

WYKŁADY 17 & 18

Funkcje mierzalne.

♡ W teorii miary i całki będziemy mówić jedynie o funkcjach o wartościach rzeczywistych lub w $[-\infty, \infty]$. Jednak praktycznie wszystkie fakty mają oczywiste wersje dla funkcji o wartościach zespolonych (funkcja o wartościach zespolonych, to po prostu dwie funkcje o wartościach rzeczywistych). Świadomie pominiemy proste rozumowania, które dostarczają uogólnienia dowodzonych przez nas twierdzeń na przypadek zespolony.

♡ Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Funkcję $f : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ nazywamy *mierzalną*, jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\{x \in \Omega \mid f(x) > t\} \in \mathcal{F}.$$

Zauważmy, że jeśli $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna, to dla dowolnego otwartego $V \subset \mathbb{R}$ mamy $f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$. Istotnie, zbiór V jest równy *przeliczalnej* sumie przedziałów otwartych, a $f^{-1}(\lceil a, b \rceil) = \{x \in \Omega \mid f(x) > a\} \cap \{x \in \Omega \mid f(x) < b\}$, a takie zbiory należą do \mathcal{F} — patrz stwierdzenie 1. Innymi słowy f jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(V)$ jest zbiorem mierzalnym dla każdego otwartego V .

♡ Niech μ będzie miarą na \mathbb{R}^d skonstruowaną z addytywnej funkcji zbioru na \mathcal{E} . Wówczas każda funkcja ciągła $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ jest mierzalna, gdyż dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zbiór

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > t\}$$

jest otwarty, a zatem jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych.

Jest jasne, że jeśli funkcja ciągła $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ jest *borelowska* co oznacza, że przeciwobrazy zbiorów otwartych są borelowskie. W szczególności każda funkcja ciągła jest mierzalna.

Stwierdzenie 1. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i niech $f : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) f jest mierzalna,
- (2) dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in \Omega \mid f(x) \geq t\} \in \mathcal{F}$,
- (3) dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in \Omega \mid f(x) < t\} \in \mathcal{F}$,
- (4) dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in \Omega \mid f(x) \leq t\} \in \mathcal{F}$.

Dowód.

$$\begin{aligned} \{x \mid f(x) \geq t\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid f(x) > t - \frac{1}{n}\}, \\ \{x \mid f(x) < t\} &= \Omega \setminus \{x \mid f(x) \geq t\}, \\ \{x \mid f(x) \leq t\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid f(x) < t + \frac{1}{n}\}, \\ \{x \mid f(x) > t\} &= \Omega \setminus \{x \mid f(x) \leq t\}. \end{aligned}$$

□

♡ Niech $f : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ będzie funkcją mierzalną. Wówczas $|f|$ jest mierzalna, gdyż

$$\{x \mid |f(x)| > t\} = \{x \mid f(x) > t\} \cup \{x \mid f(x) < -t\} \in \mathcal{F}$$

Stwierdzenie 2. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych $\Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Niech

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \\ g_2(x) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \\ g_3(x) &= \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \\ g_4(x) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \end{aligned}$$

Wówczas funkcje g_1, \dots, g_4 są mierzalne.

Dowód. Dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\{x \mid g_1(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > t\} \in \mathcal{F},$$

a więc g_1 jest mierzalna i tak samo dowodzimy mierzalności g_3 .

Mamy

$$g_2(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$$

gdzie $u_n(x) = \sup_{m \geq n} f_m(x)$. Na mocy poprzedniego argumentu u_n jest mierzalna dla każdego n i stąd mierzalna jest g_2 . Dla g_4 używamy takiego samego argumentu. \square

Wniosek 3. Niech $f, g : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ będą funkcjami mierzalnymi. Wówczas funkcje $\max\{f, g\}$ i $\min\{f, g\}$ są mierzalne.

♡ Przykładowo, jeśli $f : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ jest funkcją mierzalną, to funkcje

$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad \text{i} \quad f^- = -\min\{f, 0\}$$

są mierzalne.

Wniosek 4. Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych $\Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ zbieżnym punktowo do funkcji f . Wówczas f jest mierzalna.

