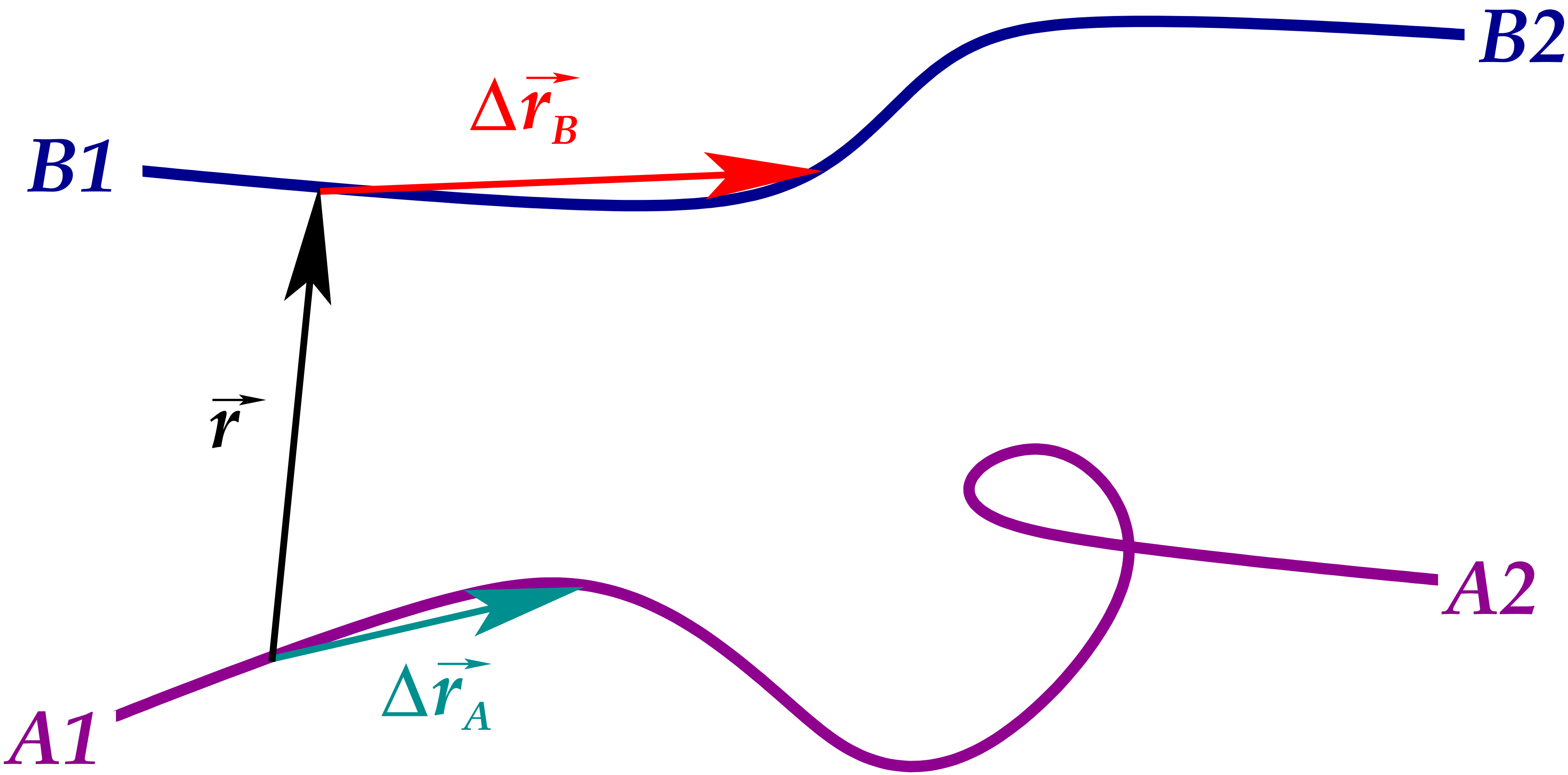
$$\Delta\vec{r}_B - \Delta\vec{r}_A = \Delta(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \equiv \Delta\vec{r}\ ,$$

co można wykorzystać po dodaniu dwóch równań do siebie

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{p}}_B \cdot \Delta\vec{r}_B + \dot{\vec{p}}_A \cdot \Delta\vec{r}_A &= \vec{F}_{BA} \cdot \Delta\vec{r}_B + \vec{F}_{AB} \cdot \Delta\vec{r}_A \\
&= \vec{F}_{BA} \cdot \Delta\vec{r}_B - \vec{F}_{BA} \cdot \Delta\vec{r}_A \\
&= \vec{F}_{BA} \cdot (\Delta\vec{r}_B - \Delta\vec{r}_A) \\
&= \vec{F}_{BA} \cdot \Delta\vec{r} \\
&= \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r}
\end{aligned}$$

