

Twierdzenie Hahna-Banacha.

♡ Twierdzenie, którym się teraz zajmiemy mówi, że można rozszerzać funkcjonały zdefiniowane na podprzestrzeni przestrzeni wektorowej. Co więcej, jeśli wyjściowy funkcjonal jest majoryzowany przez pewną ustaloną funkcję o specjalnych własnościach, to jego rozszerzenie również jest przez nią majoryzowane. Ta ostatnia własność jest kluczowa w analizie.

Lemat 1. Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową i niech p będzie funkcją $X \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y)$ dla wszystkich $x, y \in X$ i $0 \leq t \leq 1$. Jeśli λ jest funkcjonalem zdefiniowanym na podprzestrzeni $M \subset X$ takim, że $\langle \lambda, x \rangle \leq p(x)$ dla wszystkich $x \in M$, wówczas istnieje funkcjonal Λ na X taki, że $\langle \Lambda, x \rangle \leq p(x)$ dla wszystkich $x \in X$ oraz $\langle \Lambda, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle$ dla wszystkich $x \in M$.

Dowód. Niech Y będzie podprzestrzenią w X i niech μ będzie funkcjonalem liniowym na Y takim, że $\langle \mu, y \rangle \leq p(y)$ dla wszystkich $y \in Y$. Niech $z \in X \setminus Y$ i niech $\tilde{Y} = \text{span}(Y \cup \{z\})$. Pokażemy, że istnieje rozszerzenie μ do funkcjonału $\tilde{\mu}$ na \tilde{Y} takie, że $\langle \tilde{\mu}, y + \alpha z \rangle \leq p(y + \alpha z)$ dla wszystkich $y \in Y$ i $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dla dowolnych $y_1, y_2 \in Y$ i $\alpha, \beta > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \beta \langle \mu, y_1 \rangle + \alpha \langle \mu, y_2 \rangle &= (\alpha + \beta) \left\langle \mu, \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_2 \right\rangle \\ &\leq (\alpha + \beta) p\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} y_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_2\right) \\ &= (\alpha + \beta) p\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} (y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} (y_2 + \beta z)\right) \\ &\leq \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z). \end{aligned}$$

Tak więc dla dowolnych $y_1, y_2 \in Y$ i $\alpha, \beta > 0$ zachodzi

$$\frac{1}{\alpha} (-p(y_1 - \alpha z) + \langle \mu, y_1 \rangle) \leq \frac{1}{\beta} (p(y_2 + \beta z) - \langle \mu, y_2 \rangle).$$

Oznacza to, że istnieje liczba rzeczywista a taka, że

$$\sup_{\substack{y \in Y \\ \alpha > 0}} \frac{1}{\alpha} (-p(y - \alpha z) + \langle \mu, y \rangle) \leq a \leq \inf_{\substack{y \in Y \\ \alpha > 0}} \frac{1}{\alpha} (p(y + \alpha z) - \langle \mu, y \rangle).$$

Możemy zatem zdefiniować rozszerzenie $\tilde{\mu}$ funkcjonału μ na \tilde{Y} kładąc $\langle \tilde{\mu}, z \rangle = a$. Rozszerzenie to spełnia $\langle \tilde{\mu}, x \rangle \leq p(x)$ dla wszystkich $x \in \tilde{Y}$, bo z pierwszej nierówności w

$$\frac{1}{\alpha} (-p(y - \alpha z) + \langle \tilde{\mu}, y \rangle) \leq \langle \tilde{\mu}, z \rangle \leq \frac{1}{\alpha} (p(y + \alpha z) - \langle \tilde{\mu}, y \rangle)$$

wynika

$$\langle \tilde{\mu}, y - \alpha z \rangle \leq p(y - \alpha z),$$

a z drugiej

$$\langle \tilde{\mu}, y + \alpha z \rangle \leq p(y + \alpha z)$$

dla wszystkich $y \in Y$ i $\alpha > 0$.

