Warszawa, 2020–03–25

Zbiór zadań do zajęć *Podstawy fizyki* dla kierunku *Bioinformatyka i biologia systemów*

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Wybór: Piotr Nieżurawski
Uwagi proszę kierować na adres Piotr.Niezurawski@fuw.edu.pl

Gdy jestem pytany, dlaczego zajmuję się nauką, odpowiadam: aby zaspokoić moją ciekawość, gdyż jestem z natury poszukiwaczem zrozumienia. Jeśli nie zdziwiło cię coś przez cały dzień, to nie był on zbyt udany.

John A. Wheeler (1911–2008)

Zadania na sprawdzianach i egzaminach będą modyfikacjami zadań z tego zbioru. Zadanie za dodatkowe punkty może być spoza tego zestawu, choć na końcu zbioru zamieszczam przykłady. Zbiór jest udostępniony w czterech wersjach:
1) z samymi treściami zadań,
2) z treściami zadań i wskazówkami
2) z treściami zadań i odpowiedziami oraz
3) z treściami zadań, wskazówkami i odpowiedziami.
Taka też jest zalecana kolejność korzystania z wersji zbioru.
Na sprawdzianach i egzaminach należy posiadać kalkulator naukowy oraz niezapisane maturalne karty wzorów i stałych!

Kinematyka

1 Zadanie – Echo

Anna słyszy dwa jednakowe dźwięki oddzielnie, jako echo, jeśli docierają do niej w odstępie czasu nie mniejszym niż 90 ms. Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od pionowej ściany odbijającej dźwięk powinna znajdować się Anna, aby po klaśnięciu w dłonie usłyszała echo. Przyjmij wartość prędkości dźwięku w powietrzu 343 m/s.

Odpowiedź: Minimalna odległości od ściany to około 15,4 m.

2 Zadanie – Sztafeta żółwi

Pałeczka niesiona przez trzy żółwie poruszała się ze średnią szybkością 210 cm/s przez 11 minut. Pierwszy żółw niosący pałeczkę w sztafecie poruszał się z szybkością 230 cm/s przez 2,5 minuty, po czym natychmiast pałeczkę przejął drugi żółw poruszający się z szybkością 180 cm/s przez 4,5 minuty, a potem przekazał ją błyskawicznie trzeciemu żółwiowi. Z jaką średnią szybkością poruszał się trzeci żółw?

Odpowiedź: Średnia szybkość trzeciego żółwia to około 231 cm/s.

3 Zadanie – Koło ratunkowe

Wioślarz płynął łodzią w górę szerokiej, prostej i równomiernie płynącej rzeki. Gdy przepływał pod kładką, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po 18 min wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził koło w odległości 3000 m od kładki. Przyjmij, że wartość prędkości łodzi względem wody była stała i taka sama, gdy łódź płynęła w górę i gdy płynęła w dół rzeki. Załóż również, że koło od chwili, gdy wypadło z łodzi, nie poruszało się względem wody. Oblicz prędkość prądu rzeki względem brzegu w km/h.

Odpowiedź: Prędkość prądu rzeki to

$$v = \frac{s}{2t_1} = 5 \text{ km/h}$$

gdzie s – odległość koła od kładki, gdy dopędził je wioślarz, t_1 – czas od wypadnięcia koła do chwili, gdy wioślarz to zauważył i zawrócił.

4 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego

Oblicz prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego w chwili $t_1 = 4$ s, którego położenie na osi X jest opisane równaniem

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + B\, t^2$$

gdzie $A = 2{,}4$ m, $\omega = 1{,}3\ \text{s}^{-1}$, $\phi = 1{,}6$ oraz $B = 0{,}7\ \text{m/s}^2$.

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$v(t) = A\,\omega \cos(\omega t + \phi) + 2B\, t$$

$$v(t_1) \approx 8{,}31 \text{ m/s}$$

$$a(t) = -A\,\omega^2 \sin(\omega t + \phi) + 2B$$

$$a(t_1) \approx -0{,}604 \text{ m/s}^2$$

5 Zadanie – Prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego 3D

Punkt materialny porusza się w przestrzeni. W wybranym układzie kartezjańskim wektor położenia tego punktu jest równy

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} f_x t^2 + g_x t + h_x \\ g_y t + h_y \\ e_z t^3 + f_z t^2 + g_z t \end{bmatrix}$$

gdzie t oznacza czas, a wartości stałych wynoszą odpowiednio:

f_x	g_x	h_x	g_y	h_y	e_z	f_z	g_z
$-3\ \text{m/s}^2$	-2 m/s	11 m	4 m/s	-14 m	$1\ \text{m/s}^3$	$3\ \text{m/s}^2$	-4 m/s

Oblicz prędkość i przyśpieszenie tego punktu materialnego w chwili $t_1 = 2$ s.

Odpowiedź: Prędkość i przyśpieszenie:

$$\vec{v}(t_1) = \begin{bmatrix} -14 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \vec{a}(t_1) = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

6 Zadanie – Strzelec

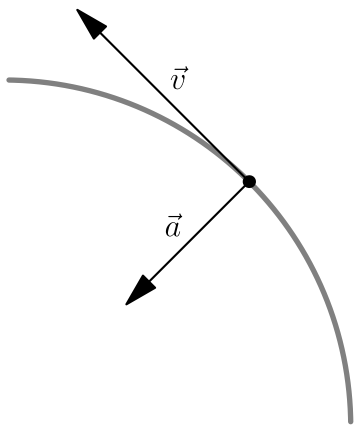
Antyterrorysta strzelił z poziomo ustawionego karabinu do pionowej tarczy oddalonej od niego o 170 m. Pocisk opuścił lufę z szybkością 970 m/s. Pomijając opory powietrza i przyjmując wartość przyśpieszenia ziemskiego 9,8 m/s^2, oblicz o ile opadł pocisk w pionie podczas lotu. Wynik wyraź w centymetrach.

Odpowiedź: Pocisk opadł o około 15 cm.