Położenia **początkowe**: *A1* oraz *B1*

Położenia **końcowe**: *A2* oraz *B2*



Takie równania można napisać dla **każdego z niewielkich przesunięć** z historii układu.

Dodajemy do siebie ten szereg równań i przechodzimy do coraz mniejszych przesunięć („dążymy” do całek)

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_{Bi} \cdot \Delta\vec{r}_{Bi} + \sum_i \dot{\vec{p}}_{Ai} \cdot \Delta\vec{r}_{Ai} = \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$$

$$\int_{B1}^{B2} \dot{\vec{p}}_B \cdot d\vec{r}_B + \int_{A1}^{A2} \dot{\vec{p}}_A \cdot d\vec{r}_A = \int_{B1-A1}^{B2-A2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Otrzymujemy ***prawo zachowania energii dla układu dwóch ciał***

$$E_{kB2} - E_{kB1} \; + \; E_{kA2} - E_{kA1} = W_{B1-A1 \to B2-A2}$$

W przypadku **siły zachowawczej** możemy posłużyć się energią potencjalną

$$W_{B1-A1\to B2-A2} = E_{p,B1-A1} - E_{p,B2-A2}$$

i wszystkie wyrazy charakteryzujące stan początkowy (końcowy) umieścić po jednej stronie

$$E_{kB2} + E_{kA2} + E_{p,B2-A2} = E_{kB1} + E_{kA1} + E_{p,B1-A1}$$

Rozumowanie można kontynuować dla ***dowolnej liczby ciał***

$$\sum_{i=A,B,\ldots} E_{k,\,i} + \sum_{\substack{i,\,j=A,B,\ldots\\ i<j}} E_{p,\,j-i} \equiv E = \text{const.}$$

Przykład - *Dwie gwiazdy*

Gwiazda A ma masę $M_A = 2 \cdot 10^{30}$ kg, a gwiazda B masę $M_B = 10^{31}$ kg. Gdy były w odległości $d_1 = 2 \cdot 10^{11}$ m od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercjalnym wynosiły odpowiednio $v_{A1} = 100$ km/s oraz $v_{B1} = 10$ km/s.

Oblicz szybkość v_{A2} gwiazdy A w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do $d_2 = 10^{12}$ m, jeśli szybkość gwiazdy B była wtedy równa $v_{B2} = 5$ km/s. Przyjmij $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Zasada zachowania energii

$$E_{kA1} + E_{kB1} + E_{p,\,A1-B1} \;=\; E_{kA2} + E_{kB2} + E_{p,\,A2-B2}$$

$$E_{kA1} + E_{kB1} + E_{p,\,A1-B1} = E_{kA2} + E_{kB2} + E_{p,\,A2-B2}$$

$$\frac{1}{2}M_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B1}^2 - G\frac{M_A M_B}{d_1} = \frac{1}{2}M_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}M_B v_{B2}^2 - G\frac{M_A M_B}{d_2}$$

Wynik

$$v_{A2}^2 = v_{A1}^2 + M_B(v_{B1}^2 - v_{B2}^2)/M_A + 2GM_B(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1})$$

$$v_{A2} \approx 71 \text{ km/s}$$

Przykład - *Woda w termosie*

Sumę energii kinetycznych wszystkich cząsteczek wody i energii potencjalnych wszystkich

par cząsteczek

$$\overbrace{E_{k,\,A}+E_{k,\,B}+E_{k,\,C}+\ldots}^{\text{kinetyczna}} + \overbrace{E_{p,\,A-B}+E_{p,\,A-C}+\cdots+E_{p,\,B-C}+\ldots}^{\text{potencjalna}}$$

