TEORIA TOMITY-TAKESAKEGO WEGŁUG RIEFFELA-VAN DAELE'A

PIOTR MIKOŁAJ SOŁTAN

Contents

Początek

Niniejsze notatki prezentują część wyników z pracy M.A. Rieffel, A. Van Daele: "A bounded operator approach to Tomita-Takesaki theory", *Pac. J. Math.* **69** No. 1 (1977), 187–221. Zawęzimy zaintersowanie do tak zwanej "teorii Tomity-Takesakiego dla stanów". Ponadto zamienimy część konwencji stosowanych w omawianej pracy. W szczególności iloczyny skalarne w przestrzeniach Hilberta nad $\mathbb{C}$ będą zawsze liniowe względem *drugiego* argumentu. W wielu rozumowaniach autorzy pracy badają przedłużenia holomorficzne pewnych funkcji zdefiniowanych na $\mathbb{R}$ na dolna półpłaszczyznę (lub jej część). My będziemy raczej stosowali przedłużenia holomorficzne na górną półpaszczyznę.

W naszej prezentacji wyników wspomnianej wyżej pracy skocystamy z wygodnej notacji związanej z teorią spektralną operatorów na przestrzeniach Hilberta. Jeśli H jest (zespoloną) przestrzenią Hilberta, a A operatorem samosprzężonym na H, to dla rzeczywistej stałej c symbol $\chi(A > c)$ będzie oznaczał rzut ortogonalny na podprzestrzen spektralną A wyznaczoną przez podzbiór $]c, +\infty[\subset \mathbb{R}$. Analogicznie symbolem $H(A > c)$ będziemy oznaczać obraz tego rzutu.

1. Para podprzstrzeni w rzeczywistej przestrzeni Hilberta

Niech $\mathscr{H}$ będzie przestrzenią Hilberta nad $\mathbb{R}$ i niech $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ będzie parą domknietych podprzestrzeni $\mathscr{H}$ takich, że

- $\mathscr{K} \cap \mathscr{L} = \{0\}$,
- podprzestrzeń $\mathscr{K} + \mathscr{L}$ jest gęsta w $\mathscr{H}$.

Taka para podprzestrzeni definiuje następujące operatory:

- P — rzut ortogonalny na $\mathscr{K}$,
- Q — rzut ortogonalny na $\mathscr{L}$,
- $R = P + Q$,
- $X = P - Q$.

Date: Październik 2011.

Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski.

Uwaga 1.1. Operator X jest injektywny: załóżmy, że $X\xi = 0$. Oznacza to, że $P\xi = Q\xi$, a więc $P\xi = Q\xi = 0$. Warunek $P\xi = 0$ oznacza, że $\xi \in \mathscr{K}^\perp$, a $Q\xi = 0$ oznacza $\xi \in \mathscr{L}^\perp$. Stąd $\xi \in (\mathscr{K} + \mathscr{L})^\perp = \{0\}$.

Niech
$$X = JT$$
będzie rozkładem biegunowym operatora X. Operator T jest dodatni (a więc samosprzężony), a J jest ortogonalny, tj. $J^*J = JJ^* = \mathbb{1}$, ponadto $J^2 = \mathbb{1}$. Zauważmy też, że T jest injektywny oraz X, T i J są przemienne (bo X jest samosprzężony, a więc J i T są funkcjami od X).

Stwierdzenie 1.2.

(1) *Mamy* $0 \leq R \leq 2\mathbb{1}$ *oraz* $\ker R = \ker(2\mathbb{1} - R) = \{0\}$*;*
(2) $T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}$*;*
(3) J *jest ortogonalnym operatorem samosprzężonym, a co za tym idzie* $J^2 = \mathbb{1}$*;*
(4) T *jest przemienny z* P*,* Q*,* R *i* J*;*
(5) *mamy*
$$\begin{aligned} JP &= (\mathbb{1} - Q)J, \\ JQ &= (\mathbb{1} - P)J, \\ JR &= (2\mathbb{1} - R)J. \end{aligned}$$

Dowód. Ad (1). Mamy oczywiście $R = P + Q \leq 2\mathbb{1}$ i $R \geq 0$. Załóżmy, że $R\xi = 0$. Wówczas mamy
$$\|P\xi\|^2 + \|Q\xi\|^2 = (\xi|P\xi) + (\xi|Q\xi) = (\xi|R\xi) = 0.$$
Zatem $P\xi = Q\xi$ i tak jak w uwadze 1.1 mamy $\xi = 0$.

Rozważmy parę $(\mathscr{L}^\perp, \mathscr{K}^\perp)$. Para ta spełnia te same warunki, co para $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$. Istotnie:

- jeśli $\xi \in (\mathscr{L}^\perp \cap \mathscr{K}^\perp)$, to $\xi \perp (\mathscr{K} + \mathscr{L})$, a więc $\xi = 0$,
- jeśli $\xi \perp (\mathscr{L}^\perp + \mathscr{K}^\perp)$, to $\xi \perp \mathscr{L}^\perp$ i $\xi \perp \mathscr{L}^\perp$, a stąd $\xi \in \mathscr{K} \cap \mathscr{L} = \{0\}$; innymi słowy podprzestrzeń $\mathscr{L}^\perp + \mathscr{K}^\perp$ jest gęsta w $\mathscr{H}$.

Teraz zauważmy, że przejście od $(\mathscr{K}, \mathscr{L})$ do $(\mathscr{L}^\perp, \mathscr{K}^\perp)$ zamienia R na $2\mathbb{1} - R$. W szczególności $\ker(2\mathbb{1} - R) = \{0\}$.

Ad (2). Mamy
$$T^2 = TJ^*JT = X^*X = (P - Q)(P - Q) = P - PQ - QP + Q$$
oraz
$$\begin{aligned} R(2\mathbb{1} - R) = (P + Q)(2\mathbb{1} - P - Q) &= 2P + 2Q - P - PQ - QP - Q \\ &= P - PQ - QP + Q, \end{aligned}$$
czyli $T^2 = R(2\mathbb{1} - R)$, a co za tym idzie
$$T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}.$$

Ad (3). Cały ten punkt był już omówiony — jest on konsekwencją procedury rozkładu biegunowego.

Ad (4). T komutuje z J. Komutuje też z R, bo jest funkcją tego operatora. T komutuje też z X, więc musi komutoważ z X. Skoro komutuje z X i R, to komutuje z P i Q.

Ad (5). Pamiętając, że T komutuje z P obliczamy
$$JPT = JTP = XP = (P - Q)P = P - QP = (\mathbb{1} - Q)(P - Q) = (I - Q)X = (\mathbb{1} - Q)JT$$
czyli $JP = (\mathbb{1} - Q)J$ na obrazie T. Obraz ten jest gęsty, bo $\ker T = \{0\}$ i $T^* = T$. Stąd
$$JP = (\mathbb{1} - Q)J. \tag{1}$$
Biorąc sprzężenia obu stron (1) otrzymujemy $PJ = J(\mathbb{1} - Q)$ czyli
$$JQ = (\mathbb{1} - P)J. \tag{2}$$
Wreszcie
$$JR = J(P + Q) = (\mathbb{1} - Q)J + (\mathbb{1} - P)J = (2\mathbb{1} - P - Q)J = (2\mathbb{1} - R)J.$$

□

Uwaga 1.3. Z punktu (5) stwierdzenia 1.2 wynika, że $J\mathscr{K} = \mathscr{L}^\perp$ i $J\mathscr{L} = \mathscr{K}^\perp$. Istotnie, weźmy $\xi \in \mathscr{K}$. Wówczas $J\xi = JP\xi = (\mathbb{1} - Q)J\xi \in \mathscr{L}^\perp$, co pokazuje, że $J\mathscr{K} \subset \mathscr{L}^\perp$. Natomiast przepisując korzystając ze wzoru $JQ = (\mathbb{1} - P)J$ przepisanego jako $J(\mathbb{1} - Q) = PJ$ dla $\eta' \in \mathscr{L}^\perp$ otrzymujemy $J\eta' = J(\mathbb{1} - Q)\eta' = PJ\eta'$, czyli $J\mathscr{L}^\perp \subset \mathscr{K}$. Równość $J\mathscr{K} = \mathscr{L}^\perp$ dostajemy korzystając z tożsamości $J^2 = \mathbb{1}$. Dokładnie tak samo otrzymujemy $J\mathscr{L} = \mathscr{K}^\perp$.

1.1. **Charakteryzacja operatora J.**

Stwierdzenie 1.4. *J jest jedynym operatorem takim, że*
- *J jest samosprzężony i ortogonalny,*
- *$J\mathscr{K} = \mathscr{L}^\perp$,*
- *$(\xi|J\xi) \geq 0$ dla wszystkich $\xi \in \mathscr{K}$,*
- *$(\eta|J\eta) \leq 0$ dla wszystkich $\eta \in \mathscr{L}$.*

Dowód. Wiemy już, że J spełnia dwa pierwsze warunki. Dalej

$$PJP = P(JP) = P(\mathbb{1} - Q)J = P(P - Q)J = PXJ = PT.$$

Operatory P i T są dodatnie i przemienne, więc $PT \geq 0$, czyli $PJP \geq 0$. To znaczy dokładnie, że

$$(\xi|J\xi) \geq 0$$

dla wszystkich $\xi \in \mathscr{K}$.

Podobnie

$$QJQ = (QJ)Q = J(\mathbb{1} - P)Q = J(Q - P)Q = -JXP = -TQ \leq 0,$$

co daje

$$(\eta|J\eta) \leq 0$$

dla wszystkich $\eta \in \mathscr{L}$.

Niech teraz I spełnia
- $I = I^* = I^{-1}$,
- $I\mathscr{K} = \mathscr{L}^\perp$,
- $(\xi|I\xi) \geq 0$ dla wszystkich $\xi \in \mathscr{K}$,
- $(\eta|I\eta) \leq 0$ dla wszystkich $\eta \in \mathscr{L}$.

Wówczas

$$IP = (\mathbb{1} - Q)I, \tag{3}$$

oraz $PIP \geq 0$ i $QIQ \leq 0$. Równanie (3) można przepisać jako $QI = I(\mathbb{1} - P)$, co po sprzężeniu daje

$$IQ = (\mathbb{1} - P)I. \tag{4}$$

Korzystając z (3) i (4) mamy:

$$JIP = J(\mathbb{1} - Q)I = PJI,$$
$$JIQ = J(\mathbb{1} - P)I = QJI,$$

czyli JI komutuje z P i Q. Zatem JI komutuje również z $X = P - Q$ i $R = P + Q$, a więc i z $T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}$. Musi zatem komutować także z J:

$$JIJ = JJI = I$$

(bo $JI\,JT = JIX = XJI = JT\,JI = J\,JI\,T$, a obraz T jest gęsty). Mnożąc powyższe równanie z prawej przez J otrzymujemy

$$JI = IJ.$$

Teraz zauważamy, że

$$\begin{aligned} JI \cdot RT = RTJI &= RXI \\ &= (P + Q)(P - Q)I = (P - PQ + QP - Q)I \\ &= \big(P(\mathbb{1} - Q) - Q(\mathbb{1} - P)\big)I \\ &= P(\mathbb{1} - Q)I - Q(\mathbb{1} - P)I = PIP - QIQ \geq 0. \end{aligned}$$

Teraz jednoznaczność rozkladu biegunowego (dodatniego operatora $JIRT$) pokazuje, że $JI = \mathbb{1}$, czyli $I = J$. $\square$

2. Jedna rzeczywista podprzestrzeń zespolonej przestrzeni Hilberta

Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta. H jest również rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\Re\,(\cdot|\cdot)$. Niech $\mathscr{K}$ będzie rzeczywistą domkniętą podprzestrzenią H taką, że

- $\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K} = \{0\}$,
- podprzestrzeń $\mathscr{K} + \mathrm{i}\mathscr{K}$ jest gęsta w H.

Para $(\mathscr{K}, \mathrm{i}\mathscr{K})$ definiuje ograniczone $\mathbb{R}$-liniowe operatory

$$P, Q, R, X, J, T$$

na H.

Stwierdzenie 2.1. *Operatory R i T są $\mathbb{C}$-liniowe,*

$$0 \leq R \leq 2\mathbb{1}, \qquad , T \geq 0, \tag{5}$$

natomiast operator J jest antyliniowy i samosprzężony (jako operator antyliniowy), tj.

$$(\xi|J\eta) = (\eta|J\xi)$$

dla wszystkich $\xi, \eta \in H$.