7 Zadanie – Na zakręcie

Samochód jedzie po łuku o promieniu 45 m ze stałą wartością prędkości 48,6 km/h.
a) Narysuj fragment toru samochodu, zaznacz jego przykładowe położenie i narysuj wektor jego prędkości oraz wektor jego przyśpieszenia, opisz elementy rysunku.
b) Oblicz wartość przyśpieszenia samochodu w m/s^2.

Odpowiedź: a) Wektor prędkości $\vec{v}$ jest styczny do toru, a wektor przyśpieszenia $\vec{a}$ jest skierowany do środka okręgu, po fragmencie którego porusza się samochód.



b) Wartość przyśpieszenia dośrodkowego to ok. 4,05 m/s^2.

Dynamika

8 Zadanie – Statek kosmiczny Zazula

W przestrzeni kosmicznej, z dala od innych ciał spoczywał w układzie inercjalnym statek międzygalaktyczny Zazula. Na skutek eksplozji rozpadł się na trzy części. Jedna część o masie $17{,}9 \cdot 10^3$ kg porusza się z szybkością 3,2 m/s. Druga część o masie $23{,}3 \cdot 10^3$ kg nadal spoczywa. Oblicz masę trzeciego fragmentu statku, jeśli jego szybkość jest równa 6,7 m/s.

Odpowiedź: Z zasady zachowania pędu układu, $\vec{p_0} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3}$, oraz z $\vec{p_0} = 0$ i $\vec{p_2} = 0$ otrzymujemy: $\vec{p_3} = -\vec{p_1}$. Obliczając wartość obu stron, $|\vec{p_3}| = |-\vec{p_1}|$, otrzymujemy równanie $p_3 = p_1$, czyli $m_3 v_3 = m_1 v_1$, co prowadzi do wyniku: $m_3 = m_1 v_1 / v_3 \approx 8{,}55 \cdot 10^3$ kg.

9 Zadanie – Spadochroniarz

Spadochroniarz wraz z wyposażeniem ma masę 142 kg i opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 5,2 m/s. Dzieje się to około 300 m nad poziomem morza, a przyśpieszenie ziemskie jest tam równe 9,8 m/s^2. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz z jego wyposażeniem.

Odpowiedź: Spadochroniarz porusza się z zerowym przyśpieszeniem, a więc wartość siły oporów ruchu jest równa wartości siły ciężkości skoczka: $Q = mg \approx 1390$ N.

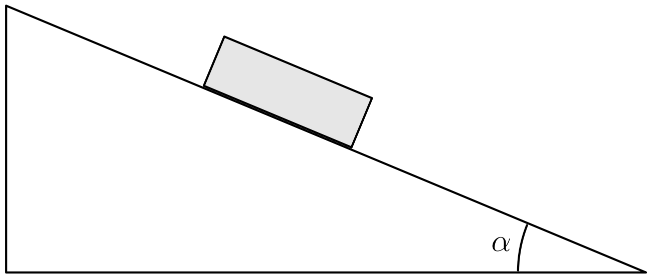
10 Zadanie – Kula w polu dwóch sił

Kula o masie 4 kg porusza się pod wpływem siły ciężkości oraz poziomo skierowanej, stałej siły elektrostatycznej. Wpływ innych sił jest pomijalny. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość siły elektrostatycznej to 48 N. Oblicz:
a) wartość wypadkowej siły działającej na kulę,
b) wartość przyśpieszenia kuli,
c) wartość prędkości kuli po czasie 5 s, zakładając, że początkowo znajdowała się ona w spoczynku.

Odpowiedź:
a) Wartość wypadkowej siły (po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa) to ok. 62 N.
b) Wartość przyśpieszenia to $a = F/m \approx 15{,}5$ m/s^2.
c) Wartość prędkości po czasie t to $v = at \approx 77{,}5$ m/s.

11 Zadanie – Równia pochyła (rysunek)

Po idealnie śliskiej, nieruchomej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 44°$ zsuwa się cegła o masie 4,2 kg. Oblicz przyśpieszenie cegły. Pomiń wpływ oporu powietrza. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Wartość kąta α na rysunku może być inna od podanej.



Odpowiedź: Cegła porusza się z przyśpieszeniem równoległym do równi o wartości $a = g \sin\alpha \approx 6{,}81$ m/s^2, w dół równi.

12 Zadanie – Rozpędzanie z oporem

Na lodowisku stoi łyżwiarz o masie 71 kg. Kolega rozpędza go, działając na łyżwiarza poziomą siłą o wartości 39 N na drodze 2,5 m. Wiedząc, że działająca na łyżwiarza pozioma siła oporu ma wartość 9 N, oblicz szybkość, z jaką łyżwiarz będzie się poruszać po rozpędzeniu.

Odpowiedź: Końcowa szybkość łyżwiarza o masie m będzie równa $v = \sqrt{2(F-T)S/m} \approx 1{,}45$ m/s.

13 Zadanie – Spacer z sankami

Dziecko ciągnie sanki ze stałą prędkością, po poziomym boisku, wzdłuż odcinka o długości 20 m. Oblicz pracę, jaką wykona ono przy ciągnięciu, jeśli siła napięcia sznurka wynosi 69 N i tworzy on kąt 25° z poziomem.

Odpowiedź: Dziecko wykona pracę równą $W = Fs\cos\alpha \approx 1250$ J.

14 Zadanie – Cegły z wykopaliska

Ilu studentów archeologii potrzeba, by wynieść 3100 cegieł z wykopaliska? Każda z cegieł ma masę 7 kg, a każdy student może wykonać pracę 40000 J, niosąc cegły samodzielnie albo w grupie. Każdą cegłę należy przenieść o 23 m wyżej w polu grawitacyjnym o natężeniu 9,8 N/kg.

Odpowiedź: Minimalna liczba studentów potrzebna do wniesienia cegieł to 123.

