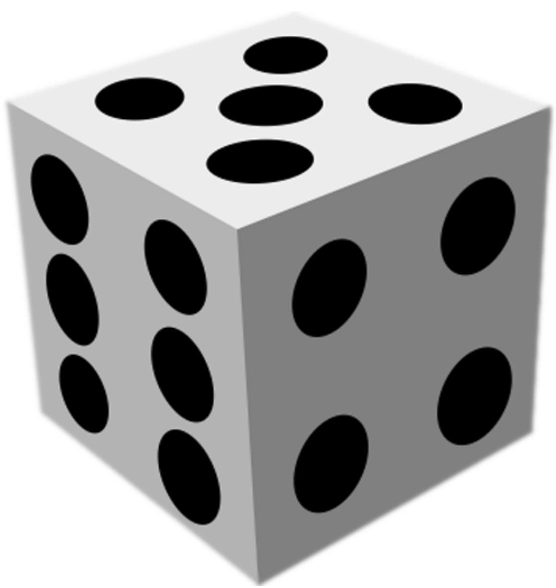
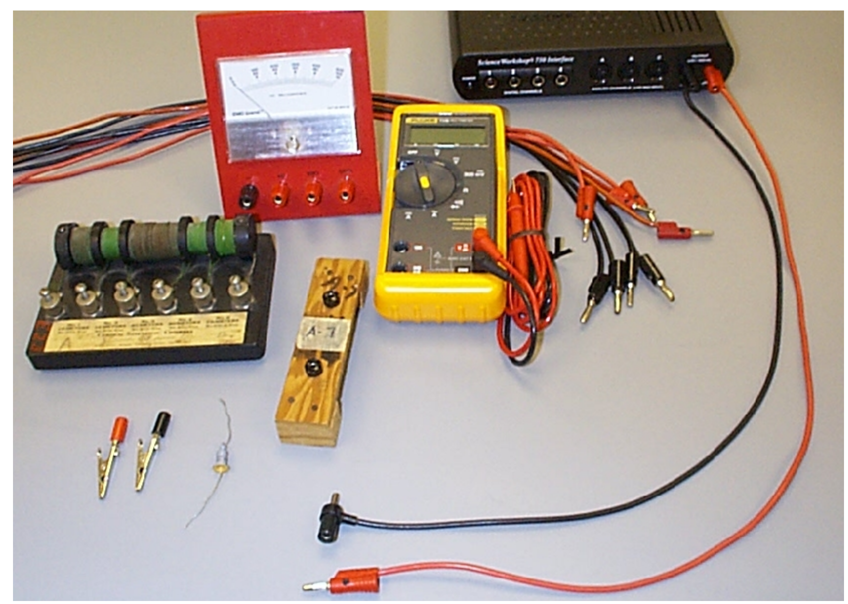
Zmienna losowa

- <u>Intuicyjnie</u>: zmienna, która konkretną wartość przyjmuje dopiero w chwili wykonania pomiaru lub eksperymentu





Zmienna losowa

- Bardziej formalnie: funkcja, która **zdarzeniom elementarnym** przyporządkowuje wyniki pomiaru lub eksperymentu

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- Ω to zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, czyli wszystkich możliwych przebiegów eksperymentu —

  każde $\omega \in \Omega$ jest tak samo „prawdopodobne”

Przykład

- Losujemy liczbę naturalną z zakresu od 1 do 10 a następnie bierzemy jej wartość modulo 4
- $|\Omega| = 10$
- Zmienna losowa X jest funkcją taką, że
  - $X(\omega_1) = X(\omega_5) = X(\omega_9) = 1$
  - $X(\omega_2) = X(\omega_6) = X(\omega_{10}) = 2$
  - $X(\omega_3) = X(\omega_7) = 3$
  - $X(\omega_4) = X(\omega_8) = 0$

Prawdopodobieństwo

- Na przestrzeni zdarzeń elementarnych mamy określoną miarę prawdopodobieństwa, która
  - każdemu podzbiorowi $V \subset \Omega$ przyporządkuje wartość $P(V) \in [0;1]$ w taki sposób, że
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ o ile $A \cap B = \emptyset$
- z czego wynika np.

  $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$

Przykład c.d.

- Dla naszego zbioru zdarzeń elementarnych Ω
  - $P(\{\omega_1\}) = 1/10$
  - $P(\{\omega_3,\omega_4\}) = 2/10$
  - etc…
- Czyli ogólnie
  - $P(A) = |A| / |\Omega|$

Rozkład prawdopodobieństwa

- Z <u>każdą</u> zmienną losową *X* możemy stowarzyszyć rozkład prawdopodobieństwa P_X

$$P_X(A)=P(X\in A)=P(X^{-1}(A))$$

- Przykład: dla naszej zmiennej losowej X, ile wynosi $P_X(\{1,2\})$?
  - Ile wynosi $X^{-1}(\{1,2\})$?
    - wartości 1 jest przyjmowana dla $\omega_1,\omega_5,\omega_9$,
    - a wartość 2 dla $\omega_2,\omega_6,\omega_{10}$,
    - Zatem $X^{-1}(\{1,2\}) = \{\omega_1,\omega_5,\omega_9,\omega_2,\omega_6,\omega_{10}\}$
  - Czyli $P_X(\{1,2\}) = P(\{\omega_1,\omega_5,\omega_9,\omega_2,\omega_6,\omega_{10}\}) = 6 / 10$

Zmienna losowa dyskretna

- Zmienną losową nazywamy dyskretną, jeśli da się ją opisać przez
  funkcję (masy) prawdopodobieństwa, np.