Uwaga 2.2. Niech φ będzie antyliniowym funkcjonałem na zespolonej przestrzeni wektorowej X. Wówczas φ jest wyznaczony jednoznacznie przez swoją częśc rzeczywistą, gdyż z jednej strony, dla $x \in X$

$$\varphi(\mathrm{i}x) = -\mathrm{i}\varphi(x) = -\mathrm{i}\big((\Re\varphi)(x) + \mathrm{i}(\Im\varphi)(x)\big) = (\Im\varphi)(x) - \mathrm{i}(\Re\varphi)(x),$$

a z drugiej

$$\varphi(\mathrm{i}x) = (\Re\varphi)(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}(\Im\varphi)(\mathrm{i}x).$$

Zatem $(\Im\varphi)(x) = (\Re\varphi)(\mathrm{i}x)$ dla wszystkich $x \in X$. Jeśli $(\cdot|\cdot)$ jest iloczynem skalarnym na X, to kładąc $\varphi(x) = (x|y)$ dla pewnego ustalonego y mamy

$$(x|y) = \varphi(x) = (\Re\varphi)(x) + \mathrm{i}(\Im\varphi)(x) = \Re\,(x|y) + \mathrm{i}(\Re\varphi)(\mathrm{i}x) = \Re\,(x|y) + \mathrm{i}\Re\,(\mathrm{i}x|y)\,.$$

Tak więc iloczyn skalarny z ustalonym wektorem wyraża się przez część rzeczywistą iloczynu skalarnego.

Dowód stwierdzenia 2.1. P jest rzutem na $\mathscr{K}$ (ortogonalnym względem $\Re\,(\cdot|\cdot)$), a Q jest rzutem na $\mathrm{i}\mathscr{K}$. Zatem $P = \mathrm{i} \circ Q \circ \mathrm{i}^{-1}$ i $P = \mathrm{i}^{-1} \circ Q \circ \mathrm{i}$. Zatem $\mathrm{i}P = Q\mathrm{i}$ oraz $P\mathrm{i} = \mathrm{i}Q$. Stąd

$$\mathrm{i}R = \mathrm{i}P + \mathrm{i}Q = Q\mathrm{i} + P\mathrm{i} = R\mathrm{i}.$$

Dalej $T = f(R)$, gdzie $f(r) = \sqrt{r(2-r)}$ ($r \in [0,2]$), więc T także jest $\mathbb{C}$-liniowy (jako normowa granica wielomianów od R).

Pokażemy teraz, że $R = R^*$ w sensie sprzężenia względem zespolonego iloczynu skalarnego na H. Pamiętamy, że R jest samosprzężony dla $\Re\,(\cdot|\cdot)$, a więc dla dowolnych $\xi, \eta \in H$

$$\begin{aligned}(\xi|R\eta) &= \Re\,(\xi|R\eta) + \mathrm{i}\Re\,(\mathrm{i}\xi|R\eta) = \Re\,(R\xi|\eta) + \mathrm{i}\Re\,(R\mathrm{i}\xi|\eta) = \Re\,(R\xi|\eta) + \mathrm{i}\Re\,(\mathrm{i}R\xi|\eta)\\ &= \Re\,(R\xi|\eta) + \mathrm{i}\Re\big(-\mathrm{i}\,(R\xi|\eta)\big) = \Re\,(R\xi|\eta) + \mathrm{i}\Im\,(R\xi|\eta) = (R\xi|\eta)\,.\end{aligned}$$

Teraz, skoro $(\xi|R\xi) = (R\xi|\xi)$, mamy $(\xi|R\xi) = \Re\,(\xi|R\xi) \geq 0$, czyli $R \geq 0$ w C^*-algebrze $\mathrm{B}(H)$. Tak samo pokazujemy $T \geq 0$ oraz, że $2\mathbb{1} - R \geq 0$ w $\mathrm{B}(H)$, czyli nierówności (5) są spełnione w $\mathrm{B}(H)$.

Operator X jest antyliniowy:

$$\mathrm{i}X - \mathrm{i}(P-Q) = Q\mathrm{i} - P\mathrm{i} = -(P-Q)\mathrm{i} = -X\mathrm{i}.$$

Skoro $T = JX$, operator J musi być antyliniowy.

Ponadto J jest samosprzężony dla iloczynu skalarnego $\Re(\cdot|\cdot)$. Zatem, na mocy uwagi 2.2

$$\begin{aligned}(\xi|J\eta) &= \Re(\xi|J\eta) + \mathrm{i}\Re(\mathrm{i}\xi|J\eta) = \Re(J\xi|\eta) + \mathrm{i}\Re(J\mathrm{i}\xi|\eta) = \Re(J\xi|\eta) - \mathrm{i}\Re(\mathrm{i}J\xi|\eta)\\ &= \Re(J\xi|\eta) - \mathrm{i}\Re\big(-\mathrm{i}\,(J\xi|\eta)\big) = \Re(J\xi|\eta) + \mathrm{i}\Re\big(\mathrm{i}\,(J\xi|\eta)\big)\\ &= \Re(J\xi|\eta) - \mathrm{i}\Im(J\xi|\eta) = \overline{(J\xi|\eta)} = (\eta|J\xi)\,.\end{aligned}$$

□

Wiemy już, że J jest operatorem antyliniowym i samosprzężonym. Ponieważ $J^2 = \mathbb{1}$, mamy

$$JJ^* = J^*J = \mathbb{1}.$$

Operatory takie nazywamy *antyunitarnymi*.

Przypominamy, że operator R spełnia $0 \leq R \leq 2\mathbb{1}$ oraz $\ker R = \ker(2\mathbb{1} - R) = \{0\}$.

3. Grupa modularna

Definicja 3.1. Dla $t \in \mathbb{R}$ definiujemy $\Delta^{\mathrm{i}t} = R^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1} - R)^{-\mathrm{i}t}$.

Analizując własności odwozorwania

$$t \longmapsto R^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1} - R)^{-\mathrm{i}t}$$

można wykazać, że istnieje dodatni i samosprzężony operator Δ na H taki, że $R^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1}-R)^{-\mathrm{i}t} = \Delta^{\mathrm{i}t}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ (twierdzenie Stone'a). Dla nas jednak sam operator Δ nie będzie istotny. Będziemy jednak uzywali oznaczenia “$\Delta^{\mathrm{i}t}$”, aby pozostać w zgodzie z tradycją teorii Tomity-Takesakiego.

Dygresja 3.2. Niech $A \in \mathrm{B}(H)$ będzie operatorem dodatnim o zerowym jądrze. Dla $z \in \mathbb{C}$ takiego, że $\Im z \leq 0$ definiujemy $F(z) = A^{\mathrm{i}z}$. Innymi słowy $F(z) = f_z(A)$, gdzie f_z jest funkjcą ciągłą na $\operatorname{Sp} A$ daną wzorem:

$$f_z(r) = \exp\big(\mathrm{i}z\log(r)\big)$$

dla $r > 0$ (ponieważ $\ker A = \{0\}$, wartość f_z w punkcie $r = 0$ jest nieistotna). Funkcja F ma następujące własności:

(1) jest mocna ciągła i (normowo) ograniczona poziomych paskach o skończonej szerokości,
(2) jest analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z < 0\}$.

Na początek zauważmy, że dla $r > 0$ mamy

$$\big|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\log(r)}\big| = r^{-\Im z},$$

a więc $\big\|F(z)\big\| \leq \|A\|^{-\Im z}$ (czyli w szczególności $F(z) \in \mathrm{B}(H)$) i funkcja F jest ograniczona na poziomych paskach skończonej szerokości. Weźmy $\xi \in H$, $\varepsilon > 0$. Operator $A_\varepsilon = A\big|_{H(A>\varepsilon)}$ ma ograniczony logarytm. Dalej oznaczając $\xi_\varepsilon = \chi(A > \varepsilon)\xi$ mamy

$$F(z)\chi(A > \varepsilon)\xi = f_z(A_\varepsilon)\xi_\varepsilon = \exp\big(\mathrm{i}z\log(A_\varepsilon)\big)\xi_\varepsilon,$$

a więc dla $\eta \in H$

$$(\eta|F(z)\chi(A > \varepsilon)\xi) = \left(\eta\,\middle|\,\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(\mathrm{i}z\log(A_\varepsilon))^n}{n!}\xi_\varepsilon\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{z^n}{n!}\,(\eta|\mathrm{i}^n(\log A_\varepsilon)^n\xi_\varepsilon)\,.$$

Widzimy więc, że jest to funkcja ciągła na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z \leq 0\}$ i analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z < 0\}$. Dalej, ponieważ $\ker A = \{0\}$, mamy

$$\chi(A > \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{\text{strong}} \mathbb{1},$$

a więc

$$F(z)\chi(A > \varepsilon)\xi \xrightarrow[\varepsilon\searrow 0]{} A^{\mathrm{i}z}\xi.$$

a ponadto zbieżność ta jest jednostajna względem z na poziomych paskach skończonej szerokości:

$$\big\|F(z)\chi(A > \varepsilon)\xi - F(z)\xi\big| \leq \big\|F(z)\big\|\big\|\chi(A > \varepsilon)\xi - \xi\big\|.$$

Tak więc funkcja $z \mapsto A^{\mathrm{i}z}\xi$ jest niemal jednostajną granicą funkcji ciągłych na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z \leq 0\}$ i analitycznych na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im z < 0\}$.

Dygresja 3.3. W dalszym ciągu będziemy rozważać również funkcje holomorficzne o wartościach w H. Niech Ω będzeie obszarem w $\mathbb{C}$ i niech $F\colon \Omega \to H$. Powiemy, że F jest holomorficzna, jeśli dla każdego $\xi \in H$ funckja

$$\Omega \ni z \longmapsto (\xi | F(z))$$

jest holomorficzna. Jeśli F jest Holomorficzna, to funkcja

$$\overline{\Omega} \ni w \longmapsto \overline{(\xi | F(\overline{w}))} = (F(\overline{w}) | \xi)$$

też jest holomorficzna. Będziemy z tego często korzystać.

Podobnie, jeśli F_1 i F_2 są funkcjami holomorficznymi o wartościach w H, to funkcja

$$z \longmapsto (F_1(\overline{z}) | F_2(z))$$

także jest holomorficzna (na odpowiedniej dziedzinie).

Dygresja 3.4. Niech $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i $(V_t)_{t\in\mathbb{R}}$ będą przemiennymi, mocno ciągłymi jednoparametrowymi grupami unitarnymi działającymi na przestrzeni Hilberta H. Wówczas $t \mapsto U_tV_t$ jest mocno ciągłą jednoparametrową grupą unitarną. Fakt, że jest to grupa wynika z przemienności grup $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i $(V_t)_{t\in\mathbb{R}}$, natomiast ciągłość z oszacowania

$$\|U_tV_t\xi - \xi\| \leq \|U_tV_t\xi - U_t\xi\| + \|U_t\xi - \xi\| = \|V_t\xi - \xi\| + \|U_t\xi - \xi\|.$$

Powyższa dyskusja pokazuje, że $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$ jest mocno ciągłą jednoparametrową grupą operatorów unitarnych na H. W kontekście teori Tomity-Takesakiego grupę tę nazywa się zazwyczaj *grupą modularną*.

Stwierdzenie 3.5.
(1) $\Delta^{\mathrm{i}t}J = J\Delta^{\mathrm{i}t}$ *dla wszystkich* $t \in \mathbb{R}$,
(2) $\Delta^{\mathrm{i}t}\mathscr{K} = \mathscr{K}$ *dla wszystkich* $t \in \mathbb{R}$.

Dowód. Ustalmy $t \in \mathbb{R}$.

Ad (1). Mamy $JR = (2\mathbb{1} - R)J$ (stwierdzenie 1.2(5)). Zatem dla każdef funkcji ciągłej f na $\operatorname{Sp} R$ mamy

$$Jf(R)J = \overline{f}(JRJ) = \overline{f}(2\mathbb{1} - R)$$

(bo tak jest dla wielomianów; zauważmy, że $\operatorname{Sp} R = \operatorname{Sp}(2\mathbb{1} - R)$). Funkcja mierzalna $r \mapsto r^{\mathrm{i}t}$ jest punktową granicą funkcji ciągłych, a więc $R^{\mathrm{i}t}$ jest mocną granicą fukncji ciągłych od R. Stąd

$$JR^{\mathrm{i}t}R = (2\mathbb{1} - R)^{\mathrm{i}t}$$

W konseksencji (korzystamy z tego, że $J^2 = \mathbb{1}$)

$$\begin{aligned} J\Delta^{\mathrm{i}t}J &= JR^{\mathrm{i}t}JJ(2\mathbb{1} - R)^{-\mathrm{i}t}J \\ &= (2\mathbb{1} - R)^{-\mathrm{i}t}J(2\mathbb{1} - R)^{-\mathrm{i}t}J \\ &= (2\mathbb{1} - R)^{-\mathrm{i}t}R^{\mathrm{i}t} = \Delta^{\mathrm{i}t}. \end{aligned}$$

Ad (2). $\Delta^{\mathrm{i}t}$ jest funkcją od R, więc komutuje z R, a więc i z $T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}$. Na mocy (1) $\Delta^{\mathrm{i}t}$ komutuje z J, a więc komutuje z $X = JT$. Skoro $\Delta^{\mathrm{i}t}$ komutuje z X i R, to komutuje także z P (i Q). W szczególności $\Delta^{\mathrm{i}t}\mathscr{K} \subset \mathscr{K}$. Ponieważ jest to prawdą także dla $\Delta^{-\mathrm{i}t}$, mamy $\Delta^{\mathrm{i}t}\mathscr{K} = \mathscr{K}$. □

4. Warunek K.M.S.

Definicja 4.1. Niech H będzie zespolona przestrzenią Hilberta i niech $\mathscr{K}$ będzie rzeczywistą domkniętą podprzestrzenią H taką, że

- $\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K} = \{0\}$,
- podprzestrzeń $\mathscr{K} + \mathrm{i}\mathscr{K}$ jest gęsta w H.