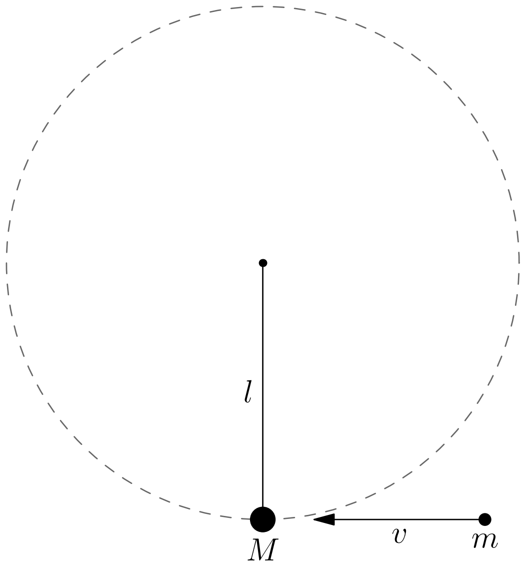
15 Zadanie – Wahadło

Kulkę o masie 60 dag zawieszoną na długiej, nierozciągliwej i bardzo lekkiej nici przymocowanej do nieruchomego zaczepu wychylono z położenia równowagi tak, że podniosła się ona na wysokość 3 cm. Nić cały czas była napięta. Po wypuszczeniu kulka wykonuje ruch wahadłowy. Zaniedbując opory ruchu, oblicz wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi. Przyjmij, że przyśpieszenie grawitacyjne jest równe 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Wartość prędkości kulki w momencie przechodzenia przez położenie równowagi to ok. 0,767 m/s.

16 Zadanie – Postrzelone wahadło

Metalowy ciężarek o masie $M = 309$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 54$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu zawartym w pionowej płaszczyźnie. W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości v pocisk o masie $m = 49$ g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny. Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu l w płaszczyźnie pionowej? Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2. Pomiń opory ruchu bryły.



Odpowiedź: Oznaczmy indeksem 1 prędkość bryły w najniższym punkcie okręgu, a przez 2 w najwyższym. Dodatkowo niech $\mu \equiv m + M$. Otrzymujemy układ równań:

$$mv = \mu v_1$$

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g 2l$$

$$\frac{v_2^2}{l} = g$$

Rozwiązaniem jest $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{5gl} \approx 37{,}6$ m/s.

17 Zadanie – Przyśpieszenie planety

Oblicz wartość przyśpieszenia, z jakim porusza się planeta MLMC wokół gwiazdy PRPL. Przyjmij, że MLMC i PRPL są punktami materialnymi o masach odpowiednio $8{,}84 \cdot 10^{24}$ kg i $3{,}09 \cdot 10^{30}$ kg, a planeta porusza się ze stałą szybkością w odległości $420 \cdot 10^{6}$ km od gwiazdy. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym. Wpływ innych ciał jest nieistotny.

Odpowiedź: Planeta porusza się z przyśpieszeniem o wartości $a = GM/r^2 \approx 1{,}17 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.

18 Zadanie – Naturalny satelita

Oblicz promień kołowej orbity naturalnego satelity o masie $82 \cdot 10^{3}$ kg okrążającego w czasie 63,4 h jednorodną planetę o masie $765 \cdot 10^{22}$ kg. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Odpowiedź: Promień orbity jest równy $r = \sqrt[3]{GMT^2/(4\pi^2)} \approx 87{,}6 \cdot 10^{3}$ km.

19 Zadanie – Dwie gwiazdy

Gwiazda A ma masę M_A, a gwiazda B masę M_B. Gdy były w odległości d_1 od siebie, ich szybkości w pewnym układzie inercjalnym wynosiły odpowiednio v_{A1} oraz v_{B1}. Gwiazdy oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany. Wyznacz szybkość gwiazdy A w chwili, gdy odległość między gwiazdami wzrosła do d_2, jeśli szybkość gwiazdy B była wtedy równa v_{B2}. Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_A = 3 \cdot 10^{30}$ kg, $M_B = 9 \cdot 10^{30}$ kg, $v_{A1} = 43$ km/s, $v_{B1} = 28$ km/s, $d_1 = 6 \cdot 10^{11}$ m, $v_{B2} = 24$ km/s, $d_2 = 11 \cdot 10^{11}$ m. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Odpowiedź: Szybkość gwiazdy A w chwili końcowej

$$v_{A2} = \sqrt{v_{A1}^2 + (v_{B1}^2 - v_{B2}^2)M_B/M_A + 2GM_B(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1})}$$

$$\approx 39{,}5 \text{ km/s}$$

20 Zadanie – Ciężarek na lince

Przymocowany do linki ciężarek o bardzo małych rozmiarach rozkręcono tak, że w czasie 0,82 s zakreśla okrąg o promieniu 130 cm. Linkę można skracać, wyciągając ją w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się ciężarek. Oblicz okres obiegu tego ciężarka po okręgu, jeśli promień okręgu zostanie zmniejszony do 78 cm. Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu.

Odpowiedź: Okres obiegu po zmniejszeniu promienia z r_1 do r_2 jest równy $T_2 = T_1 \cdot (r_2/r_1)^2 \approx$ 0,295 s.

Płyny, ciepło

21 Zadanie – Przyssawka

Oblicz maksymalną masę odważnika, który może wisieć przyczepiony do okrągłej przyssawki przylegającej do poziomego sufitu. Średnica przyssawki jest równa 35 cm. Przyjmij, że między przyssawką a sufitem jest próżnia, ciśnienie atmosferyczne jest równe 1028 hPa, a przyśpieszenie ziemskie 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Maksymalna masa odważnika jest równa ok. 1010 kg.

22 Zadanie – Pod wodą

Oblicz ciśnienie wody działające na nurka znajdującego się na głębokości 30 m. Przyjmij gęstość wody 1012 kg/m^3 oraz natężenie pola grawitacyjnego 9,8 N/kg.

Odpowiedź: Ciśnienie wody jest równe ok. 298 kPa. Jeśli chcesz uwzględnić ciśnienie atmosferyczne, to należy dodać ok. 100 kPa.

23 Zadanie – Kula w cieczy

Pełna kula wykonana z materiału o gęstości 1900 kg/m^3 pływa w cieczy o gęstości 2300 kg/m^3. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz stosunek objętości tej części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli.

Odpowiedź: Stosunek objętości części kuli, która znajduje się powyżej powierzchni cieczy, do objętości całej kuli jest równy $1 - d_b/d_l \approx 0{,}174$.