Dowód. Jeśli $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest takim ciągiem, to oczywiście $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ dla wszystkich x . \square

Twierdzenie 5. Niech $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi i niech $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą. Wówczas funkcja $\Omega \ni x \mapsto F(f(x), g(x))$ jest mierzalna.

Dowód. Dla $t \in \mathbb{R}$ niech $G_t = \{(u, v) \mid F(u, v) > t\}$. Wówczas G_t jest zbiorem otwartym, a co za tym idzie jest sumą przeliczalnej rodziny przedziałów otwartych w \mathbb{R}^2 :

$$G_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

gdzie

$$I_n = \{(u, v) \mid a_n < u < b_n, c_n < v < d_n\}$$

dla pewnych ciągów $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liczb rzeczywistych. Dla każdego n zbiory

$$\begin{aligned} \{x \mid a_n < f(x) < b_n\} &= \{x \mid a_n < f(x)\} \cap \{x \mid f(x) < b_n\}, \\ \{x \mid c_n < g(x) < d_n\} &= \{x \mid c_n < g(x)\} \cap \{x \mid g(x) < d_n\} \end{aligned}$$

są mierzalne, a więc mierzalna jest ich część wspólna:

$$\{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\}.$$

Stąd

$$\{x \mid F(f(x), g(x)) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid (f(x), g(x)) \in I_n\} \in \mathcal{F}.$$

\square

Wniosek 6. Niech $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi. Wówczas fg i $f + g$ są mierzalne.

Wniosek 7. Z twierdzenia 5 wynika również, że złożenie $\varphi \circ f$ jest funkcją mierzalną dla dowolnej ciągłej funkcji φ . Wystarczy położyć $F(x, y) = \varphi(x)$.

♡ Funkcję o skończonym zbiorze wartości nazywamy *funkcją prostą*. Każda funkcja prosta $s : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ jest postaci

$$s(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \chi_{E_k}(x), \quad (18.1)$$

gdzie $E_k = \{x \mid f(x) = \lambda_k\}$, a χ_E jest *funkcją charakterystyczną* zbioru E :

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E, \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

Funkcja prosta (18.1) jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy $E_k \in \mathcal{F}$ dla wszystkich k .

Twierdzenie 8. *Niech $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$ będzie funkcją mierzalną. Wówczas istnieje ciąg $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nieujemnych i mierzalnych funkcji prostych zbieżny punktowo i monotonicznie do f .*

Dowód. Dla $n \in \mathbb{N}$ i $m \in \{1, \dots, n2^n\}$ definiujemy zbiory

$$E_{n,m} = \left\{x \mid \frac{m-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{m}{2^n}\right\}, \\ F_n = \{x \mid f(x) \geq n\}.$$

i kładziemy

$$s_n = n\chi_{F_n} + \sum_{m=1}^{n2^n} \frac{m-1}{2^n} \chi_{E_{n,m}}.$$

□

Wniosek 9. *Niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną. Wówczas istnieje ciąg $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mierzalnych funkcji prostych zbieżny punktowo do f .*

Dowód. Niech $f = f^+ - f^-$ będzie rozkładem f na część dodatnią i ujemną. Przeprowadzamy procedurę przybliżania oddzielnie dla f^+ i f^- (tak jak w twierdzeniu 8). □

♡ Jeśli f jest ograniczona, to ciąg funkcji prostych przybliżający f (z twierdzenia 8 lub wniosku 9) jest zbieżny *jednostajnie* do f . Przybliżać (w sensie zbieżności punktowej) od dołu funkcjami prostymi można również funkcje o wartościach w $[0, \infty]$.

Całkowanie.