Dalej, niech $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ będzie mocno ciągłą jednoparametrową grupą operatorów unitarnych na H. Powiemy, że grupa $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem podprzestrzeni $\mathscr{K}$, jeśli dla dowolnych $\xi,\eta\in\mathscr{K}$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja

$$f\colon \bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,0\leq\Im z\leq 1\bigr\}\longrightarrow\mathbb{C}$$

analityczna na $\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\Im z<1\}$ taka, że

- $f(t)=(\xi|U_t\eta)$,
- $f(t+\mathrm{i})=(U_t\eta|\xi)$

dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$.

Zauważmy od razu, że jeśli dla pewnych ξ i η funkcja f jak w definicji 4.1 istnieje, to jest ona jedyna. Istotnie, jeśli g byłaby inną taką funkcją, to $f-g$ byłaby analityczna na $\{z\in\mathbb{C}|0<\Im z<1\}$ i równa 0 na prostej rzeczywistej. Stąd f i g musiałby być sobie równe na całej swojej dziedzinie.

Stwierdzenie 4.2. *Jednoparametrowa grupa $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathscr{K}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\xi,\eta\in\mathscr{K}$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja*

$$f\colon \bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,0\leq\Im z\leq \tfrac{1}{2}\bigr\}\longrightarrow\mathbb{C}$$

analityczna na $\bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,0<\Im z<\frac{1}{2}\bigr\}$ taka, że

- $f(t)=(\xi|U_t\eta)$,
- $f\bigl(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)\in\mathbb{R}$

dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$.

Dowód. Niech $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek se sformułowania stwierdzenia. Wówczas dla $\xi,\eta\in\mathscr{K}$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja

$$f\colon \bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,0\leq\Im z\leq \tfrac{1}{2}\bigr\}\longrightarrow\mathbb{C}$$

analityczna na $\bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,0<\Im z<\frac{1}{2}\bigr\}$ taka, że $f(t)=(\xi|U_t\eta)$ oraz $f\bigl(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)\in\mathbb{R}$ dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$. Stosując zasadę symetrii otrzymamy funkcję

$$\widetilde{f}\colon \bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,0\leq\Im z\leq 1\bigr\}\longrightarrow\mathbb{C}$$

taką, że

- $\widetilde{f}(z)=f(z)$ dla $z\in\bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,0\leq\Im z\leq\frac{1}{2}\bigr\}$,
- $\widetilde{f}(w)=\overline{f(\overline{w}+\mathrm{i})}$ dla $w\in\bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,\frac{1}{2}\leq\Im z\leq 1\bigr\}$.

Sprawdźmy, że wówczas $\widetilde{f}$ jest funkcją K.M.S. dla ξ i η: dla $t\in\mathbb{R}$ mamy $\widetilde{f}(t)=f(t)=(\xi|U_t\eta)$ oraz

$$\widetilde{f}(t+\mathrm{i})=\overline{f(t)}=(U_t\eta|\xi)\,.$$

Zatem $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathscr{K}$.

Załóżmy teraz, że $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathscr{K}$. Niech $\xi,\eta\in\mathscr{K}$ i niech $f\colon\{z\in\mathbb{C}\,|\,0\leq\Im z\leq 1\}\to\mathbb{C}$ będzie odpowiednią funkcją K.M.S. Zdefiniujmy

$$g\colon \bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,0\leq\Im z\leq 1\bigr\}\longrightarrow\mathbb{C}$$

kładąc

$$g(z)=\overline{f(\overline{z}+\mathrm{i})}.$$

Wówczas g także jest funkcją K.M.S. dla ξ i η: jest ona ciągła i ograniczona na $\{z\in\mathbb{C}|0\leq\Im z\leq 1\}$ i analityczna na $\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\Im z<1\}$, a ponadto dla $t\in\mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} g(t)&=\overline{f(t+\mathrm{i})}=\overline{\overline{(\xi|U_t\eta)}}=(\xi|U_t\eta)\,,\\ g(t+\mathrm{i})&=\overline{f(t)}=\overline{(\xi|U_t\eta)}=(U_t\eta|\xi)\,. \end{aligned}$$

Stąd $f=g$, a więc w szczególności $g\bigl(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)=f\bigl(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)$, czyli

$$\overline{f\bigl(\overline{(t+\tfrac{\mathrm{i}}{2})}+\mathrm{i}\bigr)}=f\bigl(t+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\bigr)$$

lub inaczej $f\bigl(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)=\overline{f\bigl(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)}$. □

Lemat 4.3. *Niech* $\eta \in \mathscr{K}$. *Wówczas* $\eta = R^{\frac{1}{2}}\zeta$, *gdzie*

$$\zeta = \tfrac{1}{2}\big(R^{\frac{1}{2}} + (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}J\big)\eta.$$

Dowód. Mamy $\eta = P\eta$, a więc

$$\begin{aligned}\eta = P\eta &= \tfrac{1}{2}(P + Q + P - Q)\eta\\ &= \tfrac{1}{2}(R + X)\eta\\ &= \tfrac{1}{2}(R + JT)\eta\\ &= \tfrac{1}{2}(R + TJ)\eta\\ &= \tfrac{1}{2}\big(R + R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}J\big)\eta\\ &= R^{\frac{1}{2}}\big(\tfrac{1}{2}\big(R^{\frac{1}{2}} + (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}J\big)\eta\big).\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy po kolei z tego, że $JT = TJ$, oraz że

$$T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Twierdzenie 4.4. *Grupa* $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$ *spełnia warunek K.M.S. względem* $\mathscr{K}$.

Dowód. Niech $\xi, \eta \in \mathscr{K}$ i niech

$$f(t) = \big(\xi\big|\Delta^{\mathrm{i}t}\eta\big).$$

Rozszerzymy f na pasek $\big\{z \in \mathbb{C}\,\big|\,0 \leq \Im z \leq \tfrac{1}{2}\big\}$. Korzystamy z lematu 4.3:

$$\begin{aligned}f(t) = \big(\xi\big|\Delta^{\mathrm{i}t}\eta\big) &= \Big(\xi\Big|\Delta^{\mathrm{i}t}R^{\frac{1}{2}}\zeta\Big)\\ &= \Big(\xi\Big|R^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1} - R)^{-\mathrm{i}t}R^{\frac{1}{2}}\zeta\Big)\\ &= \Big(\xi\Big|R^{\mathrm{i}(t-\frac{\mathrm{i}}{2})}(2\mathbb{1} - R)^{-\mathrm{i}t}\zeta\Big).\end{aligned}$$

Powyższy rachunek podpowiada nam, aby dla $z \in \big\{z \in \mathbb{C}\,\big|\,0 \leq \Im z \leq \tfrac{1}{2}\big\}$ zdefiniować

$$f(z) = \Big(\xi\Big|R^{\mathrm{i}(z-\frac{\mathrm{i}}{2})}(2\mathbb{1} - R)^{-\mathrm{i}z}\zeta\Big)$$

(dla takich z mamy $\Im\big(z - \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big), \Im(-z) \leq 0$, więc operatory $R^{\mathrm{i}(z-\frac{\mathrm{i}}{2})}$ oraz $(2\mathbb{1} - R)^{-\mathrm{i}z}$ są dobrze zdefiniowane i zależą holomorficznie od z na mocy dyskusji zawartej w dygresji 3.2.

Aby spełniony był warunek K.M.S. wartości f na prostej $\mathbb{R} + \tfrac{\mathrm{i}}{2}$ muszą być rzeczywiste. Mamy

$$f\big(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big) = \Big(\xi\Big|R^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1} - R)^{-\mathrm{i}t}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}\zeta\Big).$$

Obliczamy

$$(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}\zeta = (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}\big(R^{\frac{1}{2}} + (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}J\big)\eta = \tfrac{1}{2}\big((2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}\eta + (2\mathbb{1} - R)J\eta\big).$$

Na mocy wzoru $T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}$ (stwierdzenie 1.2(2)) mamy więc

$$(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}\zeta = \tfrac{1}{2}\big(T\eta + (2\mathbb{1} - R)J\eta\big),$$

a dalej

$$\begin{aligned}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}\zeta &= \tfrac{1}{2}\big(XJ\eta + (2\mathbb{1} - R)J\eta\big)\\ &= \tfrac{1}{2}(X + 2\mathbb{1} - R)J\eta\\ &= \tfrac{1}{2}(P - Q + 2\mathbb{1} - P - Q)J\eta\\ &= (\mathbb{1} - Q)J\eta = JP\eta = J\eta.\end{aligned}$$

Tak więc

$$f\big(t + \tfrac{\mathrm{i}}{2}\big) = \big(\xi\big|\Delta^{\mathrm{i}t}J\eta\big) = \big(\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi\big|J\eta\big) = \Re\big(\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi\big|J\eta\big) + \mathrm{i}\Im\big(\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi\big|J\eta\big).$$

Wiemy, że J przeprowadza $\mathscr{K}$ na dopełnienie ortogonalne $\mathrm{i}\mathscr{K}$ względem iloczynu skalarnego $\Re\left(\cdot\middle|\cdot\right)$. Mamy więc

$$\Im\left(\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi\middle|J\eta\right)=\Re\left(\mathrm{i}\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi\middle|J\eta\right)=0,$$

bo $\Delta^{\mathrm{i}t}\xi\in\mathscr{K}$ dla wszystkich t. Stąd $f\big(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\big)\in\mathbb{R}$ dla każdego $t\in\mathbb{R}$. □

Twierdzenie 4.5. *Niech $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ będzie mocno ciągłą jednoparametrową grupą operatorów unitarnych taką, że $U_t\mathscr{K}=\mathscr{K}$ dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$. Jeśli $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warune K.M.S. względem $\mathscr{K}$, to $U_t=\Delta^{\mathrm{i}t}$ dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$.*

Dowód. W podprzestrzeni $\mathscr{K}$ jest gęsta podprzestrzeń wektorów całkowitych: dla $\xi\in\mathscr{K}$ i $n\in\mathbb{N}$ wektor

$$\xi_n=\sqrt{\tfrac{n}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nt^2}U_t\xi\,dt$$

należy do $\mathscr{K}$ ($\mathscr{K}$ jest domknięta, a $\sqrt{\frac{n}{\pi}}\mathrm{e}^{-nt^2}\in\mathbb{R}$), jest całkowity. Ponadto $\xi_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\xi$.

Niech więc $\xi\in\mathscr{K}$ będzie całkowity dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i niech $h\colon\mathbb{C}\to H$ będzie funkcją całkowitą taką, że $h(t)=U_t\xi$ dla $t\in\mathbb{R}$. Wówczas funkcja h jest ograniczona na poziomych paskach skończonej szerokości: funkcje

$$z=t+\mathrm{i}s\longmapsto h(t+\mathrm{i}s)\quad\text{oraz}\quad z=t+\mathrm{i}s\longmapsto U_th(\mathrm{i}s)$$

są całkowite i równe na $\mathbb{R}$, a więc są równe.

Wykażemy, że dla $\eta\in\mathscr{K}$ mamy

$$\left(\Delta^{\mathrm{i}t}J\eta\middle|U_t\xi\right)=(J\eta|\xi)$$

dla wszystkich t. Ponieważ $\Delta^{\mathrm{i}s}\mathscr{K}=\mathscr{K}$ (stwierdzenie 3.5), a $\mathscr{K}$ i $J\mathscr{K}$ są podzbiorami liniowo gęstymi w H, wynika stąd, że $U_t=\Delta^{\mathrm{i}t}$ (pamiętamy, że całkowite wektory, które są całkowite dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ są gęste w $\mathscr{K}$).

Zdefiniujmy funkcję $g\colon\left\{z\in\mathbb{C}\middle|0\leq\Im z\leq\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{C}$ wzorem

$$g(z)=\left(R^{\mathrm{i}\overline{z}}(2\mathbb{1}-R)^{-\mathrm{i}(\overline{z}+\frac{\mathrm{i}}{2})}\zeta\middle|h(z)\right)$$

gdzie ζ jest wektorem z lematu 4.3 (czyli mamy $R^{\frac{1}{2}}\zeta=\eta$ oraz $(2\mathbb{1}-R)^{\frac{1}{2}}\zeta=J\eta$). Dzięki własnościom funkcji h i operatorów R oraz $2\mathbb{1}-R$, funkcja g jest ciągła i ograniczona na $\left\{z\in\mathbb{C}\middle|0\leq\Im z\leq\frac{1}{2}\right\}$ i holomorficzna na $\left\{z\in\mathbb{C}\middle|0<\Im z<\frac{1}{2}\right\}$ (patrz → dygresja 3.3).