24 Zadanie – Wąż ogrodowy

Gumowy wąż ogrodowy o wewnętrzej średnicy 13 mm zakończony jest otworem o średnicy 3 mm. Z jaką szybkością wylatuje woda z otworu, jeśli w wężu porusza się ona z szybkością 50 cm/s?

Odpowiedź: Szybkość wody w otworze to ok. 939 cm/s.

25 Zadanie – Parowanie wody

Do naczynia zawierającego 0,3 kg wody włożono grzałkę o mocy 900 W, a następnie doprowadzono wodę do wrzenia. Ile wody wyparowało w ciągu 2 minut wrzenia? Przyjmij, że ciepło parowania wody wynosi 2270 kJ/kg.

Odpowiedź: Wyparowało 47,6 g wody.

26 Zadanie – Lodowiec

Oszacuj masę stopionego lodu z lodowca, który zsunął się i zatrzymał w dolinie. Początkowo lodowiec spoczywał na wysokości 399 m nad doliną i miał masę $14 \cdot 10^9$ kg. Załóż, że energia tracona przez zsuwający się lodowiec i spływającą wodę powstałą podczas topnienia lodowca powoduje dalsze topnienie lodu. Przyjmij ciepło topnienia lodu 334 kJ/kg. Przyśpieszenie ziemskie w miejscu zdarzenia jest równe 9,8 m/s^2.

Odpowiedź: Masa stopionego lodu to około $m_i = m_0\, g\, h/l \approx 160 \cdot 10^6$ kg, gdzie m_0 jest początkową masą lodowca, h zmianą wysokości lodowca, l ciepłem topnienia lodu, a g wartością przyśpieszenia ziemskiego. Oszacowanie to m.in. zakłada, że h jest zmianą wysokości środka masy lodowca razem z powstałą z niego wodą.

Elektryczność, obwody

27 Zadanie – Łamigłówka z elektrostatyki

Do dyspozycji masz uziemienie oraz trzy jednakowe metalowe kule, dwie z nich naładowane są ładunkiem Q, a trzecia ładunkiem $-Q$. Otrzymaj na jednej z nich ładunek $\frac{3}{8}Q$. Możesz łączyć kule ze sobą oraz z uziemieniem.

Odpowiedź: Najszybsza droga do uzyskania na jednej kuli ładunku o wartości $\frac{3}{8}Q$:

I połączenie kul o ładunkach Q i $-Q$

II połączenie kul o ładunkach 0 i Q

III połączenie kul o ładunkach $\frac{1}{2}Q$ i 0

IV połączenie kul o ładunkach $\frac{1}{2}Q$ i $\frac{1}{4}Q$

V i w ten sposób uzyskaliśmy ładunek $\frac{3}{8}Q$.

Uwaga! Za każdym razem łączymy kule na tyle długo, aby uzyskać taki sam ładunek na obydwu kulach.

28 Zadanie – Natężenie pola elektrycznego

Oblicz wartość natężenia pola elektrycznego w odległości 13 nm od jądra atomowego o liczbie atomowej 9. Opisz również kierunek i zwrot wektora natężenia pola elektrycznego względem jądra. Pomiń wpływ innych obiektów. Przyjmij, że ładunek protonu jest równy $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, jego masa to $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg, a stała Coulomba wynosi $8{,}988 \cdot 10^{9}$ $\mathrm{Nm^2/C^2}$.

Odpowiedź: Wartość natężenia pola elektrycznego $|\vec{E}| = kne/r^2 \approx 76{,}7 \cdot 10^6$ N/C, gdzie n jest liczbą atomową, e ładunkiem protonu, a k stałą elektryczną. Kierunek wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ jest taki sam jak prosta przechodząca przez jądro i punkt, w którym określamy pole. Zwrot $\vec{E}$ jest *od jądra.*

29 Zadanie – Przyciągnięty elektron

Oblicz pracę siły elektrostatycznej ciężkiego jonu o wypadkowym ładunku $+6e$, gdzie e jest ładunkiem protonu, podczas przyciągania elektronu z odległości 3 mm do 4 nm. Przyjmij, że elektron na początku i na końcu procesu spoczywa. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

Odpowiedź: Praca

$$W_{1\to2} = -k\,n\,e\,e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \approx 2{,}16 \text{ eV} \approx 346 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

gdzie $n = +6$.

30 Zadanie – Praca nad ładunkiem w polu dipola elektrycznego

Oblicz pracę, jaką wykonała zewnętrzna siła, przemieszczając proton po półokręgu w polu trwałego, nieruchomego dipola elektrycznego o wartości momentu dipolowego $5 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo proton spoczywał na symetralnej dipola w odległości 1,9 nm od tego dipola. Na końcu proton również spoczywał na symetralnej dipola, ale w odległości 3,4 nm od tego dipola i po jego drugiej stronie.

Odpowiedź: Praca zewnętrznej siły jest równa 0.

31 Zadanie – Obrót molekuły w polu innej cząsteczki

Oblicz, ile energii zostanie przekazane otoczeniu, gdy molekuła posiadająca moment dipolowy o wartości $1{,}9 \cdot 10^{-30}$ Cm ustawi się tak, by jej moment dipolowy był skierowany przeciwnie do momentu dipolowego drugiej, unieruchomionej molekuły znajdującej się w odległości 1,5 nm. Wartość momentu dipolowego drugiej molekuły jest równa $15{,}7 \cdot 10^{-30}$ Cm. Początkowo momenty dipolowe są ustawione równolegle i mają zgodne zwroty. Momenty dipolowe są prostopadłe do wektora względnego położenia molekuł. Przyjmij, że molekuły są trwałymi dipolami punktowymi. Energia potencjalna dwóch dipoli punktowych jest równa

$$E_p = k\left(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3\frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r}\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{r}}{r}\right)\frac{1}{r^3}$$

gdzie k jest stałą elektryczną, $\vec{p}_i$ momentem dipolowym, a $\vec{r}$ wektorem względnego położenia dipoli. Korzystając z tego wzoru, uzasadnij, które jego składowe są istotne w rozważanym problemie. Wynik wyraź w elektronowoltach oraz w dżulach.