♡ Tak jak dotychczas $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ jest przestrzenią z miarą. Niech

$$s = \sum_{k=1}^N \lambda_k \chi_{E_k}$$

będzie mierzalną funkcją prostą. Niech $E \in \mathcal{F}$. Definiujemy

$$I_E(s) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mu(E \cap E_k).$$

Dla mierzalnej funkcji $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ niech \mathcal{S}_f będzie rodziną wszystkich nieujemnych mierzalnych funkcji prostych $s \leq f$. Definiujemy

$$\int_E f d\mu = \sup_{s \in \mathcal{S}_f} I_E(s).$$

♡ Dla $f : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$ rozkładamy f na część dodatnią i ujemną: $f = f^+ - f^-$. Jeśli któraś z całek

$$\int_E f^+ d\mu, \quad \int_E f^- d\mu$$

jest skończona, to kładziemy

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Funkcję f nazywamy *całkowalną* na E jeśli

$$\int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu < \infty.$$

Zbiór funkcji całkowalnych na E oznaczamy symbolem $\mathcal{L}(\mu)_E$. Piszemy $\mathcal{L}(\mu)$ zamiast $\mathcal{L}(\mu)_\Omega$.

♡ Oczywiście dla funkcji prostej s mamy

$$\int_E s d\mu = I_E(s).$$

♡ Jeśli f jest mierzalna i ograniczona na E i $\mu(E) < \infty$, to $f \in \mathcal{L}(\mu)_E$.

♡ Niech $a \leq f(x) \leq b$ dla $x \in E$ i niech $\mu(E) < \infty$. Wówczas

$$a\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b\mu(E).$$

♡ Jeśli $f, g \in \mathcal{L}(\mu)_E$ i $f \leq g$ na E , to

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

♡ $f \in \mathcal{L}(\mu)_E$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|f| \in \mathcal{L}(\mu)_E$.

♡ Jeśli $f \in \mathcal{L}(\mu)_E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, to $\lambda f \in \mathcal{L}(\mu)_E$ i

$$\int_E \lambda f d\mu = \lambda \int_E f d\mu.$$

♡ Jeśli $\mu(E) = 0$, to

$$\int_E f d\mu = 0$$

dla każdej mierzalnej funkcji f .

♡ Jeśli $A, E \in \mathcal{F}$ i $A \subset E$, to $\mathcal{L}(\mu)_E \subset \mathcal{L}(\mu)_A$.

♡ Mamy dla $f \geq 0$, lub $f \in \mathcal{L}(\mu)_E$

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus \{f=0\}} f d\mu,$$

gdzie przez $\{f=0\}$ oznaczyliśmy zbiór zer funkcji f . Wynika to z tego, że równość taką mamy dla wszystkich funkcji prostych z S_{f^+} i S_{f^-} .

Twierdzenie 10. Niech f będzie nieujemną funkcją mierzalną. Zdefiniujemy $\nu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ wzorem

$$\nu(A) = \int_A f d\mu. \quad (18.2)$$

Wówczas ν jest funkcją przeliczalnie addytywną.

Dowód. Niech $A \in \mathcal{F}$ i niech $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem rozłącznych elementów \mathcal{F} takim, że

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Mamy wykazać, że $\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$. Jeśli f jest funkcją charakterystyczną, to ν jest przeliczalnie addytywna, gdyż taka jest miara μ . Kombinacja liniowa (z dodatnimi współczynnikami) funkcji

przeliczalnie addytywnych jest przeliczalnie addytywna, więc ν jest funkcją przeliczalnie addytywną, jeśli f jest funkcją prostą.

Dla dowolnej (nieujemnej, mierzalnej) funkcji f weźmy funkcję prostą $s \in S_f$. Mamy

$$\int_A s d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Biorąc sup po wszystkich $s \leq f$ otrzymujemy

$$\nu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n). \quad (18.3)$$

Jeśli $\nu(A_n) = +\infty$ dla pewnego n , to nierówność przeciwna do (18.3) jest oczywista.