Mamy

$$g(t)=\left(R^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1}-R)^{-\mathrm{i}t}(2\mathbb{1}-R)^{\frac{1}{2}}\zeta\middle|h(t)\right)=\left(\Delta^{\mathrm{i}t}J\eta\middle|U_t\xi\right)=\left(J\eta\middle|\Delta^{-\mathrm{i}t}U_t\xi\right).$$

Ponieważ zarówno $\Delta^{-\mathrm{i}t}U_t\xi$ jak i η należą do $\mathscr{K}$, mamy $g(t)\in\mathbb{R}$ dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$ (bo

$$\Im\left(J\eta\middle|\Delta^{-\mathrm{i}t}U_t\xi\right)=\Re\left(\mathrm{i}J\eta\middle|\Delta^{-\mathrm{i}t}U_t\xi\right)=-\Re\left(J\mathrm{i}\eta\middle|\Delta^{-\mathrm{i}t}U_t\xi\right)=0$$

jako że $J(\mathrm{i}\mathscr{K})$ jest dopełnieniem ortogonalnym $\mathscr{K}$ dla $\Re\left(\cdot\middle|\cdot\right)$).

Na drugim brzegu paska mamy z kolei:

$$g\big(t+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\big)=\left(R^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1}-R)^{-\mathrm{i}t}R^{\frac{1}{2}}\zeta\middle|h\big(t+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\big)\right)=\left(\Delta^{\mathrm{i}t}\eta\middle|h\big(t+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\big)\right).$$

Wykażemy teraz, że $g\big(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\big)\in\mathbb{R}$ dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$. W tym celu skorzystamy z warunku K.M.S. dla grupy $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ względem $\mathscr{K}$. Dla ustalonego $s\in\mathbb{R}$ oraz pary wektorów $(\Delta^{\mathrm{i}s}\eta,\xi)$ z przestrzeni $\mathscr{K}$ istnieje funkcja

$$f\colon\left\{z\in\mathbb{C}\middle|0\leq\Im z\leq\tfrac{1}{2}\right\}\longrightarrow\mathbb{C}$$

ciągła i ograniczona na $\left\{z\in\mathbb{C}\middle|0\leq\Im z\leq\frac{1}{2}\right\}$, holomorficzna na $\left\{z\in\mathbb{C}\middle|0<\Im z<\frac{1}{2}\right\}$ oraz taka, że

$$f(t)=\left(\Delta^{\mathrm{i}s}\eta\middle|U_t\xi\right).$$

i $f\big(t+\frac{\mathrm{i}}{2}\big)\in\mathbb{R}$ dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$. Zauważmy dalej, że ponieważ

$$f(t)=\left(\Delta^{\mathrm{i}s}\eta\middle|h(t)\right),$$

a h jest funkcją całkowitą, mamy

$$f\bigl(t+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\bigr)=\bigl(\Delta^{\mathrm{i}s}\eta\big|h\bigl(t+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\bigr)\bigr).$$

W szczególności (kiedy $s=t$) mamy

$$g\bigl(t+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\bigr)=\bigl(\Delta^{\mathrm{i}t}\eta\big|h\bigl(t+\tfrac{\mathrm{i}}{2}\bigr)\bigr)\in\mathbb{R}$$

dla wszystkich t.

Wykazaliśmy więc, że g ma wartości rzeczywiste na prostych $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}+\frac{\mathrm{i}}{2}$. Ponieważ jest ona również ciągła i ograniczona na $\bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,0\leq\Im z\leq\frac{1}{2}\bigr\}$, korzystając z zasady symetrii Schwarza otrzymamy z g ograniczoną funkcję całkowitą. Innymi słowy g jest stała.

Zatem, w szczególności, dla każdego $t\in\mathbb{R}$ mamy $g(t)=g(0)$, czyli

$$\bigl(\Delta^{\mathrm{i}t}J\eta\big|U_t\xi\bigr)=(J\eta|\xi).$$

□

Twierdzenie 4.6. *Niech $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ będzie mocna ciągłą jednoparametrową grupą operatorów unitarnych na przestrzeni Hilberta $\mathbb{H}$. Niech $\mathscr{K}_0$ będzie rzeczywistą (niekoniecznie domkniętą) podprzestrzenią $\mathbb{H}$ taką, że $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathscr{K}_0$. Wówczas $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem najmniejszej domkniętej rzeczywistej podprzestrzeni $\mathscr{K}\subset\mathbb{H}$ niezmienniczej dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i zawierającej $\mathscr{K}_0$. Ponadto $\mathscr{K}\cap\mathrm{i}\mathscr{K}=\{0\}$, a więc jeśli oznaczymy przez H domknięcie $\mathscr{K}+\mathrm{i}\mathscr{K}$ i zdefiniujemy $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$ na H tak jak powyżej, to H jest niezmiennicza dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ i $U_t=\Delta^{\mathrm{i}t}$ na H dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$.*

Dowód. Niech $\mathscr{K}_1$ będzie zbiorem tych wektorów $\xi\in\mathbb{H}$, że dla każdego $\eta\in\mathscr{K}_0$ istnieje funkcja K.M.S. dla pary (η,ξ), tj. istnieje ciągła i ograniczona funkcja

$$f\colon\bigl\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,0\leq\Im z\leq 1\bigr\}\longrightarrow\mathbb{C}$$

holomorficzna na $\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\Im z<1\}$ taka, że dla każdego $t\in\mathbb{R}$ mamy

$$f(t)=(\eta|U_t\xi)=\overline{f(t+\mathrm{i})}.$$

Zachodzą następujące fakty

- $\mathscr{K}$ jest rzeczywistą podprzestrzenią $\mathbb{H}$: jeśli $\xi_1,\xi_2\in\mathscr{K}_1$, $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{R}$ i f_1,f_2 są odpowiednimi funkcjami K.M.S., to $\theta_1f_1+\theta_2f_2$ jest funkcją K.M.S. dla $\theta_1\xi_1+\theta_2\xi_2$, gdyż dla $t\in\mathbb{R}$ mamy
$$(\theta_1f_1+\theta_2f_2)(t)=\theta_1\,(\eta|U_t\xi_1)+\theta_2\,(\eta|U_t\xi_2)=(\eta|U_t(\theta_1U_t\xi_1+\theta_2\xi_2))$$
oraz
$$(\theta_1f_1+\theta_2f_2)(t+\mathrm{i})=\theta_1f_1(t+\mathrm{i})+\theta_2f_2(t+\mathrm{i})=\theta_1\overline{f_1(t)}+\theta_2\overline{f_2(t)}=\overline{(\theta_1f_1+\theta_2f_2)(t)}.$$
- $\mathscr{K}_1$ jest niezmiennicza dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$: ustalmy $s\in\mathbb{R}$ i dla $\xi\in\mathscr{K}_1$ oraz $\eta\in\mathscr{K}_0$ niech f będzie funkcją K.M.S. dla (η,ξ). Wówczas funkcja
$$g\colon z\longmapsto f(z+s).$$
Wówczas g jest ciągła i ograniczona na $\{z\in\mathbb{C}|0\leq\Im z\leq 1\}$ i holomorficzna na $\{z\in\mathbb{C}|0<\Im z<1\}$. Ponadto
$$g(t)=f(t+s)=(\eta|U_{t+s}\xi)=(\eta|U_t(U_s\xi))$$
oraz
$$g(t+\mathrm{i})=f(t+s_{\mathrm{i}})=\overline{f(t+s_{\mathrm{i}})}=\overline{g(t)}.$$
Zatem g jest funkcją K.M.S. dla $(\eta,U_s\xi)$. Zatem $U_s\mathscr{K}_1\subset\mathscr{K}_1$.
- $\mathscr{K}_1$ jest domknięta: niech $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów $\mathscr{K}_1$ zbieznym do $\xi\in\mathbb{H}$. Weźmy $\eta\in\mathscr{K}_0$ i niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie odpowiednim ciagiem funckji K.M.S. Mamy
$$\bigl|f_n(t)-f_m(t)\bigr|=\bigl|(\eta|U_t(\xi_n-\xi_m))\bigr|\leq\|\eta\|\|\xi_n-\xi_m\|$$
oraz
$$\bigl|f_n(t+\mathrm{i})-f_m(t+\mathrm{i})\bigr|=\bigl|f_n(t)-f_m(t)\bigr|=\leq\|\eta\|\|\xi_n-\xi_m\|.$$

Zatem, na mocy włansości funkcji holomorficznych na pasku (patrz dodatek)

$$\left|f_n(z) - f_m(z)\right| \leq \|\eta\|\|\xi_n - \xi_m\|$$

dla wszystkich z o części urojonej pomiędzy 0 a 1. Stąd funkcje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tworzą ciąg zbieżny jednostajnie, a co za tym idzie jego granica f jest funkcją ciągłą i ograniczoną na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \Im z \leq 1\}$ i holomorficzną na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \Im z < 1\}$. Jest ona także funkcją K.M.S. dla ξ. Istotnie,

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} (\eta|U_t\xi_n) = (\eta|U_t\xi)$$

oraz

$$f(t+\mathrm{i}) = \lim_{n\to\infty} f_n(t+\mathrm{i}) = \lim_{n\to\infty} (U_t\xi_n|\eta) = (U_t\xi|\eta)\,.$$

- $\mathscr{K}_1 \supset \mathscr{K}_0$.

Z powyższych warunków ewidentnie wynika, że $\mathscr{K} \subset \mathscr{K}_1$.

Wykazalismy, że dla każdego $\eta \in \mathscr{K}_0$ i $\xi \in \mathscr{K}_1$ istnieje odpowiednia funkcja K.M.S. dla (η,ξ). Tym bardziej dla każdego $\eta \in \mathscr{K}_0$ i $\xi \in \mathscr{K}$ istnieje odpowiednia funkcja K.M.S. dla (η,ξ).

Niech $\mathscr{K}_2$ będzie zbiorem tych $\eta \in \mathbb{H}$, że dla dowolnego $\xi \in \mathscr{K}$ istnieje funkcja K.M.S. dla pary (η,ξ). Wówczas

- $\mathscr{K}_2$ jest rzeczywistą podprzestrzenią w $\mathbb{H}$,
- $\mathscr{K}_2$ jest niezmiennicza dla $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$,
- $\mathscr{K}_2$ jest domknięta,
- $\mathscr{K}_0 \subset \mathscr{K}_2$.

Wynika stąd, że $\mathscr{K} \subset \mathscr{K}_2$. W szczególności grupa $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathscr{K}$.

Teraz wykażemy, że $\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K} = \{0\}$. Weźmy $\xi \in \mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K}$. Wówczas zarówno ξ jak i $\mathrm{i}\xi$ należą do $\mathscr{K}$. Niech f będzie funkcją K.M.S. dla (ξ,ξ), a g funkcją K.M.S. dla $(\xi,\mathrm{i}\xi)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= (\xi|U_t\xi)\,, & f(t+\mathrm{i}) &= (U_t\xi|\xi)\,,\\ g(t) &= (\xi|U_t(\mathrm{i}\xi))\,, & g(t+\mathrm{i}) &= (U_t(\mathrm{i}\xi)|\xi)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Z rowności w pierwszej kolumnie wynika, że $g(z) = \mathrm{i}f(z)$ dla z z dziedziny obu funkcji. W szczególności

$$g(t+\mathrm{i}) = \mathrm{i}f(t+\mathrm{i})$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Ale druga kolumna (6) pokazuje, że $g(t+\mathrm{i}) = -\mathrm{i}f(t+\mathrm{i})$. Stąd f jest równa 0 na $\mathbb{R}+\mathrm{i}$, a więc jest stała (i równa 0). W szczególności

$$\|\xi\|^2 = f(0) = 0.$$

Oczywiście $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ zachowuje $H = \overline{\mathscr{K} + \mathrm{i}\mathscr{K}}$, więc pozostałe punkty naszego twierdzenia wynikają z twierdzenia 4.5. □

5. Algebry von Neumanna

Niech M będzie algebrą von Neumanna działającą na przestrzeni Hilberta H. Niech $\Omega \in \mathscr{H}$ będzie (jednostkowym) wektorem cyklicznym i separującym dla M. Dla dowolnego podzbioru $S \subset \mathrm{B}(H)$, symbolm $S_{\text{s.s.}}$ będziemy oznaczać zbiór

$$\left\{s \in S \,\middle|\, s = s^*\right\}.$$

Niech $\mathscr{K} = \overline{M_{\text{s.s.}}\Omega}$. Jest jasna, że

- $\mathscr{K}$ jest rzeczywistą podprzestrzenią w H,
- $\mathscr{K} + \mathrm{i}\mathscr{K}$ jest gęsta w H (cykliczność Ω).