Rozważmy teraz rodzinę \mathcal{R} wszystkich par (Y, μ) złożonych z podprzestrznią Y takiej, że $M \subset Y$ i funkcjonału μ na Y takiego, że $\mu|_M = \lambda$ i $\langle \mu, y \rangle \leq p(y)$ dla wszystkich $y \in Y$. Przedstawiona powyżej procedura pokazuje, że rodzina ta jest ściśle większa niż $\{(M, \lambda)\}$. Rodzina \mathcal{R} jest również zbiorem częściowo uporządkowanym relacją

$$\left((Y_1, \mu_1) \preceq (Y_2, \mu_2) \right) \iff \left(Y_1 \subset Y_2, \quad \mu_2|_{Y_1} = \mu_1 \right).$$

Nietrudno stwierdzić, że każdy łańcuch (podzbiór liniowo uporządkowany) w \mathcal{R} posiada element największy, a więc na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna \mathcal{R} ma element maksymalny (\tilde{Y}, Λ) . Jeśli \tilde{Y} byłaby różna od X , to opisana na początku dowodu procedura zaprzeczyłaby maksymalności (\tilde{Y}, Λ) . Stąd $\tilde{M} = X$. \square

Wniosek 2 (Twierdzenie Hahna-Banacha). Niech X będzie przestrzenią wektorową i niech p będzie funkcją $X \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|p(x) + |\beta|p(y)$ dla wszystkich $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ takich, że $|\alpha| + |\beta| \leq 1$. Jeśli λ jest funkcjonałem liniowym na podprzestrzeni $M \subset X$ takim, że $|\langle \lambda, y \rangle| \leq p(y)$ dla wszystkich $y \in M$, to istnieje funkcjonał Λ na X taki, że $|\langle \Lambda, x \rangle| \leq p(x)$ dla wszystkich $x \in X$ oraz $\Lambda(x) = \lambda(x)$ dla wszystkich $x \in M$.

Dowód. Musimy zająć się tylko przypadkiem $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (przypadek $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ jest treścią lematu 1). Niech $\lambda_{\mathbb{R}}$ będzie częścią rzeczywistą λ i niech $\Lambda_{\mathbb{R}}$ będzie rozszerzeniem $\lambda_{\mathbb{R}}$ na X spełniającym $\langle \Lambda_{\mathbb{R}}, x \rangle \leq p(x)$ dla wszystkich $x \in X$. Wówczas $\Lambda_{\mathbb{R}}$ jest częścią rzeczywistą jedynego funkcjonału \mathbb{C} -liniowego Λ na X . Musimy wykazać, że $|\langle \Lambda, x \rangle| \leq p(x)$.

Weźmy $x \in X$ i niech θ będzie taką liczbą zespoloną o module 1, że

$$\langle \Lambda, x \rangle = |\langle \Lambda, x \rangle| e^{i\theta}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} |\langle \Lambda, x \rangle| &= e^{-i\theta} \langle \Lambda, x \rangle = \langle \Lambda, e^{-i\theta} x \rangle \\ &= \langle \Lambda_{\mathbb{R}}, e^{-i\theta} x \rangle \leq p(e^{-i\theta} x) \leq p(x), \end{aligned}$$

ponieważ dla $|\alpha| = 1$ i $\beta = 0$ własność funkcji p gwarantuje, że $p(\alpha x + 0y) \leq |\alpha|p(x) + 0 = p(x)$. \square

Wniosek 3. Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech $x \in X$. Wówczas istnieje $\phi \in X'$ taki, że $\|\phi\| = 1$ i $\langle \phi, x \rangle = \|x\|$.

Dowód. Jeśli $x = 0$, to wystarczy dowolny ϕ o normie 1. Załóżmy więc, że $x \neq 0$ i weźmy $M = \text{span}\{x\}$. Niech $\phi_0 : M \rightarrow \mathbb{K}$ będzie taki:

$$\langle \phi_0, \lambda x \rangle = \lambda \|x\|.$$

Jeśli $p(y) = \|y\|$ dla $y \in X$, to $|\langle \phi_0, z \rangle| \leq p(z)$ dla wszystkich $z \in M$. Niech ϕ będzie rozszerzeniem ϕ_0 do funkcjonału na X takiego, że $|\langle \phi, y \rangle| \leq p(y)$ dla wszystkich $y \in X$. Oczywiście $\|\phi\| \leq 1$. Z drugiej strony

$$\langle \phi, x \rangle = \langle \phi_0, x \rangle = \|x\|.$$

W szczególności oznacza to, że $\|\phi\| = 1$. \square

Zadanie Steinhausa. \heartsuit Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem mierzalnym takim, że $\lambda(A) > 0$. Wówczas zbiór

$$A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$$

zawiera przedział. Na pierwszy rzut oka zadanie wygląda na typowy problem z teorii miary, ale rozwiązanie, które proponujemy jest typowym skorzystaniem z metod przestrzeni Hilberta.