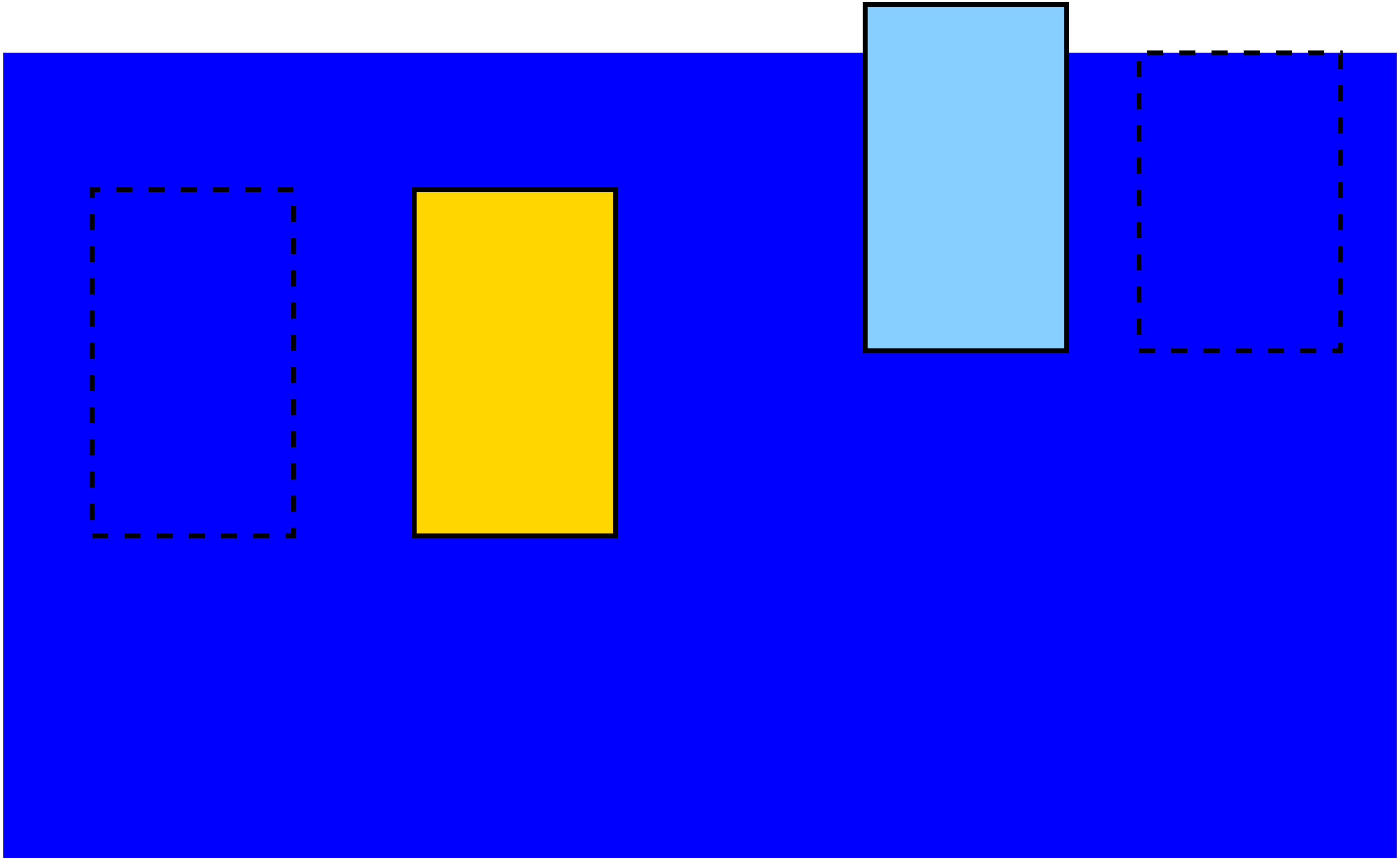
$$= \sum_{i=A,B,\ldots} E_{k,\,i} + \sum_{\substack{i,\,j=A,B,\ldots\\ i<j}} E_{p,\,j-i}$$

$$\equiv E = \text{const.}$$

nazywamy ***energią wewnętrzną*** ciała (tutaj: wody).

