Podstawy Fizyki - Wykład 4

Elektrostatyka:
Natężenie pola
Potencjał
Strumień pola
Prawo Gaussa

Piotr Nieżurawski

pniez@fuw.edu.pl

Wydział Fizyki

Uniwersytet Warszawski

http://www.fuw.edu.pl/~pniez/bioinformatyka/

Jak oddziałują ładunki?

W próżni zgodnie z prawem Coulomba siła, jaką działa punktowy ładunek Q na punktowy ładunek q, jest równa

$$\vec{F}_{qQ} = kQq\frac{\vec{r}}{r^3} \ ,$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem o początku w ładunku Q i końcu w ładunku q, a k jest stałą

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = c^2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2 \\ &\approx 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \end{aligned}$$

Co to jest natężenie pola elektrycznego?

Każdemu punktowi przestrzeni, w której znajduje się punktowy ładunek Q, przypisujemy wektor ***natężenia pola elektrycznego*** $\vec{E}_Q$ równy wektorowi siły, jaka działałaby na ładunek próbny q umieszczony w tym punkcie, podzielonemu przez q

$$\vec{E}_Q = \frac{\vec{F}_{qQ}}{q} = kQ\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$\vec{r}$ jest wektorem o początku w ładunku Q

Przykład - ***Natężenie niedaleko protonu***

Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego w odległości $r = 10^{-10}$ m od protonu.

Ładunek protonu $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

$$\begin{aligned} E_Q &= |\vec{E}_Q| = kQ\frac{1}{r^2} \\ &\approx 9 \cdot 10^9 \ \mathrm{Nm^2/C^2} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \ \mathrm{C} \cdot \frac{1}{10^{-20} \ \mathrm{m^2}} \\ &= 1{,}44 \cdot 10^{11} \ \mathrm{N/C} \end{aligned}$$

Co to jest potencjał pola elektrycznego?

W przypadku ruchu komety w polu grawitacyjnym Słońca wygodnie było wprowadzić funkcję $V(\vec{r})$, którą była „minus całka nieoznaczona z siły po przesunięciu” po ustaleniu stałej całkowania.

Wprowadźmy podobną funkcję zwaną *potencjałem pola elektrycznego*

$$\varphi_Q(\vec{r}) = -\int \vec{E}_Q \cdot d\vec{r}$$

$\vec{r}$ jest wektorem o początku w ładunku Q

Po podstawieniu jawnej postaci $\vec{E}_Q$ i obliczeniach

(szczegółowa dyskusja całki: Wykład 2)

$$\varphi_Q(\vec{r}) \;=\; -\int \vec{E}_Q \cdot d\vec{r} = -\int kQ\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{r}$$

$$=\; -kQ\int \frac{1}{r^2}\,dr = kQ\,\frac{1}{r} + C$$

Jak widać, potencjał nie jest jednoznacznie określony. Wartość **stałej całkowania** C można sobie wybrać.

W przypadku ładunku punktowego wygodnym wyborem jest $C = 0$.

Jak potencjał związany jest z energią potencjalną?

Ładunkowi punktowemu q przypisujemy energię potencjalną w polu ładunku punktowego Q

$$E_p(\vec{r}) = q\,\varphi_Q(\vec{r})$$

$$= kQq\frac{1}{r}$$

$\vec{r}$ jest wektorem o początku w ładunku Q

Przyjęliśmy, że bardzo daleko od Q (czyli $r \to \infty$) *energia potencjalna* jest równa 0,

a więc i *potencjał* jest tam równy 0, czyli wybraliśmy stałą całkowania $C = 0$.

Jak potencjał związany jest z pracą?

Podczas **przemieszczenia** ładunku punktowego q z $\vec{r}_1$ do $\vec{r}_2$

siły pola ładunku punktowego Q

wykonały **pracę** nad ładunkiem q równą

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{qQ} \cdot d\vec{r} \\ &= q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}_Q \cdot d\vec{r} \\ &= q\left(\varphi_{Q1} - \varphi_{Q2}\right) \\ &= kQq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \end{aligned}$$

Przykład - *Odepchnięty elektron*

Oblicz pracę sił pola ciężkiego jonu o wypadkowym ładunku $Q = -e$ podczas odpychania elektronu z odległości $r_1 = 1\ \mu$m do $r_2 = 1$ m.