Odpowiedź: Energia przekazana otoczeniu

$$W_{A\to B} = E_{pA} - E_{pB} = 2\,k\,p_1\,p_2/r^3 \approx 992\ \mu\text{eV} \approx 1590 \cdot 10^{-25}\ \text{J}$$

32 Zadanie – Alarm samochodowy

Przez pewien alarm samochodowy w trybie czuwania przepływa prąd o średnim natężeniu 35 mA. Oblicz ładunek, który przepłynął przez ten układ w trakcie 23 dób. Wynik podaj w kulombach i amperogodzinach.

Odpowiedź: Przepłynął ładunek równy $Q = It \approx 19{,}3$ Ah ≈ 69600 C.

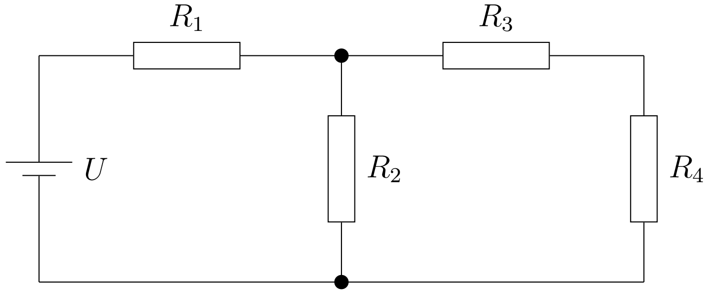
33 Zadanie – Opornik

Gdy przez opornik płynął stały prąd o natężeniu 20 mA, napięcie mierzone między końcówkami opornika było równe 0,56 V.
a) Oblicz opór opornika.
b) Zakładając, że opornik spełnia prawo Ohma, oblicz natężenie prądu płynącego przez opornik, gdy napięcie mierzone między jego końcówkami jest równe 4,48 V.

Odpowiedź:
a) Opór $R = U_1/I_1 = 28\ \Omega$.
b) Natężenie prądu $I_2 = U_2/R = I_1U_2/U_1 = 160$ mA.

34 Zadanie – Napięcie na oporniku – obwód 3

Oblicz spadek napięcia na oporniku R_4 w poniższym obwodzie, jeśli $R_1 = 9\ \Omega$, $R_2 = 14\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 9\ \Omega$, $U = 17$ V.



Odpowiedź: Spadek napięcia na oporniku R_4 to

$$U_4 = U \frac{R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)/R_2 + R_1}$$

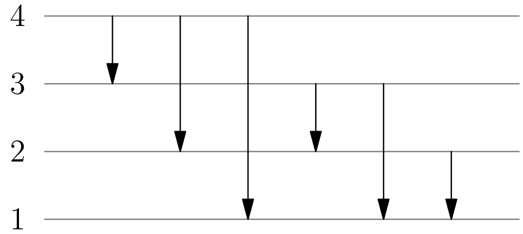
Dla podanych wartości $U_4 \approx 3{,}8$ V.

Fizyka kwantowa

35 Zadanie – Wzbudzone atomy wodoru

Próbka składa się z wielu atomów wodoru, a każdy z nich na początku znajduje się w stanie wzbudzonym o głównej liczbie kwantowej $n = 4$.
a) Narysuj schemat przedstawiający poziomy energetyczne atomu wodoru wraz z wartościami odpowiadającej im głównej liczby kwantowej n (odległości między poziomami mogą być dowolne). Zaznacz na rysunku wszystkie możliwe bezpośrednie i pośrednie przejścia elektronów, których skutkiem jest emisja fotonu z atomów próbki.
b) Oblicz liczbę linii emisyjnych, które można zaobserwować, mierząc promieniowanie badanej próbki.
c) Napisz, dla którego przejścia emitowane fotony mają najmniejszą częstotliwość spośród wszystkich emitowanych przez próbkę.

Odpowiedź:
a) Schemat poziomów i przejść (odległości między poziomymi liniami nie odzwierciedlają rzeczywistych odległości między poziomami):



b) Można zaobserwować 6 linii.
c) Przejście z poziomu 4 na poziom 3.

36 Zadanie – Liczby kwantowe atomu wodoru

Opisz wszystkie kombinacje liczb kwantowych orbitalnej l i magnetycznej m określające możliwe stany elektronu w atomie wodoru, jeśli wiadomo, że elektron znajduje się w stanie o głównej liczbie kwantowej $n = 5$.

Odpowiedź: Możliwe stany to:
$l = 0$ z $m \in \{0\}$
$l = 1$ z $m \in \{-1, 0, 1\}$
$l = 2$ z $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$l = 3$ z $m \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$l = 4$ z $m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

37 Zadanie – Gęstość prawdopodobieństwa w atomie wodoru

Dla każdego ze stanów opisanych następującymi funkcjami falowymi oblicz gęstość prawdopodobieństwa znalezienia elektronu na jądrze atomu wodoru:
a)

$$\Psi_{100}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$

b)

$$\Psi_{210}(x,y,z) = \frac{z}{4\sqrt{2\pi}a_0^{5/2}} e^{-r/(2a_0)}$$

gdzie $a_0 \approx 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m. Wyniki podaj w jednostkach nm^{-3}. Funkcje falowe określone są w układzie kartezjańskim XYZ, jądro spoczywa w środku tego układu, a r jest odległością od środka układu do punktu (x,y,z).

Odpowiedź:

a)

$$|\Psi_{100}(0{,}0{,}0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} \approx 2150 \text{ nm}^{-3}$$

b)

$$|\Psi_{210}(0{,}0{,}0)|^2 = 0 \text{ nm}^{-3}$$

38 Zadanie – Liczba fotonów

Impuls monochromatycznego światła o długości fali 610 nm w próżni padł na ciemną płytkę, która pochłania 79% energii padającego na nią promieniowania. Oblicz liczbę fotonów w tym impulsie, jeśli wiadomo, że na skutek oświetlenia energia płytki zwiększyła się o 35 mJ. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s i stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s.

Odpowiedź: Liczba fotonów w impulsie $n = E_i/E_\gamma = E_{\text{abs}}/(\varepsilon_{\text{eff}} E_\gamma) \approx 1360 \cdot 10^{14}$.