Pokażemy teraz, że $\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K} = \{0\}$.[1] Zanim to wykażemy sprawdzimy, że dla podzbioru $\mathscr{L} \subset H$ mamy

$$\mathrm{i}(\mathscr{L})^{\perp_{\Re}} = (\mathrm{i}\mathscr{L})^{\perp_{\Re}},$$

[1] Jest absolutnie jasne, że $M_{\text{s.s.}}\Omega \cap \mathrm{i}M_{\text{s.s.}}\Omega = \{0\}$: jeśli $a,b \in M_{\text{s.s.}}$ i $a\Omega = \mathrm{i}b\Omega$, to $(a-\mathrm{i}b)\Omega = 0$, czyli $a = \mathrm{i}b$, bo Ω jest separujący dla M. To implikuje $a = b = 0$.

gdzie "$\perp_{\Re}$" oznacza dopełnienie ortogonalne dla iloczynu skalarnego $\Re\left(\cdot|\cdot\right)$. Istontnie

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}(\mathscr{L})^{\perp_{\Re}} &= \left\{\mathrm{i}\xi \,\middle|\, \forall\, \eta \in \mathscr{L}\ \Re\left(\eta|\xi\right) = 0\right\} \\
&= \left\{\xi' \,\middle|\, \forall\, \eta \in \mathscr{L}\ \Re\left(\eta| -\mathrm{i}\xi'\right) = 0\right\} \\
&= \left\{\xi' \,\middle|\, \forall\, \eta \in \mathscr{L}\ \Re\left(\mathrm{i}\eta|\xi'\right) = 0\right\} \\
&= \left\{\xi' \,\middle|\, \forall\, \eta' \in \mathrm{i}\mathscr{L}\ \Re\left(\eta'|\xi'\right) = 0\right\} = (\mathrm{i}\mathscr{L})^{\perp_{\Re}}.
\end{aligned}$$

Na początek zauważmy, że $M'_{\mathrm{s.s.}}\Omega \subset (\mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp_{\Re}}$. Istotnie: dla $x' \in M'_{\mathrm{s.s.}}$ i $x \in M_{\mathrm{s.s.}}$ mamy

$$(x'\Omega|x\Omega) = (\Omega|x'x\Omega) = (\Omega|xx'\Omega) = (x\Omega|x'\Omega)\,,$$

czyli $(x'\Omega|x\Omega) \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\Re\left(x'\Omega|\mathrm{i}x\Omega\right) = \Re\big(\mathrm{i}\left(x'\Omega|x\Omega\right)\big) = 0.$$

Mamy więc

$$M'\Omega = M'_{\mathrm{s.s.}}\Omega + \mathrm{i}M'_{\mathrm{s.s.}}\Omega \subset \mathrm{i}\mathscr{K}^{\perp_{\Re}} + \mathscr{K}^{\perp_{\Re}}.$$

Teraz

- $\mathrm{i}\mathscr{K}^{\perp_{\Re}} + \mathscr{K}^{\perp_{\Re}} \subset (\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp_{\Re}}$. Istotnie: jeśli $\xi_1, \xi_2 \mathscr{K}^{\perp_{\Re}}$ oraz $\eta \in \mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K}$ mamy $\Re\left(\mathrm{i}\xi_1 + \xi_2|\eta\right) = \Re\left(\mathrm{i}\xi_1|\eta\right) + \Re\left(\xi_2|\eta\right)$; drugi wyraz jest równy zero, bo $\eta \in \mathscr{K}$ i $\xi_2 \in \mathscr{K}^{\perp_{\Re}}$, a pierwszy $\Re\left(\mathrm{i}\xi_1|\eta\right) = -\Re\left(\xi_1|\mathrm{i}\eta\right)$ jest równy zero, gdyż $\mathrm{i}\eta \in \mathscr{K}$ i $\xi \in \mathscr{K}^{\perp_{\Re}}$.
- $(\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp_{\Re}} = (\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp}$. Istotnie, jeśli $\eta \in \mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K}$, to $\eta, \mathrm{i}\eta \in \mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K}$. Stąd, dla $\xi \in (\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp_{\Re}}$, mamy
$$\Re\left(\xi|\eta\right) = \Re\left(\mathrm{i}\eta|\xi\right) = 0.$$
Ale $\Re\left(\mathrm{i}\eta|\xi\right) = \Im\left(\eta|\xi\right)$, czyli $(\eta, \xi| =) \Re\left(\eta|\xi\right) = 0$. To pokazuje, że
$$(\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp_{\Re}} \subset (\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp},$$
a przeciwne zawieranie jest oczywiste.

W końcu otrzymujemy

$$M'\Omega = M'_{\mathrm{s.s.}}\Omega + \mathrm{i}M'_{\mathrm{s.s.}}\Omega \subset \mathrm{i}\mathscr{K}^{\perp_{\Re}} + \mathscr{K}^{\perp_{\Re}} \subset (\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp_{\Re}} = (\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp}.$$

Ponieważ zbiór $M'\Omega$ jest gęsty w H, odostajemy $\mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K} = \{0\}$.

Wykazaliśmy, że $\mathscr{K}$ spełnia założenia z części 2 (i dalszych). Mamy więc operatory

$$P, Q, R, X, J, T$$

oraz grupę modularną $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$. Przystępujemy do dowodu najwazniejszego twierdzenia teorii Tomity-Takesakiego:

Twierdzenie 5.1.
(1) *Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy $\Delta^{\mathrm{i}t} M \Delta^{-\mathrm{i}t} = M$,*
(2) *$JMJ = M'$.*

6. Teoria Tomity-Takesakiego

Lemat 6.1. *Niech $x' \in M'_{s.s.}$. Wówczas dla dowlnej liczby λ takiej, ze $\Re\lambda > 0$ istnieje dokładnie jeden $x \in M_{s.s.}$ taki, że*

$$(x'\Omega|y\Omega) = \Re\big(\lambda\left(x\Omega|y\Omega\right)\big)$$

dla wszystkich $y \in M_{s.s.}$.

Dowód. Zacznijmy od następujących uproszczeń:

- możemy przyjąć, że $0 \le x' \le \mathbb{1}$, bo każdy x' jest $\mathbb{R}$-kombinacją liniową takich,
- możemy przyjąć, że $\Re\lambda = 1$ (przeskalowanie).

Na razie $x \in M_{\text{s.s.}}$ będziemy traktować jako parametr. Definiujemy normalne (σ-słabo ciągłe) funkcjonały $\psi, \psi_x \colon M_{\text{s.s.}} \to \mathbb{R}$:

$$\psi(y) = (x'\Omega|y\Omega)\,,$$
$$\psi_x(y) = \Re\big(\lambda\,(x\Omega|y\Omega)\big)$$

dla wszystkich $y \in M_{\text{s.s.}}$. Mamy wykazać, że istnieje dokładnie jeden $x \in M_{\text{s.s.}}$ taki, że

$$\psi = \psi_x.$$

Na początek skomentujmy jedyność: jeśli $\psi_{x_1} = \psi_{x_2}$, to $\psi_{x_1 - x_2} = 0$. Tak więc pisząc $x = x_1 - x_2$, mamy w szczególności

$$\psi_x(x) = 0.$$

innymi słowy

$$0 = \Re\big(\lambda\,(x\Omega|x\Omega)\big) = \Re(\lambda)\|x\Omega\|^2,$$

czyli $x = 0$.

Dowodzimy teraz istnienia rzeczonego elementu x. Niech

$$V = \big\{\psi_x \,\big|\, x \in M_{\text{s.s.}},\ \|x\| \leq 1\big\}.$$

V jest ewidentnie wypukłym podzbiorem $(M_*)_{\text{s.s.}}$ (każdy σ-słabo ciągły funkcjonał $M_{\text{s.s.}} \to \mathbb{R}$ rozszerza się jednoznacznie do normalnego i samosprzężonego funkcjonału na M). Jest on również zbiorem słabo zwartym,[2] gdyż odwzorowanie $x \mapsto \psi_x$ jest ciągłe z M z σ-słabą topologią do M_* ze słabą topologią.

Istotnie: mamy

$$x_\lambda \xrightarrow[\lambda]{\sigma\text{-słabo}} x \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\,\omega \in M_* \quad \omega(x_\lambda) \underset{\lambda}{\longrightarrow} \omega(x),$$
$$x\omega_\lambda \xrightarrow[\lambda]{\text{słabo}} \omega \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\,a \in M \quad \omega_\lambda(a) \underset{\lambda}{\longrightarrow} \omega(a),$$

Niech więc $x_\lambda \xrightarrow[\lambda]{\sigma\text{-słabo}} x$ w $M_{\text{s.s.}}$. Wówczas dla ustalonego $y \in M_{\text{s.s.}}$ mamy

$$\Re\big(\lambda\,(x_\lambda\Omega|y\Omega)\big) \underset{\lambda}{\to} \Re\big(\lambda\,(x\Omega|y\Omega)\big)$$

gdyż $a \mapsto \overline{(a\Omega|y\Omega)}$ jest funkcjonałem σ-słabo ciągłym.

Przypuśćmy, że $\psi \neq \psi_x$ dla wszystkich $x \in M_{\text{s.s.}}$, $\|x\| \leq 1$. Wówczas, na mocy twierdzenia Hahna-Banacha, istnieje $h \in M_{\text{s.s.}}$ taki, że

$$\psi_x(h) < \psi(h)$$

dla wszytskich $x \in M_{\text{s.s.}}$, $\|x\| \leq 1$. Innymi słowy, dla wszystkich takich x mamy

$$\Re\big(\lambda\,(x\Omega|h\Omega)\big) < (x'\Omega|h\Omega)$$

Niech $h = u|h|$ będzie rozkładem biegunowym h. Kładąc $x = u$ w powyższym wzorze otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\Re\big(\lambda\,(x\Omega|h\Omega)\big) = \Re\big(\lambda\,(u\Omega|h\Omega)\big) &< (x'\Omega|h\Omega) \\
&= \Big(\sqrt{x'}\Omega\Big|\sqrt{x'}h\Omega\Big) \\
&= \Big(\sqrt{x'}\Omega\Big|h\sqrt{x'}\Omega\Big) \\
&\leq \Big(\sqrt{x'}\Omega\Big||h|\sqrt{x'}\Omega\Big) \\
&= (\Omega||h|x'\Omega) \\
&= \Big(\sqrt{|h|}\Omega\Big|\sqrt{|h|}x'\Omega\Big) \\
&= \Big(\sqrt{|h|}\Omega\Big|x'\sqrt{|h|}\Omega\Big) \\
&\leq \Big(\sqrt{|h|}\Omega\Big|\sqrt{|h|}\Omega\Big) = (\Omega||h|\Omega) = (u\Omega|h\Omega) = (x\Omega|h\Omega)\,.
\end{aligned}$$

[2]Słaba topologia na M_* jest po prostu obcięciem słabej* topologii na M^* do M_*.

Innymi słowy
$$\Re\big(\lambda\,(x\Omega|h\Omega)\big) < (x\Omega|h\Omega)\,.$$
Ale
$$(x\Omega|h\Omega) = \Re\big(\lambda\,(x\Omega|h\Omega)\big),$$
bo $\Re(\lambda) = 1$, a $(x\Omega|h\Omega) \in \mathbb{R}$. Uzuskana sprzeczność pokazuje, że musi istnieć $x \in M_{\text{s.s.}}$ taki, że $\psi = \psi_x$. □

Wniosek 6.2. *Dla każdego $x' \in M'$ istnieje $x \in M$ taki, że*
$$Xx'\Omega = x\Omega \qquad \textit{oraz} \qquad Xx'^*\Omega = x^*\Omega.$$

Dowód. Na początek weźmy $x' \in M'_{\text{s.s.}}$. Stosujemy lemat 6.1 dla $\lambda = 1$. Mamy więc $x \in M_{\text{s.s.}}$ taki, że
$$\Re\,(x\Omega|y\Omega) = (x'\Omega|y\Omega)$$
dla wszystkich $y \in M_{\text{s.s.}}$. Stąd
$$\Re\,(x\Omega|\eta) = (x'\Omega|\eta)$$
dla wszystkich $\eta \in \mathscr{K}$. Oznacza to, że $x\Omega$ jest rzutem ortogonalnym (dla $\Re\,(\cdot|\cdot)$) wektora $x'\Omega$ na $\mathscr{K}$, tzn.
$$x\Omega = Px'\Omega.$$
Wiemy już, że $x'\Omega \in (\mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp_\Re}$, a więc $Qx'\Omega = 0$. Stąd
$$Xx'\Omega = (P-Q)x'\Omega = Px'\Omega = x\Omega.$$
Teraz dla $x' = x'_1 + \mathrm{i}x'_2$, gdzie $x'_1, x'_2 \in M'_{\text{s.s.}}$ o odpowiednich $x_1, x_2 \in M_{\text{s.s.}}$ takich, że
$$Xx'_k\Omega = x_k\Omega, \qquad k = 1,2$$
mamy
$$Xx'\Omega = Xx'_1\Omega - \mathrm{i}Xx'_2\Omega = x_1\Omega - \mathrm{i}x_2\Omega = (x_1 - \mathrm{i}x_2)\Omega$$
oraz
$$Xx'^*\Omega = Xx'_1\Omega + \mathrm{i}Xx'_2\Omega = x_1\Omega + \mathrm{i}x_2\Omega = (x_1 - \mathrm{i}x_2)^*\Omega,$$
więc wystarczy $x = x_1 - \mathrm{i}x_2$. □