Symbol e oznacza ładunek elementarny $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Ładunek elektronu to $(-e)$

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= q\left(\varphi_{Q1} - \varphi_{Q2}\right) \\ &= k(-e)(-e)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}) \\ &\approx 9 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2} \cdot (1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2 \cdot (\frac{1}{10^{-6}\ \mathrm{m}} - \frac{1}{1\ \mathrm{m}}) \\ &= 1{,}44 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{eV} = 2{,}3 \cdot 10^{-22}\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

Podsumowanie wymiarów i jednostek

Siła, $\vec{F}$: 1 N $= 1$ kg m/s^2

Natężenie pola elektrycznego, $\vec{E}$: 1 N/C

Praca i energia, $W,\ \ E$: 1 J $= 1$ N m

Potencjał pola elektrycznego, φ: 1 V $= 1$ J/C

Elektronowolt: 1 eV $= e \cdot 1$ V $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C $\cdot\, 1$ V $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J

Deszcz i beczka

Przez czas $T = 10$ h padał pionowo deszcz o natężeniu $j = 0{,}1$ kg/(m^{2}h).

Oblicz, ile wody zebrała stojąca pionowo beczka, której poziomy otwór ma powierzchnię $S = 1$ m^2.

Ile wody byłoby w beczce po tym samym deszczu, gdyby beczka była przechylona tak, że jej oś tworzyłaby kąt α z pionem?

Masa wody zebranej w pionowo stojącej beczce:

$$M = jST = 1\,\text{kg}$$

Jeśli beczkę przechylimy pod kątem α do pionu (otwór jest wtedy pod kątem α do poziomu), to powierzchnia otworu beczki „widziana” przez deszcz – czyli rzut tej powierzchni na płaszczyznę poziomą – będzie równa $S\cos\alpha$. A więc masa wody zebranej w przechylonej beczce:

$$M = jS\cos\alpha T = \cos\alpha \text{ kg}$$

Jeśli deszcz opiszemy wektorem $\vec{j}$ o zwrocie „do dołu”, to jego ***strumień*** przez powierzchnię S wyniesie

$$\vec{j}\cdot\vec{S}\ ,$$

gdzie $\vec{S}$ jest wektorem prostopadłym do powierzchni otworu beczki, o wartości S. Jeśli rozsądnie wybierzemy zwrot $\vec{S}$ – „od otworu do dna beczki” – to otrzymamy szybkość przyrostu masy wody w beczce.

Strumień - definicja

Strumień pola $\vec{A}$ przez powierzchnię S to

$$\Phi_A \equiv \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S},$$

gdzie $d\vec{S}$ jest *skierowanym elementem powierzchni* S. Kierunek $d\vec{S}$ jest prostopadły do powierzchni dS oraz $|d\vec{S}| = dS$. Zwrot elementu skierowanego ustalamy zależnie od potrzeb. Dla powierzchni zamkniętych najczęściej stosowana jest konwencja, w której zwrot $d\vec{S}$ jest **„na zewnątrz"** wydzielonej, skończonej objętości.

Dla powierzchni S podzielonej na małe fragmenty ΔS_i lub przybliżonej takimi fragmentami

$$\Phi_A = \sum_i \vec{A}_i \cdot \Delta\vec{S}_i,$$

Przykład - ***Strumień natężenia pola elektrycznego przez sferę***

Oblicz strumień natężenia pola elektrycznego przez sferę o promieniu R (orientacja sfery „na zewnątrz”). W środku sfery znajduje się punktowy ładunek Q.

Natężenie pola elektrycznego w odległości r od ładunku Q

$$\vec{E} = kQ\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Powierzchnię orientujemy na zewnątrz

$$\Delta\vec{S} = \Delta S\frac{\vec{r}}{r}$$

Strumień:

$$
\begin{aligned}
\Phi_E &= \oint_{S(0;R)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\
&= kQ \oint_{S(0;R)} \frac{1}{R^2}\, dS \\
&= kQ \frac{1}{R^2} \oint_{S(0;R)} dS \\
&= kQ \frac{1}{R^2}\, 4\pi R^2 \\
&= 4\pi kQ \\
&= Q/\varepsilon_0
\end{aligned}
$$

Strumień natężenia pola przez dowolną zamkniętą powierzchnię

Spróbujmy obliczyć strumień przez **dowolną zamkniętą powierzchnię**.

W pustej przestrzeni znajduje się punktowe źródło pola o natężeniu

$$\vec{E}(\vec{r}) = a\vec{r}/r^3 \ ,$$

gdzie a jest pewną stałą, a $\vec{r}$ wektorem położenia o początku w źródle pola.