Założmy więc, że $\nu(A_n) < \infty$ dla wszystkich n i niech $\varepsilon > 0$. Istnieje funkcja prosta $s \in S_f$ taka, że

$$\int_{A_1} f d\mu \leq \int_{A_1} s d\mu - \varepsilon, \quad \int_{A_2} f d\mu \leq \int_{A_2} s d\mu - \varepsilon$$

(możemy takie funkcje s_1 i s_2 wybrać oddzielnie dla A_1 i A_2 i potem położyć $s = \chi_{A_1} s_1 + \chi_{A_2} s_2$). Wówczas

$$\nu(A_1 \cup A_2) = \int_{A_1 \cup A_2} f d\mu \geq \int_{A_1 \cup A_2} s d\mu = \int_{A_1} s d\mu + \int_{A_2} s d\mu \geq \nu(A_1) + \nu(A_2) - 2\varepsilon.$$

Stąd

$$\nu(A_1 \cup A_2) \geq \nu(A_1) + \nu(A_2).$$

Tak samo uzyskujemy

$$\nu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geq \nu(A_1) + \dots + \nu(A_n)$$

dla każdego n . Zauważmy wreszcie, że $\nu(A) \geq \nu(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ dla wszystkich n , gdyż

$$\nu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \int_{A_1 \cup \dots \cup A_n} f d\mu = \int_A \chi_{(A_1 \cup \dots \cup A_n)} \cdot f d\mu \leq \int_A f d\mu,$$

bo $\chi_{(A_1 \cup \dots \cup A_n)} \cdot f \leq f$. Stąd

$$\nu(A) \geq \nu(A_1 \cup \dots \cup A_n) \geq \nu(A_1) + \dots + \nu(A_n)$$

dla wszystkich n co daje

$$\nu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

□

♡ Zauważmy, że twierdzenie 10 daje nam ogromną ilość nowych miar na σ -ciele \mathcal{F} . Dokładniej przeliczalnie addytywna funkcja (18.2) jest miarą na \mathcal{F} . Miarę tę oznaczamy symbolem $f\mu$. Miary tej postaci nazywamy miarami *absolutnie ciągłymi* względem μ , a jeśli $\nu = f\mu$, to funkcję f nazywamy *gęstością* ν względem μ .

♡ Jeśli funkcja f na Ω jest całkowalna, to również można rozważyć odwzorowanie

$$\nu: \mathcal{F} \ni A \mapsto \int A f d\mu.$$

Przyjmuje ono wówczas wartości w $] -\infty, +\infty[$. Funkcja ta jest także przeliczalnie addytywna w tym sensie, że dla dowolnego ciągu $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ rozłącznych zbiorów szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

jest bezwzględnie zbieżny i

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

(Aby to wykazać rozkładamy f na część dodatnią i ujemną i korzystamy z tego, że ν jest różnicą dwóch dodatnich i ograniczonych funkcji przeliczalnie addytywnych.)

♡ Niech f i g będą funkcjami mierzalnymi. Piszemy $f \doteq g$ jeśli zbiór

$$\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$$

jest miary zero i mówimy, że f i g są równe prawie wszędzie. Podobnie dla $E \in \mathcal{F}$ powiemy, że f i g są równe prawie wszędzie na E jeśli zbiór

$$\{x \mid f(x) \neq g(x)\} \cap E$$

jest miary zero. Zazwyczaj piszemy wówczas “ $f \doteq g$ na E ”.

♡ Może być również tak, że f jest funkcją mierzalną, a zbiór $A = \{x \in \Omega \mid f(x) = g(x)\}$ jest mierzalny i ma miarę zero. Można zapytać, czy g jest wówczas mierzalna. W przypadkach, które najczęściej rozważamy (w szczególności w przypadku miary Lebesgue’a na \mathbb{R}^d) podzbiory zbiorów miary zero są mierzalne. Wówczas łatwo możemy wykazać, że istotnie, jeśli funkcja f jest mierzalna, a funkcja g jest taka, że $f \doteq g$, to g jest mierzalna. Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \{x \in \Omega \mid g(x) > t\} &= (\{x \in \Omega \mid g(x) > t\} \cap A^c) \cup (\{x \in \Omega \mid g(x) > t\} \cap A) \\ &= (\{x \in \Omega \mid g(x) > t\} \cap A^c) \cup (\{x \in \Omega \mid f(x) > t\} \cap A). \end{aligned}$$

Pierwszy z zbiorów po prawej stronie jest mierzalny, bo f jest mierzalna i $A \in \mathcal{F}$, a drugi jest podzbiorem zbioru miary zero.