Stwierdzenie 6.3. *Niech $x' \in M'$. Wówczas dla każdej liczby λ takiej, że $\Re\lambda > 0$ istnieje $x \in M$ taki, że*
$$Xx'X = \lambda Rx(2\mathbb{1} - R) + \overline{\lambda}(2\mathbb{1} - R)xR.$$

Dowód. Możemy przyjąć, że $x' \in M'_{\text{s.s.}}$, gdyż dowolny element x' jest kombinacją liniową dwóch takich (odpowiedni x będzie wówczas analogiczną kombinacją liniową[3]). Lemat 6.1 zastosowany do $\overline{\lambda}$ oraz x' produkuje element $\widetilde{x} \in M_{\text{s.s.}}$ taki, że
$$(x'\Omega|y\Omega) = \Re\big(\overline{\lambda}\,(\widetilde{x}\Omega|y\Omega)\big)$$
dla wszystkich $y \in M_{\text{s.s.}}$. Teraz niech $x = \frac{1}{2}\widetilde{x}$. Wówczas
$$(x'\Omega|y\Omega) = \overline{\lambda}\,(x\Omega|y\Omega) + \lambda\,(y\Omega|x\Omega)$$
dla wszystkich $y \in M_{\text{s.s.}}$. Jeśli teraz $y = y_1 + \mathrm{i}y_2$, gdzie $y_1, y_2 \in M_{\text{s.s.}}$, to
$$\begin{aligned}(x'\Omega|y\Omega) = (x'\Omega|y_1 + \mathrm{i}y_2\Omega) &= (x'\Omega|y_1\Omega) + \mathrm{i}\,(x'\Omega|y_2\Omega)\\ &= \overline{\lambda}\,(x\Omega|y_1\Omega) + \lambda\,(y_1\Omega|x\Omega) + \mathrm{i}\big(\overline{\lambda}\,(x\Omega|y_2\Omega) + \lambda\,(y_2\Omega|x\Omega)\big)\\ &= \overline{\lambda}\,(x\Omega|(y_1 + \mathrm{i}y_2)\Omega) + \lambda\,((y_1 - \mathrm{i}y_2)\Omega|x\Omega)\end{aligned}$$
czyli
$$(x'\Omega|y\Omega) = \overline{\lambda}\,(x\Omega|y\Omega) + \lambda\,(y^*\Omega|x\Omega)$$

[3]Jeśli $x' = x'_1 + \mathrm{i}x'_2$ przy $x'_1, x'_2 \in M'_{\text{s.s.}}$ oraz
$$Xx'_iX = \lambda Rx_i(2\mathbb{1} - R) + \overline{\lambda}(2\mathbb{1} - R)x_iR, \qquad (i = 1,2)$$
dla pewnych $x_1, x_2 \in M_{\text{s.s.}}$, to kładąc $x = x_1 - \mathrm{i}x_2$ mamy
$$Xx'X = \lambda Rx(2\mathbb{1} - R) + \overline{\lambda}(2\mathbb{1} - R)xR.$$

dla wszystkich $y \in M$. Wstawiając z^*y w miejsce y otrzymujemy

$$(x'\Omega|z^*y\Omega) = \overline{\lambda}\,(x\Omega|z^*y\Omega) + \lambda\,(z\Omega|yx\Omega)$$

czy też

$$(x'z\Omega|y\Omega) = \overline{\lambda}\,(zx\Omega|y\Omega) + \lambda\,(z\Omega|yx\Omega) \tag{7}$$

dla wszystkich $y, z \in M$.

Niech $y', z' \in M'$. Na mocy wniosku 6.2 istnieją $y, z \in M$ takie, że

$$Xy'\Omega = y\Omega, \qquad Xz'\Omega = z\Omega.$$

Dla takich y, z mamy dzięki (7)

$$(x'Xz'\Omega|Xy'\Omega) = \overline{\lambda}\,(zx\Omega|Xy'\Omega) + \lambda\,(Xz'\Omega|yx\Omega)\,.$$

Przekształcamy to równanie (pamiętając, że $x' = x'^*$)

$$\begin{aligned}(TJz'\Omega|x'TJy'\Omega) &= \overline{\lambda}\,(zx\Omega|JTy'\Omega) + \lambda\,(JTz'\Omega|yx\Omega)\,,\\ (Jz'\Omega|Tx'TJy'\Omega) &= \overline{\lambda}\,(Ty'\Omega|Jzx\Omega) + \lambda\,(Jyx\Omega|Tz'\Omega)\,,\\ (JTx'TJy'\Omega|z'\Omega) &= \overline{\lambda}\,(y'\Omega|TJzx\Omega) + \lambda\,(TJyx\Omega|z'\Omega)\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Przypominamy teraz, że

- dla $u \in M_{\text{s.s.}}$ mamy $Pu\Omega = u\Omega$, a więc
$$TJu\Omega = Xu\Omega = (P-Q)u\Omega = (2\mathbb{1} - P - Q)u\Omega = (2\mathbb{1} - R)u\Omega.$$
- dla $u' \in M'_{\text{s.s.}}$ mamy $Qu'\Omega = 0$, więc
$$TJu'\Omega = Xu'\Omega = (P-Q)u'\Omega = (P+Q)u'\Omega = Ru'\Omega.$$

Stąd wynika, że

- dla $u \in M$ mamy
$$TJu\Omega = (2\mathbb{1} - R)u^*\Omega.$$
- dla $u' \in M'$
$$TJu'\Omega = Ru'^*\Omega.$$

W świetle powyższych faktów mamy (nadal $x = x^*$)

$$TJzx\Omega = (2\mathbb{1}-R)x^*z^*\Omega = (2\mathbb{1}-R)xXz'^*\Omega = (2\mathbb{1}-R)xTJz'\Omega = (2\mathbb{1}-R)xRz'\Omega.$$

$$TJyx\Omega = (2\mathbb{1}-R)x^*y^*\Omega = (2\mathbb{1}-R)x^*Xy'^*\Omega = (2\mathbb{1}-R)xTJy'^*\Omega = (2\mathbb{1}-R)xRy'\Omega.$$

Wstawiamy tę informację do ostatniego z równań (8):

$$\begin{aligned}(JTx'TJy'\Omega|z'\Omega) &= \overline{\lambda}\,(y'\Omega|TJzx\Omega) + \lambda\,(TJyx\Omega|z'\Omega)\,,\\ (JTx'TJy'\Omega|z'\Omega) &= \overline{\lambda}\,(y'\Omega|(2\mathbb{1}-R)xRz'\Omega) + \lambda\,((2\mathbb{1}-R)xRy'\Omega|z'\Omega)\,,\end{aligned}$$

Skoro podprzestrzeń $M'\Omega$ jest gęsta w H mamy

$$(Xx'X\eta|\zeta) = (JTx'TJ\eta|\zeta) = \overline{\lambda}\,(\eta|(2\mathbb{1}-R)xR\zeta) + \lambda\,((2\mathbb{1}-R)xR\eta|\zeta)\,,$$

czyli ($x = x^*$)

$$(Xx'X\eta|\zeta) = (\lambda Rx(2\mathbb{1}-R)\eta|\zeta) + \big(\overline{\lambda}(2\mathbb{1}-R)xR\eta\big|\zeta\big)\,,$$

co daje

$$Xx'X = \lambda Rx(2\mathbb{1}-R) + \overline{\lambda}(2\mathbb{1}-R)xR.$$

□

Stwierdzenie 6.4. *Niech* $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}$ *dla pewnego* $\phi \in\,]-\pi, \pi[$. *Weźmy* $x' \in M'$ *i niech* $x \in M$ *będzie taki, że*

$$Xx'X = \lambda Rx(2\mathbb{1}-R) + \overline{\lambda}(2\mathbb{1}-R)xR.$$

Wówczas

$$x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t} + \mathrm{e}^{-\pi t}} \Delta^{\mathrm{i}t} Jx'J\Delta^{-\mathrm{i}t}\, dt.$$

Dowód. Ustalmy $\xi,\eta\in H$ i zdefiniujmy funkcję $f\colon \left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|\Re z|\leq\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{C}$ kładąc

$$f(z)=\left(\eta\middle|R^{z+\frac{1}{2}}(2\mathbb{1}-R)^{-z+\frac{1}{2}}x(2\mathbb{1}-R)^{z+\frac{1}{2}}R^{-z+\frac{1}{2}}\xi\right).$$

(Pamiętamy funkcja $w\mapsto A^{\mathrm{i}w}$ jest dobrze określona dla $\Im w\leq 0$ i holomorficzna dla $\Im w<0$. Mamy $z+\frac{1}{2}=\mathrm{i}\bigl(-\mathrm{i}z-\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)$ oraz $-z+\frac{1}{2}=\mathrm{i}\bigl(\mathrm{i}z-\frac{\mathrm{i}}{2}\bigr)$ tak więc oba wykładniki są postaci $\mathrm{i}w$ dla pewnego w takiego, że $\Im w\leq 0$.) Funkcja f jest ciągła i ograniczona na pionowym pasku $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|\Re z|\leq\frac{1}{2}\right\}$ i holomorficzna na jego wnętrzu.

Zauważmy dalej, że

$$\begin{aligned}\lambda f\bigl(\mathrm{i}t+\tfrac{1}{2}\bigr)&=\lambda\left(\eta\middle|\Delta^{\mathrm{i}t}Rx(2\mathbb{1}-R)\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi\right),\\ \overline{\lambda}f\bigl(\mathrm{i}t-\tfrac{1}{2}\bigr)&=\overline{\lambda}\left(\eta\middle|\Delta^{\mathrm{i}t}(2\mathbb{1}-R)xR\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi\right).\end{aligned}$$

dla wszystkich $t\in\mathbb{R}$.

Na mocy twierdzenia DI.3 mamy

$$f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\bigl(\lambda f\bigl(\mathrm{i}t+\tfrac{1}{2}\bigr)+\overline{\lambda}f\bigl(\mathrm{i}t-\tfrac{1}{2}\bigr)\bigr)\,dt$$

Z jednej strony

$$f(0)=\left(\eta\middle|R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1}-R)^{\frac{1}{2}}x(2\mathbb{1}-R)^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}\xi\right)=(T\eta|xT\xi),$$

a z drugiej

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\bigl(\lambda f\bigl(\mathrm{i}t+\tfrac{1}{2}\bigr)+\overline{\lambda}f\bigl(\mathrm{i}t-\tfrac{1}{2}\bigr)\bigr)\,dt\\ &\qquad=\left(\eta\middle|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}\bigl(\lambda Rx(2\mathbb{1}-R)+\overline{\lambda}(2\mathbb{1}-R)xR\bigr)\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt\,\xi\right)\\ &\qquad=\left(\eta\middle|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}Xx'X\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt\,\xi\right)\\ &\qquad=\left(\eta\middle|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}TJx'JT\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt\,\xi\right)\\ &\qquad=\left(T\eta\middle|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}Jx'JT\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt\,T\xi\right).\end{aligned}$$

Tak więc

$$x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t}+\mathrm{e}^{-\pi t}}\Delta^{\mathrm{i}t}Jx'J\Delta^{-\mathrm{i}t}\,dt,$$

gdyż obraz operatora T jest gęsty w H. □

Stwierdzenie 6.5. *Dla każdego $x'\in M'$ i dowolnego $t\in\mathbb{R}$ mamy*

$$\Delta^{\mathrm{i}t}Jx'J\Delta^{-\mathrm{i}t}\in M. \tag{9}$$

Dowód. Ustalmy x'. Dla $\lambda=\mathrm{e}^{\frac{\phi}{2}}$ przy $\phi\in\,]-\pi,\pi[$ niech $x\in M$ będzie taki, że

$$Xx'X=\lambda Rx(2\mathbb{1}-R)+\overline{\lambda}(2\mathbb{1}-R)xR.$$

Niech $y'\in M'$ oraz $\xi,\eta\in H$ i niech

$$g(t)=\left(\eta\middle|y'\Delta^{\mathrm{i}t}Jx'J\Delta^{-\mathrm{i}t}\xi\right)-\left(\eta\middle|\Delta^{\mathrm{i}t}Jx'J\Delta^{-\mathrm{i}t}y'\xi\right).$$

Na mocy wzoru

$$x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t} + \mathrm{e}^{-\pi t}} \Delta^{\mathrm{i}t} J x' J \Delta^{-\mathrm{i}t} \, dt$$

mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t} + \mathrm{e}^{-\pi t}} g(t) \, dt = 0,$$

dla dowolnego $\phi \in]-\pi, \pi[$, bo y' komutuje z x.