Można pokazać, że strumień natężenia pola przez zamkniętą, otaczającą źródło powierzchnię **nie zależy od jej kształtu**.

Pomysł: Podziel przestrzeń na ostrosłupy o wierzchołkach w źródle pola.

Z dowolną wymaganą dokładnością przybliżam powierzchnię zbiorem N małych **trójkątów** (mogą być inne figury, ale trójkąty najlepiej przybliżają powierzchnię). Wierzchołki każdego trójkąta i źródło pola wyznaczają **ostrosłup**. Wszystkie ostrosłupy wypełniają objętość ograniczoną powierzchnią.

Strumień pola:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N} \vec{E}_k \cdot \vec{S}_k = a \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \cdot \vec{S}_k / r_k^3$$

Wektor $\vec{S}_k$ jest

- **prostopadły** do powierzchni,
- skierowany **na zewnątrz**,
- a jego **wartość** jest równa polu powierzchni małego fragmentu powierzchni (tutaj: trójkąta) o indeksie k.

Pole jest radialne i liczy się tylko pole powierzchni rzutu trójkąta na płaszczyznę prostopadłą do aktualnego $\vec{r}_k$, czyli

$$\vec{r}_k \cdot \vec{S}_k = r_k \, S_{\perp\, k}$$

Strumień:

$$\begin{aligned}\Phi &= a \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \cdot \vec{S}_k / r_k^3 \\ &= a \sum_{k=1}^{N} r_k \, S_{\perp\, k} / r_k^3 \\ &= a \sum_{k=1}^{N} S_{\perp\, k} / r_k^2\end{aligned}$$

Czyli mogliśmy od początku używać ostrosłupów, których podstawy są prostopadłe do wysokości.

Wyobraźmy sobie **modyfikację powierzchni** poprzez **skalowanie ostrosłupów** (wysokość się zmienia, pole podstawy się zmienia, ale kąty pozostają te same). Teraz zauważamy – powołując się na podobieństwo trójkątów – że pole podstawy ostrosłupa $S_{\perp\, k} \sim r_k^2$, czyli składnik sumy $S_{\perp\, k}/r_k^2$ pozostaje niezmieniony, co kończy dowód (r_k traktuję jako wysokość ostrosłupa).

Dla chętnych

Analogicznie pokazujemy, że punktowe źródło poza zamkniętą powierzchnią nie daje przyczynku do strumienia.

Ile wynosi strumień przez dowolną powierzchnię?

Otrzymaliśmy wynik dla sfery w przypadku pola elektrycznego, więc tyle samo otrzymamy dla dowolnej zamkniętej powierzchni otaczającej ładunek Q.

Obliczmy jeszcze raz strumień przez sferę o promieniu R (wtedy $r_k = R$), kontynuując rachunki dla „ogólnego" natężenia:

$$\begin{aligned} \Phi &= a \sum_{k=1}^{N} S_{\perp\, k}/r_k^2 \\ &= a \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^{N} S_{\perp\, k} \\ &= a \frac{1}{R^2} 4\pi R^2 \\ &= 4\pi a \end{aligned}$$

Wynik:

$$\Phi = 4\pi a$$

Dla pola grawitacyjnego $a = -GM$

Dla pola elektrycznego $a = Q/(4\pi\varepsilon_0)$

A jeśli jest kilka ładunków?

Rozważyliśmy strumień pola od punktowego źródła. Nasz wynik jest **prawdziwy** również dla **dowolnego układu ładunków** zamkniętego powierzchnią S dzięki temu, że siły (a więc i natężenia) zwyczajnie **dodajemy**, aby obliczyć wypadkową siłę.

$$\begin{aligned}\Phi &= \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i\right) \cdot d\vec{S} \\ &= \left(\sum_i Q_i\right)/\varepsilon_0 \\ &= Q_{tot}/\varepsilon_0\end{aligned}$$

Prawo Gaussa

Strumień natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ przez zamkniętą powierzchnię S otaczającą ładunki o całkowitej sumie Q_{tot} jest równy Q_{tot}/ε_0

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$= Q_{tot}/\varepsilon_0$$

Stała - ***przenikalność elektryczna próżni***

$$\varepsilon_0 \equiv \frac{10^7}{4\pi\, c^2} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}^2} \approx 9 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}$$