Stwierdzenie 11. Niech $f \doteq g$ na E i $g \in \mathcal{L}(\mu)_E$. Wówczas $f \in \mathcal{L}(\mu)_E$ i

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu.$$

Twierdzenie 12. Niech $f \in \mathcal{L}(\mu)_E$. Wówczas

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu. \quad (18.4)$$

Dowód. Dzielimy E na rozłączne podzbiory $A = \{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ i $B = \{x \in E \mid f(x) < 0\}$. Ponieważ na B funkcja f jest ujemna, mamy $\int_B f \, d\mu \leq 0$, a więc

$$\int_E f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu \leq \int_A f \, d\mu - \int_B f \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu + \int_B |f| \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu$$

(skorzystaliśmy z addytywności odwzorowań $A \mapsto \int_A f \, d\mu$ i $A \mapsto \int_A |f| \, d\mu$ względem zbioru A).

Podobnie

$$-\int_E f \, d\mu = \int_A (-f) \, d\mu + \int_B (-f) \, d\mu \leq -\int_A (-f) \, d\mu + \int_B (-f) \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu + \int_B |f| \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu.$$

Stąd mamy (18.4). \square

Stwierdzenie 13. Niech f będzie mierzalna i niech $g \in \mathcal{L}(\mu)$. Załóżmy, że $|f| \leq g$. Wówczas $f \in \mathcal{L}(\mu)$.

Dowód. Mamy $f^+, f^- \leq g \in \mathcal{L}(\mu)$. \square

Twierdzenie 14 (Twierdzenie Lebesgue’a o zbieżności monotonicznej). Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie monotonicznie rosnącym ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych. Niech

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Wówczas dla $E \in \mathcal{F}$

$$\int_E f_n \, d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E f \, d\mu$$

Dowód. Istnieje $\alpha \in [0, +\infty]$ taka, że

$$\int_E f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$$

(bo ciąg jest monotoniczny), a ponieważ $f_n \leq f$ dla wszystkich n , mamy

$$\alpha \leq \int_E f d\mu.$$

Niech $0 \leq s \leq f$ będzie funkcją prostą. Dla $0 < c < 1$ definiujemy

$$E_n = \{x \in E \mid f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Oczywiście $E_n \subset E_{n+1}$ dla wszystkich n i $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Mamy także

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu \quad (18.5)$$

dla wszystkich n . Pamiętamy, że $B \mapsto \int_B s d\mu$ jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru, więc

$$c \int_{E_n} s d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \int_E s d\mu$$

(to było na samym początku wykładów o funkcjach zbioru). Przechodząc go granicy $n \rightarrow \infty$ w (18.5) otrzymujemy więc

$$\alpha \geq c \int_E s d\mu,$$

co przy dowolności $c < 1$ daje

$$\alpha \geq \int_E s d\mu.$$

Z definicji całki mamy wówczas

$$\alpha \geq \int_E f d\mu.$$

□

Twierdzenie 15. Niech $f, g \in \mathcal{L}(\mu)_E$. Wówczas $f + g \in \mathcal{L}(\mu)_E$ i

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

Dowód. Jeśli f i g są nieujemne, to wybieramy monotonicznie rosnące ciągi funkcji prostych $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(s''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżne punktowo do f i g i kładziemy $s_n = s'_n + s''_n$. Jest jasne, że

$$\int_E s_n d\mu = \int_E s'_n d\mu + \int_E s''_n d\mu \quad (18.6)$$

i na mocy twierdzenia o zbieżności monotonicznej mamy

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

(i $f + g \in \mathcal{L}(\mu)$ bo wszystkie funkcje są nieujemne).