39 Zadanie – Efekt fotoelektryczny

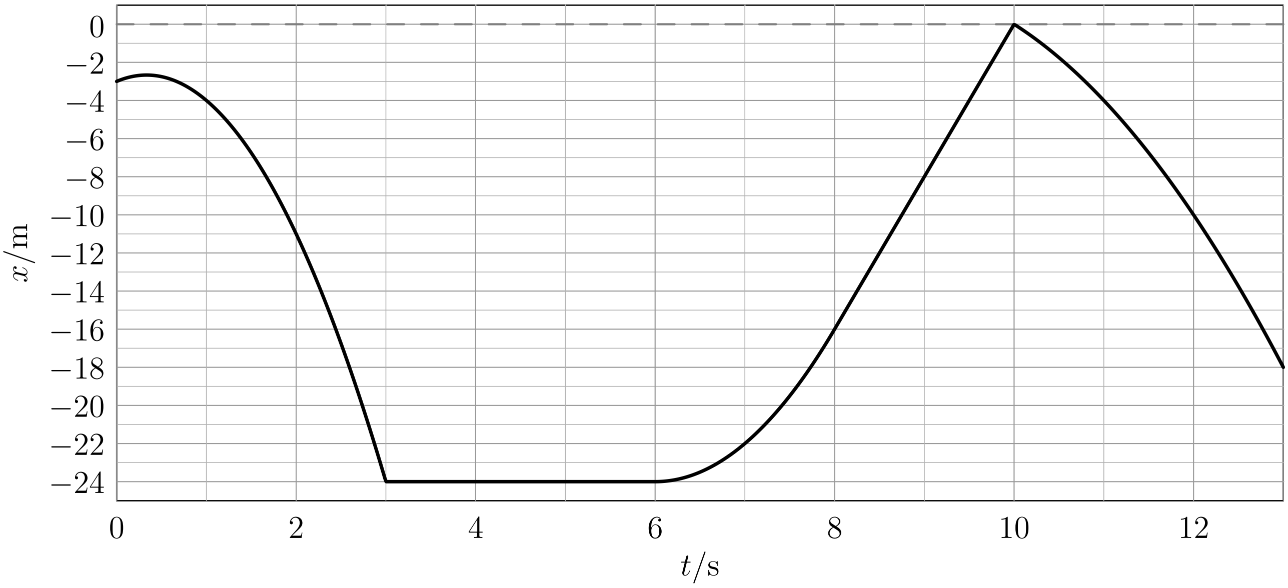
Metalową płytkę oświetlono promieniowaniem elektromagnetycznym o długości fali 250 nm. Maksymalna energia kinetyczna wybijanych z płytki elektronów jest równa 1,89 eV. Oblicz pracę wyjścia elektronu z powierzchni tego metalu. Wynik podaj w eV. Przyjmij wartości: prędkości światła w próżni $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, ładunku elementarnego $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, stałej Plancka $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s $= 4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV · s.

Odpowiedź: Praca wyjścia $W = E_\gamma - E_k \approx 3{,}07$ eV.

Zadania dodatkowe, nieobowiązkowe!

40 Zadanie – Niezdecydowany punkt materialny

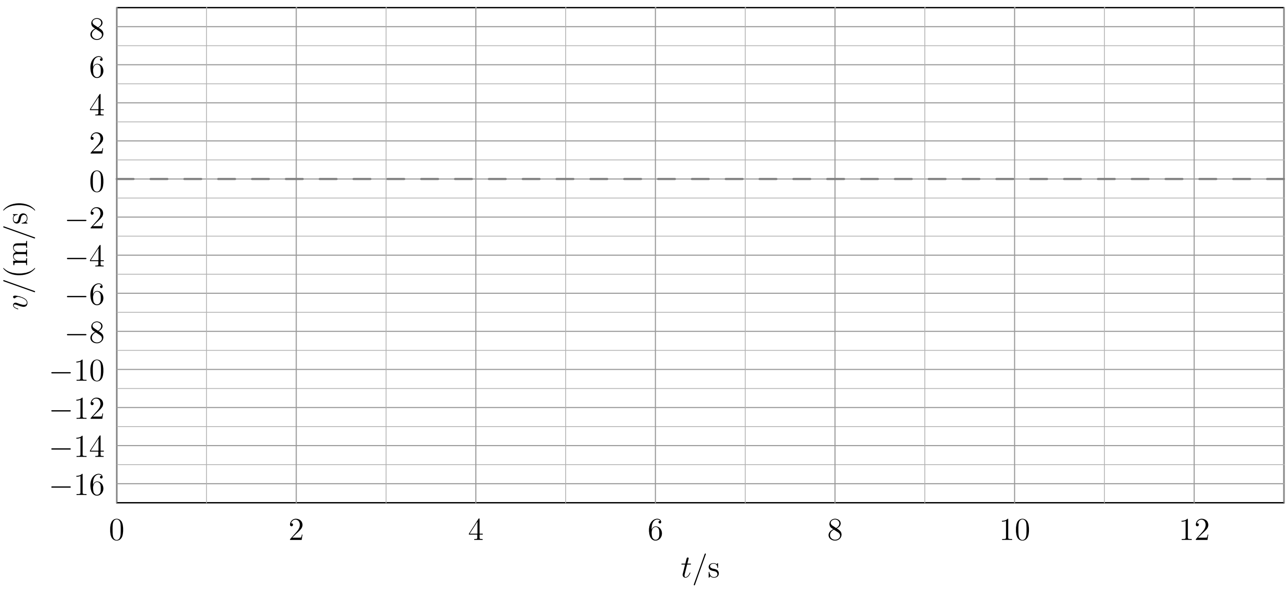
Punkt materialny porusza się wzdłuż osi X. Na wykresie przedstawiono zależność jego położenia x od czasu t.