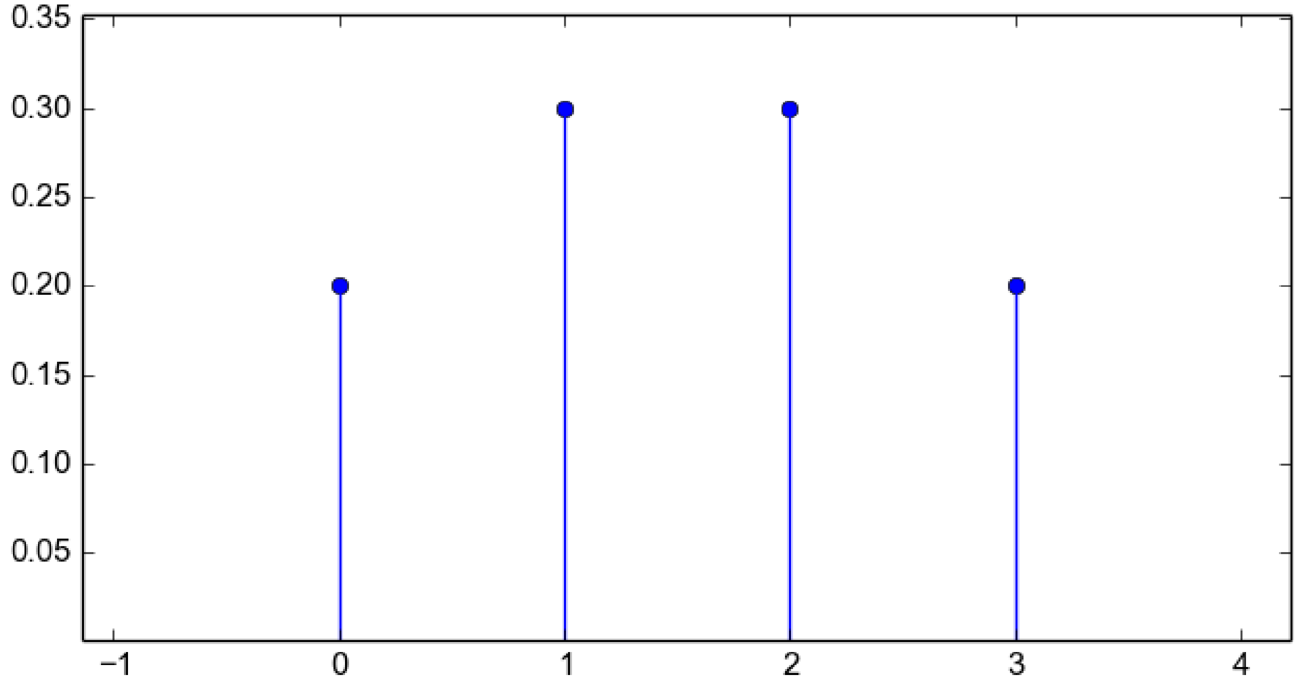
wartość	prawdopodobieństwo (pmf)
0	0.2
1	0.3
2	0.3
3	0.2

- Na podstawie p.m.f. możemy zdefiniować rozkład prawdopodobieństwa

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} pmf(x)$$

Zmienna losowa dyskretna

- Funkcję (masy) prawdopodobieństwa możemy też narysować:



$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} pmf(x)$$

Zmienna losowa ciągła

- Zmienną losową nazywamy ciągłą, jeśli da się ona opisać przez
funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f_X(x)$, taką, że
$$P_X(A) = \int_{x \in A} f_X(x)\, dx$$
- Przykład: losujemy liczbę rzeczywistą z zakresu od 0 do 2, wtedy
  - f(x) = ½ na przedziale [0;2]
  - f(x) = 0 poza tym przedziałem

Uwaga: dla zbiorów A miary 0 (np. skończonych) i zmiennych ciągłych $P_X(A) = 0$

Dystrybuanta

- Zarówno dla zmiennej losowej ciągłej, jak i dyskretnej, możemy zdefiniować dystrybuantę

$$F_X(x_0) = P_X((-\infty, x_0]) = P(X \leq x_0)$$

- Dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$F_X(x_0) = \sum_{x \leq x_0} pmf_X(x)$$

- Dla zmiennej losowej ciągłej:

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx$$

Dystrybuanta c.d.

- Na podstawie dystrybuanty możemy obliczyć:
  - Dla zmiennej losowej dyskretnej, funkcję (masy) prawdopodobieństwa:

$$pmf_X(x_0) = P(X = x_0) = F_X(x_0) - \lim_{x \to x_{0^-}} F_X(x)$$

  - Dla zmiennej losowej ciągłej, funkcję gęstości prawdopodobieństwa

$$f_X(x_0) = \frac{dF_X}{dx}(x_0)$$