Teraz Ty odkryj, *jak to jest*!

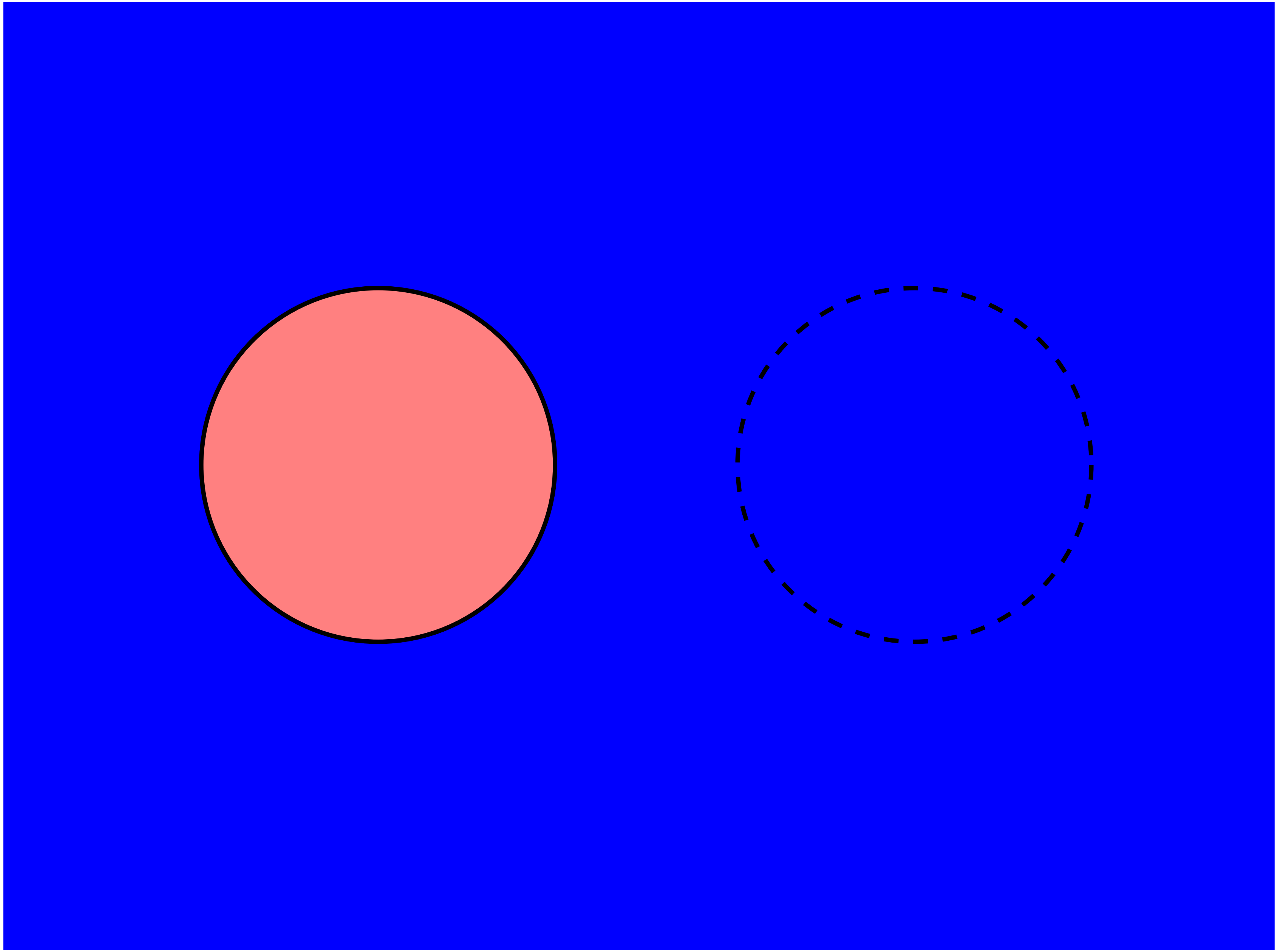
Wyobraź sobie akwarium... Dlaczego coś pływa, a coś innego tonie?