Wynika stąd, że $g = 0$. Istotnie, jeśli zdefiniujemy

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-zt}}{\mathrm{e}^{\pi t} + \mathrm{e}^{-\pi t}} g(t) \, dt$$

dla z takich, że $|\Re z| < \pi$, to f będzie funkcją holomorficzną w tym obszarze, znikajacą dla $z \in]-\pi, \pi[$. Wówczas f jest tożsamościowo równa zero. W szczególnosci $f(\mathrm{i}s) = 0$ dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$, czyli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}}{\mathrm{e}^{\pi t} + \mathrm{e}^{-\pi t}} g(t) \, dt = 0$$

dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$. To oznacza, że funkcja,

$$t \longmapsto \frac{g(t)}{\mathrm{e}^{\pi t} + \mathrm{e}^{-\pi t}}$$

ma zerową transformatę Fouriera. Tak więc $g = 0$ i jest tak dla wszystkich $\xi, \eta \in H$. Stąd y' komutuje z $\Delta^{\mathrm{i}t} J x' J \Delta^{-\mathrm{i}t}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. □

Wniosek 6.6. *Mamy $JM'J \subset M$.*

Dowód. Kładziemy $t = 0$ we wzorze (9). □

Stwierdzenie 6.7. *Mamy $JMJ \subset M'$.*

Dowód. Na początek wykażemy, że $J\Omega = \Omega$. Mamy $\Omega \in M\Omega \subset \mathscr{K}$, ale też $\Omega \in M'\Omega \subset (\mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp_\Re}$. Tak więc $\Omega \in \mathscr{K} \cap \mathrm{i}\mathscr{K}^{\perp_\Re}$. Stąd $P\Omega = \Omega$ i $Q\Omega = 0$. Tym samym

$$R\Omega = \Omega \qquad \text{oraz} \qquad X\Omega = \Omega.$$

Skoro $T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}$, również $T\Omega = \Omega$, a więc ($X = JT$) mamy $J\Omega = \Omega$.

Dalej Zauwazmy, że skoro $J\mathscr{K} = (\mathrm{i}\mathscr{K})^{\perp_\Re}$, dla każdego $x, y \in M_{\mathrm{s.s.}}$ mamy

$$(y\Omega | Jx\Omega) \in \mathbb{R}.$$

Istotnie: $(y\Omega | Jx\Omega) = \Re\,(y\Omega | Jx\Omega) + \mathrm{i}\Im\,(y\Omega | Jx\Omega)$, a

$$\Im\,(y\Omega | Jx\Omega) = \Re\,(\mathrm{i}y\Omega | Jx\Omega) = 0.$$

Mamy dalej, na mocy samosprzężoności J,

$$(y\Omega | Jx\Omega) = (Jx\Omega | y\Omega) = (Jy\Omega | x\Omega).$$

Teraz przekształcamy obie strony tego wzoru

$$(y\Omega | Jx\Omega) = (Jy\Omega | x\Omega),$$
$$(y\Omega | JxJ\Omega) = (JyJ\Omega | x\Omega),$$
$$(\Omega | yJxJ\Omega) = (xJyJ\Omega | \Omega)$$

(x i y są samosprzężone). Teraz dla $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M_{\text{s.s.}}$ i $x = x_1 + \mathrm{i}x_2$, $y = x_1 + \mathrm{i}y_2$ mamy

$$\begin{aligned}
(\Omega|yJxJ\Omega) &= (\Omega|(y_1 + \mathrm{i}y_2)JxJ\Omega)\\
&= (\Omega|y_1JxJ\Omega) + \mathrm{i}\,(\Omega|y_2JxJ\Omega)\\
&= (\Omega|y_1J(x_1 + \mathrm{i}x_2)J\Omega) + \mathrm{i}\,(\Omega|y_2J(x_1 + \mathrm{i}x_2)J\Omega)\\
&= (\Omega|y_1Jx_1J\Omega) - \mathrm{i}\,(\Omega|y_1Jx_2J\Omega) + \mathrm{i}\,(\Omega|y_2Jx_1J\Omega) + (\Omega|y_2Jx_2J\Omega)\\
&= (x_1Jy_1J\Omega|\Omega) - \mathrm{i}\,(x_2Jy_1J\Omega|\Omega) + \mathrm{i}\,(x_1Jy_2J\Omega|\Omega) + (x_2Jy_2J\Omega|\Omega)\\
&= ((x_1 + \mathrm{i}x_2)Jy_1J\Omega|\Omega) + ((x_1 + \mathrm{i}x_2)J\mathrm{i}y_2J\Omega|\Omega)\\
&= (xJyJ\Omega|\Omega)\,,
\end{aligned}$$

czyli

$$(\Omega|yJxJ\Omega) = (xJyJ\Omega|\Omega)$$

dla wszystkich $x, y \in M$. Na mocy wniosku (6.6) możemy zamiast y położyć $yJy'J$ dla dowolnego $y' \in M'$. Zatem

$$(\Omega|y(Jy'J)(JxJ)\Omega) = (x(JyJ)y'JJ\Omega|\Omega)$$

dla dowolnych $x, y \in M$ oraz $y' \in M'$. Przyjmując ponownie, że x i y są samosprzężone możemy nieco uprościć powyższe wyrażenie, gdyż wtedy lewa strona jest równa

$$(\Omega|yJy'x\Omega) = (y\Omega|Jy'x\Omega) = (y'x\Omega|Jy\Omega) = (xy'\Omega|Jy\Omega) = (xy'\Omega|JyJ\Omega) = (y'\Omega|xJyJ\Omega)\,,$$

natomiast prawa

$$(x(JyJ)y'\Omega|\Omega) = (JyJy'\Omega|x\Omega) = (Jx\Omega|yJy'\Omega) = (yJx\Omega|Jy'\Omega) = (y'\Omega|JyJx\Omega)\,.$$

Tym samym

$$(y'\Omega|xJyJ\Omega) = (y'\Omega|JyJx\Omega)\,.$$

dla wszystkich $x, y \in M_{\text{s.s.}}$ i $y' \in M'$. Skoro $M'\Omega$ jest gęstą podprzestrzenią w H otrzymujemy

$$xJyJ\Omega = JyJx\Omega.$$

Dla wszystkich $x, y \in M_{\text{s.s.}}$. Podobnie jak poprzednio znajdujemy, że powyższa równość zachodzi dla wszystkich $x, y \in M$.

Teraz wstawiamy xz zamiast z (dla $z \in M$), by otrzymać

$$xzJyJ\Omega = JyJxz\Omega.$$

Ale $zJyJ\Omega = JyJz\Omega$, czyli mamy

$$xJyJz\Omega = JyJxz\Omega.$$

dla wszystkich $x, y, z \in M$. Skoro $\overline{M\Omega} = H$, dostajemy

$$xJyJ = JyJx$$

dla wszytskich $x, y \in M$. W szczególności $JMJ \subset M'$. $\square$

Dowód twierdzenia 5.1. Punkt (2) wynika z wniosku 6.6 i stwierdzenia 6.7. Teraz punkt (1) wynika ze stwierdzenia 6.5. $\square$

Twierdzenie 6.8. *Niech M będzie algebrą von Neumanna i niech ω będzie wiernym stanem normalnym na M. Wówczas istnieje jedyna σ-słabo ciągła jednoparametrowa grupa $(\sigma_t^\omega)_{t\in\mathbb{R}}$ automorfizmów M spełniająca warunek K.M.S. względem ω, tj. taka, że dla dowolnych $x, y \in M$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja*

$$f\colon \bigl\{z \in \mathbb{C}\,\big|\,0 \leq \Im z \leq 1\bigr\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorficzna na $\{z \in \mathbb{C}\,|\,0 < \Im z < 1\}$ taka, że

$$f(t) = \omega\bigl(y\sigma_t^\omega(x)\bigr),$$
$$f(t + \mathrm{i}) = \omega\bigl(\sigma_t^\omega(x)y\bigr)$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Jeśli ω jest postaci

$$\omega(a) = (\Omega|a\Omega)\,, \qquad (a \in M),$$

dla cyklicznego i separującego wektora Ω, wówczas dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$

$$\sigma_t^{\omega}(x) = \Delta^{\mathrm{i}t} x \Delta^{-\mathrm{i}t}$$

gdzie $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$ jest grupą modularną stowarzyszoną z rzeczywistą podprzestrzenią $\mathscr{K} = \overline{M\Omega}$.

Dowód. Ponieważ reprezentacja GNS związana ze stanem ω jest normalnym izomorfizmem (na swój obraz) możemy założyć, że $M \subset \mathrm{B}(H)$ i ω jest postaci $\omega(a) = (\Omega|a\Omega)$ dla pewnego wektora $\Omega \in H$ cyklicznego i separującego dla M.

Niech $\mathscr{K} = \overline{M_{\text{s.s.}}\Omega}$ i niech $(\Delta^{\mathrm{i}t})_{t\in\mathbb{R}}$ będzie stowarzyszoną grupą modularną. Wówczas możemy dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zdefiniować automorfizm σ_t^{ω} algebry M kładąc

$$\sigma_t^{\omega}(x) = \Delta^{\mathrm{i}t} x \Delta^{-\mathrm{i}t}.$$

Jest jasne, że dla ustalonego $x \in M$ funkcja $x \mapsto \sigma_t^{\omega}(x)$ jest σ-słabo ciągła (jest ewidentnie mocno ciągła w topologii $\mathrm{B}(H)$). Jest również jasne, że $(\sigma_t^{\omega})_{t\in\mathbb{R}}$ jest jednoparametrową grupą automorfizmów M.

Przypomnijmy, że $R\Omega = \Omega$, więc $\Delta^{\mathrm{i}t}\Omega = \Omega$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Dla $x, y \in M_{\text{s.s.}}$ para wektorów $(y\Omega, x\Omega)$ należy do $\mathscr{K} \times \mathscr{K}$, a więc istnieje odpowiadająca im funkcja K.M.S.

$$f\colon \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \Im z \leq 1\} \to \mathbb{C}$$

(ciągła i ograniczona, holomorficzna na wnetrzu paska). Mamy dla $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \big(y\Omega\big|\Delta^{\mathrm{i}t}x\Omega\big) = f(t) = \big(y\Omega\big|\Delta^{\mathrm{i}t}x\Delta^{-\mathrm{i}t}\Omega\big) = \omega\big(y\sigma_t^{\omega}(x)\big)$$

oraz

$$f(t+\mathrm{i}) = \overline{f(t)} = \overline{\omega\big(y\sigma_t^{\omega}(x)\big)} = \omega\big(\big(y\sigma_t^{\omega}(x)\big)^*\big) = \omega\big(\sigma_t^{\omega}(x)y\big)$$

Teraz niech $a, b \in M$ i $a = x_1 + \mathrm{i}x_2$, $b = y_1 + \mathrm{i}y_2$, dla $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M_{\text{s.s.}}$. Niech $f_{i,j}$ będzie odpowiednią funkcją K.M.S. dla (y_i, x_j) przy $i, j = 1, 2$:

$$f_{i,j}(t) = \omega\big(y_i\sigma_t^{\omega}(x_j)\big), \qquad f_{i,j}(t+\mathrm{i}) = \omega\big(\sigma_t^{\omega}(x_j)y_i\big).$$

Wówczas $f = f_{1,1} - f_{2,2} + \mathrm{i}(f_{1,2} + f_{2,1})$ jest funkcją K.M.S. dla (y, x):

$$f(t) = \omega\big(y\sigma_t^{\omega}(x)\big), \qquad f(t+\mathrm{i}) = \omega\big(\sigma_t^{\omega}(x)y\big).$$

Innymi słowy $(\sigma_t^{\omega})_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem ω.

Niech teraz $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ będzie jednoparametrową grupą automorfizmów M spełniającą warunek K.M.S. względem ω. Wówczas stan ω jest niezmenniczy dla $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$: kładąc $y = \mathbb{1}$ w warunku K.M.S. uzyskujemy ciągłą i ograniczoną funkcję f na pasku taką, że $f(t) = f(t+\mathrm{i})$ dla wszytskich t — funkcja taka musi być stała.

Definiujemy wówczas jednoparametrową mocno ciągłą grupę $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ operatorów unitarnych na H wzorem

$$U_t x\Omega = \alpha_t(x)\Omega.$$

- Unitarność wynika z niezmienniczości ω:

$$(U_t x\Omega|U_t y\Omega) = (\Omega|\alpha_t(x^*y)\Omega) = \omega\big(\alpha_t(x^*y)\big) = \omega(x^*y) = (x\Omega|y\Omega)\,.$$

- Ciągłość wynika z ciągłości $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Istotnie, funkcja $t \mapsto U_t$ jest słabo ciągła, tj. dla wszystkich $\xi, \eta \in H$ funkcje $t \mapsto (\eta|U_t\xi)$ są ciągłe. Aby to sprawdzić wystarczy wykazać, że $(\eta|U_t\xi)$ dązy do $(\eta|\xi)$ gdy $t \to 0$, ponieważ

$$(\eta|U_{t_1}\xi) - (\eta|U_{t_2}\xi) = (\eta|(U_{t_1} - U_{t_2})\xi) = (U_{-t_2}\eta|U_{t_1-t_2}\xi - \xi)\,.$$

  Dla danych $\xi, \eta \in H$ istnieje $x \in M$ taki, że $\|x\Omega - \xi\| \leq \frac{\varepsilon}{3\|\eta\|}$. Zatem

$$\begin{aligned}\big|(\eta|U_t\xi) - (\eta|\xi)\big| &= \big|(\eta|U_t\xi - \xi)\big| \\ &\leq \big|(\eta|U_t\xi - U_t x\Omega)\big| + \big|(\eta|U_t x\Omega - x\Omega)\big| + \big|(\eta|x\Omega - \xi)\big| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{3} + \big|(\eta|(\alpha_t(x) - x)\xi)\big| + \tfrac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

  Skoro grupa $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ jest σ-słabo ciągła, funkcja $t \mapsto (\eta|(\alpha_t(x) - x)\xi)$ jest ciągła, a więc

$$\big|(\eta|(\alpha_t(x) - x)\xi)\big| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

  dla $|t|$ dostatecznie małych.