Założmy teraz, że $f \geq 0$ i $g \leq 0$ i niech $E_+ = \{x \in E \mid f(x) + g(x) \geq 0\}$ i $E_- = \{x \in E \mid f(x) + g(x) < 0\}$. Wówczas na E_+ funkcje f , $-g$ i $f + g$ są nieujemne i na mocy tego co już udowodniliśmy, mamy

$$\int_{E_+} f d\mu = \int_{E_+} (f + g + (-g)) d\mu = \int_{E_+} (f + g) d\mu + \int_{E_+} (-g) d\mu = \int_{E_+} (f + g) d\mu - \int_{E_+} g d\mu. \quad (18.7)$$

Z kolei na E_- nieujemne są funkcje f , $-g$ i $-(f + g)$. Zatem

$$-\int_{E_-} g d\mu = \int_{E_-} (-g) d\mu = \int_{E_-} (-(f + g) + f) d\mu = \int_{E_-} (-(f + g)) d\mu + \int_{E_-} f d\mu. \quad (18.8)$$

W szczególności, ponieważ całki z f i g są skończone,

$$\int_E (f + g)^+ d\mu = \int_{E_+} (f + g) d\mu = \int_{E_+} f d\mu + \int_{E_+} g d\mu < +\infty$$

i

$$\int_E (f + g)^- d\mu = \int_{E_-} (-(f + g)) d\mu = -\int_{E_+} f d\mu - \int_{E_+} g d\mu < +\infty.$$

Oznacza to, że $f + g \in \mathcal{L}(\mu)_E$. W takim razie możemy natychmiast z (18.7) i (18.8) wywnioskować (18.6).

Podobnie radzimy sobie z przypadkami $f < 0 \leq g$ i $f, g < 0$. W sytuacji dowolnych f i g rozbijamy E na sumę czterech rozłącznych zbiorów, na których f i g mają stały znak. \square

♡ Zauważmy, że argument na początku powyższego dowodu pokazuje, że

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu \quad (18.9)$$

dla dowolnych (czyli niekoniecznie całkowalnych) nieujemnych funkcji f i g .

Wniosek 16. Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem mierzalnych funkcji nieujemnych i niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Wówczas

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Dowód. Dla sum częściowych mamy równość

$$\int_E \sum_{n=1}^N f_n d\mu = \sum_{n=1}^N \int_E f_n d\mu$$

na mocy twierdzenia 15. Dalej stosujemy twierdzenie o zbieżności monotonicznej. \square

Twierdzenie 17 (Lemat Fatou). Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem nieujemnych funkcji mierzalnych i niech

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

dla wszystkich $x \in \Omega$. Wówczas dla każdego $E \in \mathcal{F}$ mamy

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Dowód. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech

$$g_n(x) = \inf_{m \geq n} f_m(x).$$

Wówczas dla każdego n funkcja g_n jest mierzalna i $g_n \leq g_{n+1}$. Ponadto $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$, więc na mocy twierdzenia o zbieżności monotonicznej

$$\int_E g_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E f d\mu,$$

a skoro $g_n(x) \leq f_n(x)$ dla wszystkich x , mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_E g_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_E f_n d\mu.$$

□

♡ Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{M}(\lambda), \lambda)$ i niech $f_n = \chi_{[n, n+1]}$. Wówczas w lemacie Fatou mamy ostrą nierówność (dokładniej $0 \leq 1$).

Twierdzenie 18 (Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej). *Niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych zbieżnych punktowo do funkcji f . Niech $g \in \mathcal{L}(\mu)_E$ będzie taka, że $|f_n(x)| \leq g(x)$ dla wszystkich $x \in E$. Wówczas $f \in \mathcal{L}(\mu)_E$ i*

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Dowód. Na początek zajmijmy się całkowalnością f . Niech

$$E_+ = \{x \in E \mid f(x) \geq 0\}, \quad E_- = \{x \in E \mid f(x) < 0\}.$$

Ponieważ $f_n + g \geq 0$, korzystając z lematu Fatou mamy

$$\begin{aligned} \int_{E_+} f d\mu + \int_{E_+} g d\mu &= \int_{E_+} (f + g) d\mu = \int_{E_+} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf (f_n + g) d\mu \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_{E_+} (f_n + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_{E_+} f_n d\mu + \int_{E_+} g d\mu. \end{aligned} \quad (18.10)$$

W pierwszej równości wykorzystaliśmy fakt, że (18.9) zachodzi dla dowolnych funkcji nieujemnych, a w trzeciej to, że funkcje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ są całkowalne i twierdzenie 15.