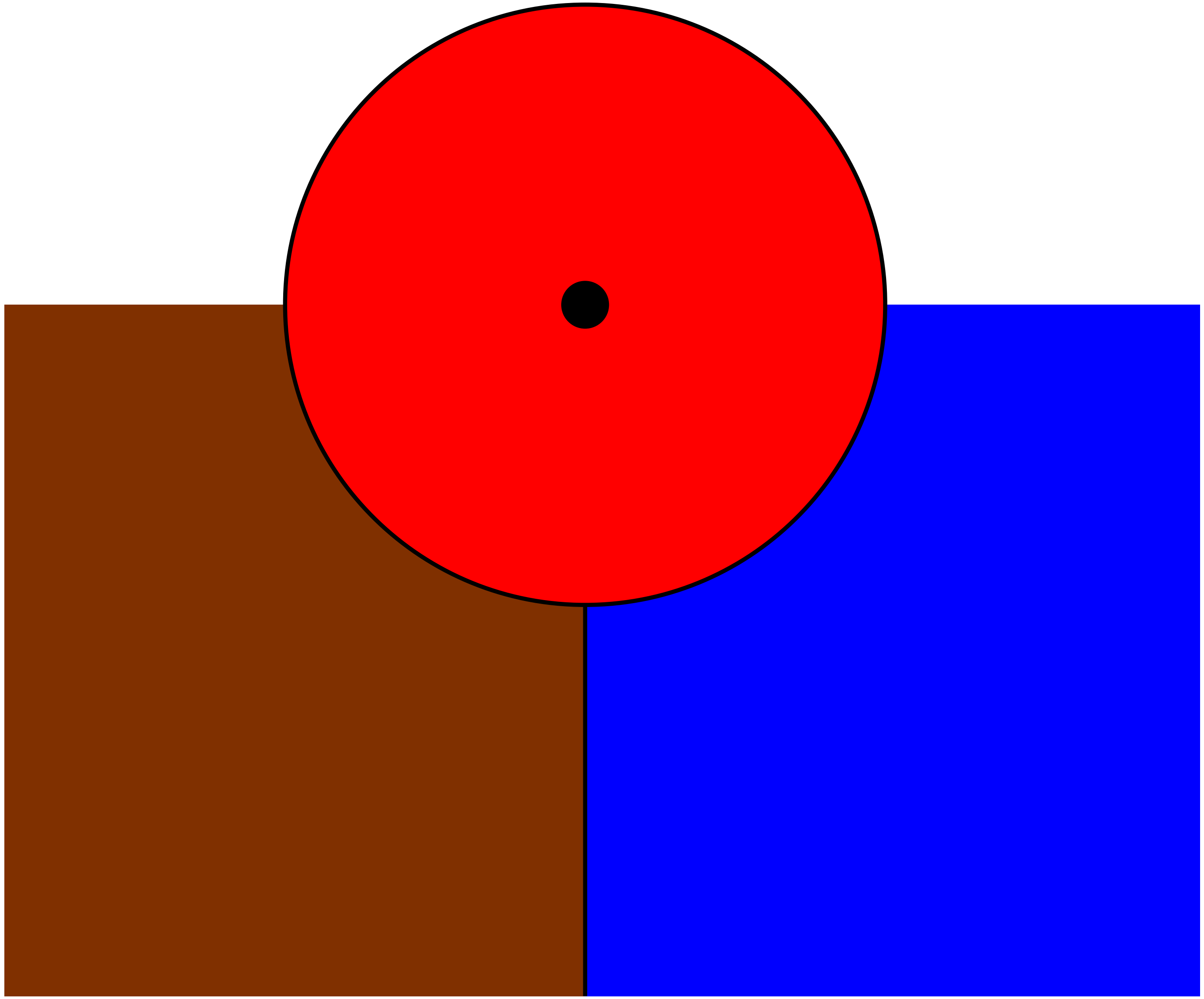
Już wiesz, *jak to jest*?

W szklance z wodą, pływa kostka lodu. Kostka powstała z zamrożenia takiej samej wody, jaką nalano do szklanki. Jak zmieni się poziom wody w szklance, gdy lód się roztopi?

A w atmosferze?



Znalazłem perpetuum mobile - co Ty na to?



Ach, te szczegóły...