Wykład 1

Przestrzenie Banacha.

♡ Symbolem $\mathbb{K}$ będziemy oznaczać ciało $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. W zastosowaniach będziemy zazwyczaj rozważać $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ale większość definicji formułuje się tak samo dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (i ten przypadek jest częstszy w bardziej zaawansowanych zastosowaniach).

♡ Niech X będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Funkcję

$$\|\cdot\| : X \ni x \longmapsto \|x\| \in [0, \infty[$$

nazywamy *normą,* jeśli

(1) $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ dla wszystkich $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dla wszystkich $x, y \in X$.

Przestrzeń X z wyróżnioną normą $\|\cdot\|$ nazywamy *przestrzenią z normą* i oznaczamy symbolem $(X, \|\cdot\|)$.

♡ Przykładami przestrzeni z normą są

- $X = \mathbb{K}^n$ i $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, gdzie $1 \leq p < \infty$ lub $\|x\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (dla $p = \infty$),
- $X = \mathrm{C}\big([0, 1]\big)$ i $\|f\| = \sup\limits_{0 \leq t \leq 1} \big|f(t)\big|$,
- $X = \mathrm{C}\big([0, 1]\big)$ i $\|f\| = \left(\int\limits_{0}^{1} \big|f(t)\big|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

♡ Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią z normą. Wówczas funkcja

$$d : X \times X \ni (x, y) \longmapsto d(x, y) = \|x - y\|$$

jest metryką na X. Przestrzeń z normą, która jest zupełna w tak zdefiniowanej metryce nazywamy *przestrzenią Banacha.*

♡ Niech S będzie zbiorem, a (Y, d) przestrzenią metryczną. Wiemy, że na zbiorze $\mathfrak{B}(S, Y)$ złożonym z ograniczonych odwzorowań $S \to Y$ możemy zdefiniować metrykę (jednostajną):

$$\rho(f, g) = \sup_{s \in S} d\big(f(s), g(s)\big).$$

Jeśli Y jest przestrzenią wektorową z normą $\|\cdot\|$ i d pochodzi od tej normy, to $\mathfrak{B}(S, Y)$ jest przestrzenią wektorową z normą:

$$\|f\| = \sup_{s \in S} \big\|f(s)\big\|.$$

Wiemy też, że jeśli (Y, d) jest przestrzenią zupełną, to $\mathfrak{B}(S, Y)$ także jest zupełna. Innymi słowy mamy:

Stwierdzenie 1. *Niech Y będzie przestrzenią z normą. Wówczas $\mathfrak{B}(S, Y)$ jest przestrzenią z normą. Ponadto jeśli Y jest przestrzenią Banacha, to $\mathfrak{B}(S, Y)$ jest przestrzenią Banacha.*

Jeśli Z jest przestrzenią topologiczną, to $\mathrm{C}_b(Z) = \mathrm{C}(Z) \cap \mathfrak{B}(Z, \mathbb{C})$ jest przestrzenią Banacha. Wynika to z faktu, że granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funckją ciągłą. Zauważmy, że jeśli Z jest zwarta, to $\mathrm{C}_b(Z) = \mathrm{C}(Z)$.

Stwierdzenie 2. *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią z normą. Wówczas odwzorowania*

$$X \times X \ni (x, y) \longmapsto x + y \in X,$$
$$\mathbb{K} \times X \ni (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \in X$$

są ciągłe.

Dowód. Niech $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_\infty$ i $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_\infty$ w przestrzeni X. Mamy

$$\big\|(x_n + y_n) - (x_\infty + y_\infty)\big\| \le \|x_n - x_\infty\| + \|y_n - y_\infty\|$$

co pokazuje, że ciąg wektorów $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w X do wektora $x_\infty + y_\infty$.

Dalej, jeśli $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_\infty$ w $\mathbb{K}$, to

$$\begin{aligned}\|\lambda_n x_n - \lambda_\infty x_\infty\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda_\infty x_n + \lambda_\infty x_n - \lambda_\infty x_\infty\| \\ &\le \|\lambda_n x_n - \lambda_\infty x_n\| + \|\lambda_\infty x_n - \lambda_\infty x_\infty\| \\ &\le |\lambda_n - \lambda_\infty|\|x_n\| + |\lambda_\infty|\|x_n - x_\infty\| \\ &\le |\lambda_n - \lambda_\infty| \sup_{m\in\mathbb{N}}\big\{\|x_m\|\big\} + |\lambda_\infty|\|x_n - x_\infty\|,\end{aligned}$$

co pokazuje, że $\lambda_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_\infty x_\infty$ w przestrzeni X. □

♡ Przestrzeń z normą $\big(X, \|\cdot\|\big)$ jest przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu wektorów $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z przestrzeni X takiego, że $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny w X.

♡ Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią z normą. Wówczas funkcja $X \ni x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ jest ciągła.

Odwzorowania liniowe ograniczone.

Twierdzenie 3. *Niech X i Y będą przestrzeniami z normą i niech $T : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) *T jest ciągłe,*
(2) *T jest ciągłe w 0,*
(3) $\sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| < \infty$.