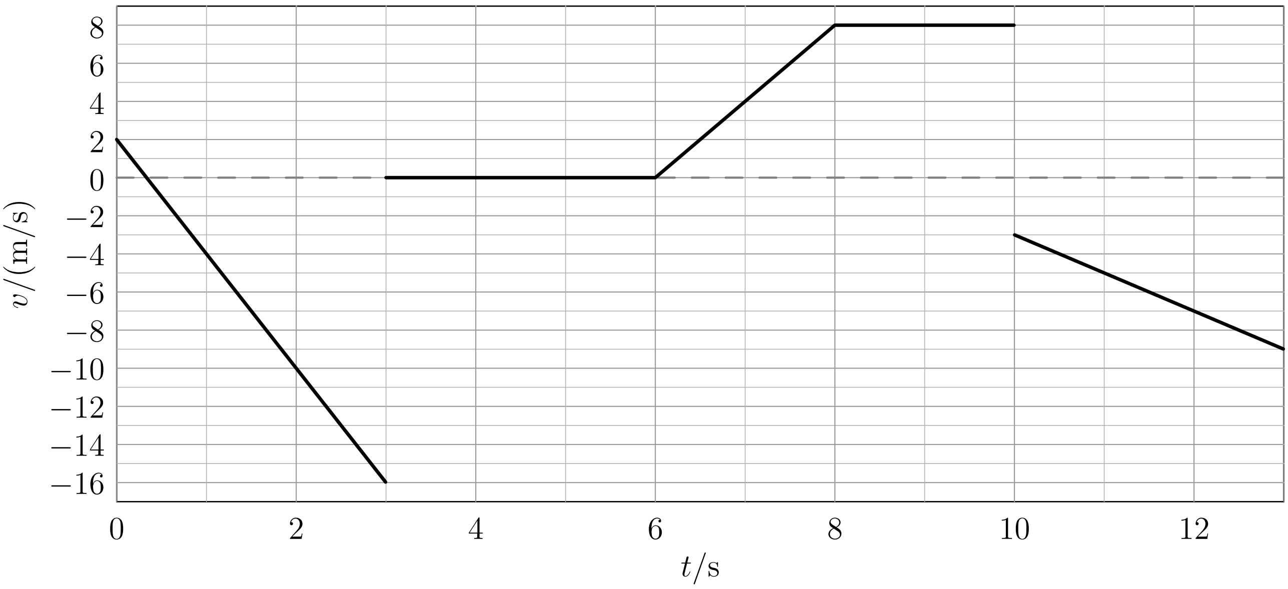
W tabeli podano przyśpieszenie a punktu materialnego w poszczególnych interwałach czasu.

t/s	$[0,3[$	$]3,6[$	$]6,8[$	$]8,10[$	$]10,13]$
$a/(\mathrm{m/s^2})$	-6	0	4	0	-2

Wykonaj wykres zależności prędkości v od czasu dla tego punktu materialnego dla $t \in [0, 13]$ s.



Odpowiedź: Poprawny wykres:



41 Zadanie – Przecięcie torów?

Mały, metalowy ciężarek wisi na bardzo lekkim sznurku. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku masy ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej. Udowodnij, że tor ciężarka, gdy porusza się on po takim okręgu, nie przecina się z torem, po jakim poruszałby się, gdyby sznurek zwolniono w momencie, gdy ciężarek znajduje się w najwyższym punkcie okręgu. Pomiń opory ruchu.

Odpowiedź:

I sposób – graniczna wartość v.

Minimalna wartość prędkości v_m spełnia równanie $v_m^2 = gl$. Równanie paraboli w tym przypadku można przekształcić do postaci $x^2 = 2l(l-y)$. Po wstawieniu tego wyniku do równania okręgu otrzymujemy równanie $2l(l-y) + y^2 = l^2$, a ono sprowadza się do $(l-y)^2 = 0$, a więc ostatecznie jest tylko jeden podwójny pierwiastek $y_{1,2} = l$. Oznacza to, że parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$, ale go nie przecina. Wystarczy rozpatrzyć ruch z minimalną wartością prędkości v_m, gdyż dla większych wartości prędkości v parabola jest położona nie bliżej okręgu niż parabola dla wartości prędkości v_m. Sprawdzenie: $l - \frac{g}{2v^2}x^2 \geq l - \frac{g}{2v_m^2}x^2$ prowadzi do warunku $v \geq v_m$.

II sposób – równanie na y.

Oznaczenie: $A \equiv \frac{2v^2}{g}$. Z równania paraboli otrzymujemy $x^2 = A(l-y)$. Z równania okręgu, $A(l-y) + y^2 = l^2$, otrzymujemy $(l-y)(l+y-A) = 0$. Równanie to ma pierwiastek $y_1 = l$, czyli punkt $(0, l)$ jest wspólny dla paraboli i okręgu . Drugi pierwiastek, $y_2 = A - l$, powininen też mieścić się w zakresie dopuszczalnych wartości y dla punktów okręgu, czyli $y \in [-l, l]$. Stąd $A \in [0, 2l]$, a więc $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $y_2 = y_1 = l$. W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

III sposób – równanie na x.

Oznaczenie: $B \equiv \frac{g}{2v^2}$. Równanie paraboli: $y = l - Bx^2$. Z równania okręgu, $x^2 + (l - Bx^2)^2 = l^2$, otrzymujemy $x^2(1 - 2lB + B^2x^2) = 0$. Równanie to ma podwójny pierwiastek $x_{1,2} = 0$, czyli parabola styka się z okręgiem w punkcie $(0, l)$. Drugi pierwiastek, $x_2 = \pm\sqrt{2lB - 1}/B$, istnieje, jeśli $2lB - 1 \geq 0$, czyli gdy $v^2 \leq gl$. Wymagamy jednak $v^2 \geq gl$. W przypadku równości otrzymujemy $x_{3,4} = 0$ (czyli równanie ma jeden czterokrotny pierwiastek). W przypadku nierówności ostrej nie ma drugiego pierwiastka, a więc nie ma innych punktów wspólnych okręgu i paraboli.

42 Zadanie – Wiewiórka na stacji kosmicznej

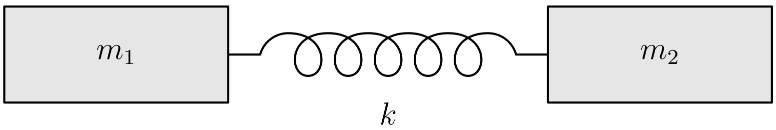
Wiewiórka o masie m odbiła się od ściany stacji kosmicznej i leci w pomieszczeniu wypełnionym powietrzem. Wyprowadź zależność prędkości v wiewiórki od czasu t, jeśli na początku miała ona prędkość v_0 w układzie stacji. Na wiewiórkę działa jedynie siła oporu powietrza o wartości kv^2, gdzie k jest stałą.