Mocna ciągłość $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ wynika ze standardowego argumentu:

$$\begin{aligned}\|U_t\xi-\xi\|^2 &= \|U_t\xi\|^2-(U_t\xi|\xi)-(\xi|U_t\xi)-\|\xi\|^2\\ &= \|\xi\|^2-(U_t\xi|\xi)-(\xi|U_t\xi)-\|\xi\|^2\\ &= 2\Re\,(\xi|U_t\xi)\,.\end{aligned}$$

Grupa $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ewidentnie implementuje automorfizmy $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$:

$$U_tyU_t^*x\Omega=U_ty\alpha_{-t}(x)\Omega=\alpha_t\big(y\alpha_{-t}(x)\big)\Omega=\alpha_t(y)x\Omega.$$

Skoro dla każdego $x,y\in M$ mamy funkcję f taką, że

$$f(t)=\omega\big(y\alpha_t(x)\big),\qquad f(t+\mathrm{i})=\omega\big(\alpha_t(x)y\big),$$

biorąc $x=x^*$ i $y=y^*$ otrzymujemy $f(t+\mathrm{i})=\overline{f(t)}$. Z drugiej strony

$$\omega\big(y\alpha_t(x)\big)=(\Omega|y\alpha_t(x)\Omega)=(\Omega|yU_txU_t^*\Omega)=(y\Omega|U_txU_t^*\Omega)=(y\Omega|U_tx\Omega)\,,$$

bo $U_s\Omega=\Omega$ dla wszystkich s. Innymi słowy grupa $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem podprzestrzeni $\mathscr{K}_0=M_{\mathrm{s.s.}}\Omega$. Z twierdzenia 4.6 wynika, że $U_t=\Delta^{\mathrm{i}t}$ dla wszytskich $t\in\mathbb{R}$. W szczególności

$$\alpha_t(x)=\Delta^{\mathrm{i}t}x\Delta^{-\mathrm{i}t}$$

dla wszystkich $x\in M$ i $t\in\mathbb{R}$. $\square$

Dodatek I: kilka słów o funkcjach holomorficznych

Twierdzenie DI.1 (Hadamard). *Niech* $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \Im z \leq 1\}$ *i niech*

$$f\colon P \longrightarrow \mathbb{C}$$

będzie ciągłą i ograniczoną funkcją, holomorficzną na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \Im z < 1\}$. *Niech*

$$A = \sup_{t \in \mathbb{R}} \big|f(t)\big|, \qquad B = \sup_{t \in \mathbb{R}} \big|f(t + \mathrm{i})\big|.$$

Wówczas dla dowolnego $z \in P$ *mamy*

$$\big|f(z)\big| \leq A^{1-\Im z} B^{\Im z}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję

$$\varphi\colon z \longmapsto f(z) A^{-(1+\mathrm{i}z)} B^{\mathrm{i}z}$$

Jest ona ciągła na P i analityczna na wnętrzu P. Ponadto

$$A^{-(1+\mathrm{i}z)} B^{\mathrm{i}z} = \exp\big(-(1 + \mathrm{i}z) \log A + \mathrm{i}z \log B\big),$$

czyli

$$\big|\varphi(z)\big| = \big|f(z)\big| \exp\big((\Im z - 1) \log A - \Im z \log B\big) = \big|f(z)\big| A^{(\Im z - 1)} B^{-\Im z}.$$

Zatem φ jest ograniczona na P oraz

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \big|\varphi(t)\big| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \big|\varphi(t + \mathrm{i})\big| = 1.$$

Wykażemy, że $\big|\varphi(z)\big| \leq 1$ dla wszytskich $z \in P$. Jeśli $\varphi(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$, to fakt ten wynika z zasady maksimum.[4]

Jeśli $\varphi(z)$ nie dąży do 0 w nieskończoności, rozważmy

$$\varphi_n(z) = \varphi(z) \exp\big(\tfrac{-1-z^2}{n}\big).$$

Mamy $\big|\exp\big(\tfrac{-1-z^2}{n}\big)\big| = \exp\big(\tfrac{(\Im z)^2 - 1 - (\Re z)^2}{n}\big) \leq 1$ i oczywiście dla każdego z

$$\varphi_n(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} 0.$$

Zatem $\big|\varphi_n(z)\big| \leq 1$ dla wszystkich $z \in P$. Ponato $\varphi_n(z) \xrightarrow[n \to \infty]{} \varphi(z)$, z więc mamy także $\big|\varphi_n(z)\big| \leq 1$ dla wszystkich $z \in P$. $\square$

Ponieważ dla $A, B > 0$ funkcja

$$u\colon [0, 1] \ni \theta \longmapsto A^{1-\theta} B^{\theta}$$

jest wypkła ($u'' = (\log B - \log A)^2 u > 0$), mamy $u(\theta) \leq \max\big\{u(0), u(1)\big\}$, a więc dostajemy

Wniosek DI.2. *Niech* $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq \Im z \leq 1\}$ *i niech*

$$f\colon P \longrightarrow \mathbb{C}$$

będzie ciągłą i ograniczoną funkcją, holomorficzną na $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \Im z < 1\}$. *Wówczas dla każdego* $z \in P$

$$\big|f(z)\big| \leq \max\big\{\sup_{t \in \mathbb{R}} \big|f(t)\big|, \sup_{t \in \mathbb{R}} \big|f(t + \mathrm{i})\big|\big\}.$$

Twierdzenie DI.3. *Niech* $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}$ *dla pewnego* $\phi \in]-\pi, \pi[$. *Niech* f *będzie funkcją ciągłą i ograniczoną na pasku* $\big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |\Re z| \leq \frac{1}{2}\big\}$, *holomorficzną na jego wnętrzu. Wówczas*

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\phi t}}{\mathrm{e}^{\pi t} + \mathrm{e}^{-\pi t}} \big(\lambda f\big(\mathrm{i}t + \tfrac{1}{2}\big) + \overline{\lambda} f\big(\mathrm{i}t - \tfrac{1}{2}\big)\big)\, dt$$

[4] Przez $\varphi(z) \xrightarrow[z \to \infty]{} 0$ rozumiemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje R takie, że $|z| > R$ implikuje $\big|\varphi(z)\big| < \varepsilon$.

Dowód. Definiujemy $g(z) = \pi e^{i\phi z}\frac{f(z)}{\sin \pi z}$. Wówczas g ma biegun pierwszegu rzędu w $z = 0$ z residuum $f(0)$. Ponadto $g(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$, bo f jest ograniczona, a $|\phi| < \pi$. Zatem

$$f(0) = \tfrac{1}{2\pi i}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g\bigl(it + \tfrac{1}{2}\bigr)\, i\, dt - \int_{-\infty}^{+\infty} g\bigl(it - \tfrac{1}{2}\bigr)\, i\, dt\right).$$

Wzór, którego dowodzimy wynika z faktu, że

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2\pi i} g\bigl(it + \tfrac{1}{2}\bigr) &= \tfrac{1}{i}\lambda \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} f\bigl(it + \tfrac{1}{2}\bigr), \\ -\tfrac{1}{2\pi i} g\bigl(it - \tfrac{1}{2}\bigr) &= \tfrac{1}{i}\overline{\lambda} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} f\bigl(it - \tfrac{1}{2}\bigr). \end{aligned}$$

□

Dodatek II: rozkład biegunowy nad $\mathbb{R}$

Klasyczny wynik na temat rozkładu biegunowego mozna sformułować następująco:

Twierdzenie DII.1. *Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta i niech $T \in \mathrm{B}(H)$. Wówczas istnieje dokładnie jedna para operatorów (u, t) taka, że*

- $t \geq 0$,
- $T = ut$,
- $u^*u = \chi(t > 0)$.

Ponadto $t = f(T)$, gdzie $f(r) = |r|$ dla wszystkich $r \in \mathbb{R}$.

Przypomnijmy, że z faktu, że u^*u jest rzutem wynika, że uu^* także jest rzutem, a więc u jest częściową izometrią. Tradycyjnie piszemy rozkład biegunowy jako $T = u|T|$.

Jeśli T w powyższym twierdzeniu jest operatorem samosprzężonym (czy choć normalnym), to także u jest funkcją od T. W szczególności T, $|T|$ i u są parami przemienne. Pamiętamy, że u^*u jest rzutem na dopełnienie ortogonalne $\ker |T| = \ker T$. Gdy T jest samosprzężony, to $\ker T$ jest dopełnieniem ortogonalnym obrazu T. W szczególności jeśli $\ker T = \{0\}$, to u jest operatorme unitarnym. Łatwo również sprawdzić, że u jest operatorem samosprzężonym (u jest funkcją od T przyjmujacą jedynie rzeczywiste wartosci). Tak więc mamy następującą wersję twoerdzenia o rozkładzie biegunowym dla operatora samosprzężonego o trywialnym jądrze:

Niech T będzie smosprzężonym operatorem na zespolonej przestrzenie Hilberta H takim, że $\ker T = \{0\}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden operator u taki, że $u^*u = \mathbb{1}$ oraz $T = u|T|$. Ponadto u jest przemienny z T i $|T|$ oraz $u^2 = \mathbb{1}$.

Rozważymy teraz wersję powyższego twierdzenia dla rzeczywistych przestrzeni Hilberta. Niech $\mathscr{K}$ będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta. Wowczas możemy rozwazyć jej kompleksyfikację $H = \mathscr{K} + i\mathscr{K}$, którą jako przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ identyfikujemy z sumą prostą dwóch kopii $\mathscr{K}$, a strukturę zespolonej przestrzeni Hilberta nadajemy jej w nastepujący sposób: piszemy $\xi_1 + i\xi_2$ zamiast (ξ_1, ξ_2) i kładziemy

$$\begin{aligned} i(\xi_1 + i\xi_2) &= -\xi_2 + i\xi_1, && \xi_1, \xi_2 \in \mathscr{K}, \\ (\xi_1 + i\xi_2 | \eta_1 + i\eta_2)_H &= (\xi_1|\eta_1)_{\mathscr{K}} + (\xi_2|\eta_2)_{\mathscr{K}} + i\bigl((\xi_1|\eta_2)_{\mathscr{K}} - (\xi_2|\eta_1)_{\mathscr{K}}\bigr) && \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathscr{K}, \end{aligned}$$

Możemy teraz rozważyć odwzorowanie

$$\iota\colon \mathrm{B}(\mathscr{K}) \longrightarrow \mathrm{B}(H)$$

dane przez $\iota(a)(\xi_1 + i\xi_2) = a\xi_1 + ia\xi_2$. Jest ono $\mathbb{R}$-liniowe i multyplikatywne. Ponadto $\iota(a)^* = \iota(a^*)$ (sprzężenie po lewej stronie jest względem zespolonego iloczynu skalarnego na H, a po prawej względem rzeczywistego iloczynu skalarnego na $\mathscr{K}$). Łatwo również sprawdzić bezpośrednio, że zachowuje ono dodatniość (definiowaną w $\mathrm{B}(\mathscr{K})$ i $\mathrm{B}(H)$ przez elementy macierzowe względem odpowiednich iloczynów skalarnych).

Zauważmy wreszcie, że łatwo opisać obraz odwzorowania ι. Niech P będzie operatorem

$$H \ni \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2 \longmapsto \xi_1 + \mathrm{i}0.$$

Wówczas P jest rzutem ortogonalnym na rzeczywistą podprzestrzeń $\{\xi_1 + \mathrm{i}0 | \xi_1 \in \mathscr{K}\} \subset H$ względem iloczynu skalarnego $\Re\left(\cdot|\cdot\right)_H$. Nietrudno sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że operator $S \in \mathrm{B}(H)$ jest w obrazie odwzorowania ι wtedy i tylko wtedy, gdy $PS = SP$.

Niech teraz X będzie samosprzężonym operatorem na $\mathscr{K}$ i roważmy jego rozkład biegunowy $\iota(X) = u\big|\iota(X)\big|$. Ponieważ $\iota(X)$ komutuje z P, to samo jest prawdą dla $\big|\iota(X)\big|$ (bo jest to grabica wielomianów od $\iota(X)$) i u. Stąd

$$\big|\iota(X)\big| = \iota(T), \qquad u = \iota(J)$$

dla pewnych operatorów $T, J \in \mathrm{B}(\mathscr{K})$. Jest jasne, że $X = JT$ oraz, że T jest dodatni (i samosprzężony). Ponadto T i J komutują z X, a operator J jest samosprzężony i spełnia $J^2 = \mathbb{1}$.