\heartsuit Niech $f \in L^2(\mathbb{R})$ (zawsze z miarą Lebesgue'a). Wówczas f jest granicą (w L^2) funkcji o zwartym nośniku (chodzi o tak zwany *nośnik istotny*). Dokładniej niech $f_n = \chi_{[-n, n]} f$. Wówczas z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej natychmiast wynika, że

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_2} f.$$

Dalej, tak samo jak w przypadku przedziału $[-\pi, \pi]$ w dyskusji wielomianów trygonometrycznych, możemy wykazać, że funkcje postaci $\chi_{[-n, n]} f$ można (znów w L^2) przybliżać funkcjami ciągłymi o nośniku (teraz to słowo ma już standardowe znaczenie) zawartym w $[-n, n]$. W efekcie otrzymujemy

Stwierdzenie 4. Przestrzeń $C_c(\mathbb{R})$ złożona z funkcji ciągłych o zwartych nośnikach jest gęsta w $L^2(\mathbb{R})$.

\heartsuit Dla f — funkcji na \mathbb{R} i $t \in \mathbb{R}$ definiujemy f_t wzorem

$$f_t(x) = f(x - t).$$

Jest jasne, że dla $f \in C_c(\mathbb{R})$ mamy $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ dla wszystkich t . Podobnie

$$\|f_t\|_2 = \|f\|_2$$

dla każdego t , a więc dla $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ mamy $\psi_t \in L^2(\mathbb{R})$ dla wszystkich t .

Stwierdzenie 5. Niech $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Wówczas odwzorowanie

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \psi_t \in L^2(\mathbb{R})$$

jest ciągłe.

Proof. Na początek weźmy $f \in C_c(\mathbb{R})$. Funkcja f jest wówczas jednostajnie ciągła na całym \mathbb{R} . Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje δ taka, że $|f(x) - f(x-t)| < \varepsilon$ dla $|t| < \delta$. Zatem dla takich t, s , że $|t-s| < \delta$ mamy

$$\begin{aligned} \|f_s - f_t\|_2^2 &= \|f - f_{t-s}\|_2^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(x-(t-s))|^2 d\lambda(x) \\ &\leq \varepsilon^2 \lambda(\text{supp } f \cup \text{supp } f_{t-s}) \leq \varepsilon^2 (\lambda(\text{supp } f) + 2\delta). \end{aligned}$$

W szczególności odwzorowanie $t \mapsto f_t$ jest ciągłe.

Teraz niech $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Wówczas istnieje $f \in C_c(\mathbb{R})$ taka, że $\|f - \psi\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$. Dla $s, t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} \|\psi_s - \psi_t\|_2 &= \|\psi - \psi_{t-s}\|_2 \\ &\leq \|\psi - f\|_2 + \|f - f_{t-s}\|_2 + \|f_{t-s} - \psi_{t-s}\|_2 \\ &= \|\psi - f\|_2 + \|f - f_{t-s}\|_2 + \|f - \psi\|_2. \end{aligned}$$

tak więc dla $|s-t|$ odpowiednio małych mamy

$$\|\psi_s - \psi_t\|_2 < \varepsilon.$$

□

♡ Możemy teraz rozwiązać zadanie Hugona Steinhausa. Niech A będzie biorem miary ściśle większej od 0. Zmniejszając A możemy założyć, że $\lambda(A) < +\infty$ (zbiór $A - A$ także się zmniejszy). Wówczas funkcja χ_A należy do $L^2(\mathbb{R})$. Zdefiniujemy funkcję

$$F(t) = (\chi_{At} | \chi_A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_A(x-t) \chi_A(x) d\lambda(x).$$

Mamy

- $F(0) = \lambda(A) > 0$,
- F jest ciągła,
- $F(t) \neq 0$ implikuje istnienie $x \in A$ takiego, że $x-t \in A$.

F jako funkcja ciągła o ściśle dodatniej wartości w 0 musi być ściśle dodatnia na pewnym otoczeniu 0. Z drugiej strony nośnik F jest zawarty w $A - A$.