Odpowiedź:

$$v = \frac{1}{v_0^{-1} + bt} = \frac{1}{v_0^{-1} + \frac{k}{m}t}$$

43 Zadanie – Dwa ciężarki połączone sprężyną

Wyznacz okres drgań układu składającego się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 połączonych bardzo lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k. Rozważ tylko drgania, przy których sprężyna nie wygina się na boki. Pomiń wpływ innych ciał. Uzyskaj również wynik liczbowy dla $k = 47$ N/m, $m_1 = 3$ kg oraz $m_2 = 6$ kg.



Odpowiedź: Okres drgań będzie równy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$$

Wynik liczbowy $T \approx 1{,}3$ s.

44 Zadanie – Kosmiczny walc

Dwa kuliste, jednorodne obiekty o masach M_a oraz M_b wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. W układzie inercjalnym, w którym środek układu spoczywa, okres tego ruchu wynosi T. Obiekty oddziałują ze sobą jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.
a) Oblicz odległość pomiędzy środkami tych obiektów oraz promienie ich orbit.
b) Uprość wyniki w przypadku, gdy $M_a/M_b \to 0$, oraz w przypadku, gdy $M_a = M_b$.
c) Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $M_a = 36 \cdot 10^{22}$ kg, $M_b = 66 \cdot 10^{22}$ kg oraz $T = 860$ h. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Odpowiedź: a) Dla odległości między środkami obiektów $d \equiv r_a + r_b$, gdzie r_a i r_b są promieniami orbit, druga zasada dynamiki prowadzi do równań:

$$v_a^2/r_a = GM_b/d^2$$

$$v_b^2/r_b = GM_a/d^2$$

gdzie v_a i v_b oznaczają szybkości ciał. Ponieważ $v_i = 2\pi r_i/T$, otrzymujemy

$$r_a/M_b = \alpha d^2$$

$$r_b/M_a = \alpha d^2$$

gdzie $\alpha \equiv GT^2/(4\pi^2)$. Prawe strony równań są identyczne, więc $r_a M_a = r_b M_b$ (jak inaczej uzyskać to równanie?). Eliminujemy z pierwszego równania r_b i uzyskujemy wyniki

$$r_a = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_b}{(1 + M_a/M_b)^2}}$$

$$r_b = r_a M_a/M_b = \sqrt[3]{\frac{\alpha M_a}{(1 + M_b/M_a)^2}}$$

$$d = r_a + r_b = \sqrt[3]{\alpha(M_a + M_b)}$$

b) W przypadku $M_a/M_b \to 0$:

$$r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

$$r_b = 0$$

$$d = r_a = \sqrt[3]{\alpha M_b}$$

W przypadku, gdy $M \equiv M_a = M_b$

$$r_a = r_b = \sqrt[3]{\alpha M/4}$$

$$d = 2r_a = \sqrt[3]{2\alpha M}$$

c) Wyniki liczbowe: $r_a \approx 165 \cdot 10^3$ km, $r_b \approx 89{,}9 \cdot 10^3$ km, $d \approx 255 \cdot 10^3$ km.

45 Zadanie – Tunel średnicowy

Oblicz szybkość, z jaką poruszałaby się jednoosobowa kapsuła w odległości 3800 km od środka planety RBRTHK w tunelu wydrążonym wzdłuż jej średnicy. Przyjmij, że planeta RBRTHK jest jednorodną kulą, jej masa jest równa $8{,}08 \cdot 10^{24}$ kg, a jej promień 7300 km. Kapsuła porusza się tylko pod wpływem pola grawitacyjnego planety, a na początku podróży, na powierzchni planety spoczywała. Zmiany pola grawitacyjnego wynikające z wydrążenia tunelu oraz opory ruchu są pomijalne. Stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. Zagadnienie rozważ w układzie inercjalnym, w którym planeta spoczywa.

Odpowiedź: Korzystam z zasady zachowania energii $E_{k2} - E_{k1} = W_{1\to 2}$, gdzie E_{k2} jest energią kinetyczną kapsuły na końcu, E_{k1} energią kinetyczną kapsuły na początku (tu równą 0), a $W_{1\to 2}$ pracą siły grawitacji nad kapsułą od położenia początkowego do końcowego. Siła grawitacji w planecie $\vec{F}(r) = -GMm\frac{r}{R^3}\frac{\vec{r}}{r}$, gdzie M jest masą planety, R jej promieniem, m masą kapsuły, a $\vec{r}$ wektorem położenia o początku w środku planety. Praca

$$W_{1\to 2} = \int_R^r \vec{F}(r') \cdot d\vec{r}\,' = -\int_R^r F(r')\, dr' = -\frac{GMm}{R^3}\int_R^r r'\, dr' = \frac{1}{2}GMm(R^2 - r^2)/R^3$$

Oczywiście $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$, gdzie v jest poszukiwaną szybkością. Ostatecznie

$$v = \sqrt{GM(R^2 - r^2)/R^3} \approx 7340 \text{ m/s}$$

46 Zadanie – Ołów, lód i woda

Kulę o masie 7,5 kg wykonaną ze stopu ołowiu zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego pojemnika, którego poziome dno ma powierzchnię 0,35 m^2. Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie, cześciowo zanurzona. Gęstość użytego stopu ołowiu jest równa 10300 kg/m^3, a gęstość wody 1000 kg/m^3. Lód, z którego zbudowana jest lodowa kula, powstał z zamrożenia takiej samej wody, jaka znajduje się w pojemniku. Cały układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym. Oblicz, o ile zmieni się wysokość poziomu wody w pojemniku, gdy lód stopnieje. Napisz, czy poziom wody w pojemniku się podniesie, obniży, czy się nie zmieni.

Odpowiedź: Wysokość lustra wody zmieni się o

$$\Delta h = m_p \left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_w} \right) \frac{1}{S} \approx -19{,}4 \text{ mm}$$

gdzie S to pole powierzchni dna pojemnika. A więc poziom wody w pojemniku się obniży.