Dowód. Wynikanie "(1)⇒(2)" jest jasne.

"(2)⇒(3)": Załóżmy, że $\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\| = +\infty$. Innymi słowy istnieje ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wektorów z przestrzeni X o normie mniejszej lub równej 1 taki, że

$$\|Tx_n\| \ge n.$$

Niech $z_n = \frac{x_n}{n}$. Mamy $\|z_n\| \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, a więc $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Z drugiej strony

$$\|Tz_n\| = \tfrac{1}{n}\|Tx_n\| > 1,$$

co oznacza, że ciąg $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nie dąży do $0 \in Y$. Stąd T nie jest ciągłe w 0.

"(3)⇒(1)": Niech $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem wektorów z X zbieżnym do $x_0 \in X$. Mamy

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|x_n - x_0\|\Big\|T\tfrac{x_n - x_0}{\|x_n - x_0\|}\Big\| \le \|x_n - x_0\| \sup_{\|z\|\le 1}\|Tz\|.$$

Jeśli $\sup_{\|z\|\le 1}\|Tz\| < \infty$, to $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Tx_0$. □

♡ Niech X i Y będą przestrzeniami z normą. Operator liniowy $T : X \to Y$ spełniający

$$\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\| < \infty$$

nazywamy *ograniczonym.* Zbiór operatorów ograniczonych $X \to Y$ oznaczamy symbolem $\mathrm{B}(X, Y)$.

Stwierdzenie 4. *Zbiór $\mathrm{B}(X, Y)$ jest podprzestrzenią w przestrzeni wszystkich operatorów liniowych $X \to Y$. Ponadto*

$$\|T\| \sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|$$

jest normą na $\mathrm{B}(X, Y)$.

♡ Stwierdzenie 4 można łatwo udowodnić bezpośrednim rachunkiem. Jednak można też spojrzeć na nie w następujący sposób: dla każdego $T \in \mathrm{B}(X,Y)$ niech $\jmath T$ oznacza operator T obcięty do

$$\overline{\mathrm{K}}(0,1) = \bigl\{x \in X \bigm| \|x\| \leq 1\bigr\}$$

(kula domknięta o środku w 0 i promieniu 1). Wówczas $\jmath\colon \mathrm{B}(X,Y) \to \mathfrak{B}\bigl(\overline{\mathrm{K}}(0,1),Y\bigr)$ jest różnowartościowym odwzorowaniem liniowym. Ponadto

$$\|T\| = \|\jmath T\|,$$

gdzie po prawej stronie mamy normę w przestrzeni (z normą) $\mathfrak{B}\bigl(\overline{\mathrm{K}}(0,1),Y\bigr)$. Możemy więc traktować $\mathrm{B}(X,Y)$ jako podprzestrzeń $\mathfrak{B}\bigl(\overline{\mathrm{K}}(0,1),Y\bigr)$, a wówczas norma operatora jest po prostu normą tego operatora jako funkcji ograniczonej na $\overline{\mathrm{K}}(0,1)$.

Przestrzeń odwzorowań w przestrzeń Banacha.

Twierdzenie 5. *Niech X będzie przestrzenią z normą i niech Y będzie przestrzenią Banacha. Wówczas $\mathrm{B}(X,Y)$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Niech $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathrm{B}(X,Y)$. Dla każdego $x \in X$ ciąg $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego:

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|.$$

Istnieje więc granica $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Oznaczając tę granicę przez Tx otrzymujemy

$$X \ni x \longmapsto Tx \in Y.$$

Sprawdzamy, że T jest odwzorowaniem liniowym: mamy

$$T(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \beta \lim_{n\to\infty} T_n y = \alpha Tx + \beta Ty$$

dla wszystkich $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Teraz zauważmy, że T jest granicą punktową ciągu odwzorowań $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ z X do Y. ym bardziej T obcięte do $\overline{\mathrm{K}}(0,1)$ jest granicą punktową ciągu $(\imath T_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Z drugiej strony ciąg $(\imath T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha $\mathfrak{B}\bigl(\overline{\mathrm{K}}(0,1),Y\bigr)$, bo norma w $\mathrm{B}(X,Y)$ jest identyczna z tą w $\mathfrak{B}\bigl(\overline{\mathrm{K}}(0,1),Y\bigr)$. Zatem ciąg ten jest zbieżny do pewnej ograniczonej funcji F na $\overline{\mathrm{K}}(0,1)$ w metryce przestrzeni $\mathfrak{B}\bigl(\overline{\mathrm{K}}(0,1),Y\bigr)$, czyli jednostajnie. Nietrudno się teraz przekonać, że F jest równa obcięciu funckji liniowej $T\colon X \to Y$ do $\overline{\mathrm{K}}(0,1)$. Stąd:

- T jest operatorem ograniczonym,
- ciąg $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do T jednostajnie na $\overline{\mathrm{K}}(0,1)$.

Oczywiście drugi z powuższych faktów oznacza, że $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ w normie przestrzeni $\mathrm{B}(X,Y)$. □