Zatem mamy

$$\int_E f^+ d\mu = \int_{E_+} f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_{E_+} f_n d\mu \leq \int_{E_+} g d\mu \leq \int_E g d\mu < \infty.$$

Podobnie, skoro $-f_n + g \geq 0$, mamy

$$\begin{aligned} \int_{E_-} (-f) d\mu + \int_{E_-} g d\mu &= \int_{E_-} (-f + g) d\mu = \int_{E_-} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf (-f_n + g) d\mu \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_{E_-} (-f_n + g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_{E_-} (-f_n) d\mu + \int_{E_-} g d\mu \end{aligned} \quad (18.11)$$

i otrzymujemy

$$\int_E f^- d\mu = \int_{E_-} (-f) d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_{E_-} (-f_n) d\mu \leq \int_{E_-} g d\mu \leq \int_E g d\mu < \infty.$$

Zatem f jest całkowalna. Teraz stosując rachunek (18.10) z E zamiast E_+ dostajemy

$$\int_E f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_E f_n d\mu,$$

a z rachunku (18.11) otrzymujemy

$$-\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(-\int_E f_n d\mu \right).$$

Ta ostatnia nierówność jest równoważna

$$\int_E f d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

co kończy dowód. □

Całka Lebesgue'a i całka Riemanna.

♡ W tej części będziemy rozważać przestrzeń z miarą $([a, b], \mathfrak{M}, \lambda)$, gdzie \mathfrak{M} jest σ -ciałem podzbiorów $[a, b]$ mierzalnych w sensie Lebesgue'a, a λ jest (jednowymiarową) miarą Lebesgue'a. Tradycyjnie piszemy

$$\int_a^b f dx, \quad \int_a^b f(x) dx \quad \text{lub} \quad \int_a^b f d\lambda$$

zamiast

$$\int_{[a,b]} f d\lambda.$$

♡ Na odcinku $[a, b]$ możemy też rozważać całkę Riemanna, którą będziemy oznaczać

$$\mathcal{R}\int_a^b f(x) dx$$

dla funkcji f całkownych w sensie Riemanna, czyli takich, dla których całka górna

$$\overline{\int_a^b f dx}$$

i całka dolna

$$\underline{\int_a^b f dx}$$

są równe.

Twierdzenie 19. *Niech f będzie funkcją ograniczoną na $[a, b]$.*

(1) *Jeśli $f \in \mathcal{R}$, to f jest mierzalna, $f \in \mathcal{L}(m)_{[a,b]}$ i*

$$\mathcal{R}\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f d\lambda.$$

(2) *$f \in \mathcal{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła prawie wszędzie na $[a, b]$.*

Dowód. Całka górna funkcji f jest infimum sum górnych, a całka dolna jest supremum sum dolnych po wszystkich podziałach odcinka $[a, b]$. Nietrudno wykazać, że istnieje ciąg podziałów $(\pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ odcinka $[a, b]$ taki, że

- podział π_{k+1} jest drobniejszy niż π_k ,
- $d_{\pi_k} \leq \frac{1}{k}$,
- mamy

$$\overline{\int_a^b f dx} = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{S}(\pi_k, f), \quad \underline{\int_a^b f dx} = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{S}(\pi_k, f) \quad (18.12)$$

Przypomnijmy, że jeśli $\pi_k = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n_k} = b\}$, to z definicji

$$\begin{aligned}\bar{S}(\pi_k, f) &= \sum_{i=1}^{n_k} (x_i - x_{i-1}) M_i, \\ \underline{S}(\pi_k, f) &= \sum_{i=1}^{n_k} (x_i - x_{i-1}) m_i,\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}M_i &= \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ m_i &= \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}.\end{aligned}$$

Definiujemy ciągi $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ funkcji prostych na $[a, b]$:

$$\begin{aligned}U_k &= f(a)\chi_{\{a\}} + \sum_{j=1}^{n_k} M_j \chi_{]x_{j-1}, x_j]}, \\ L_k &= f(a)\chi_{\{a\}} + \sum_{j=1}^{n_k} m_j \chi_{]x_{j-1}, x_j]}.\end{aligned}$$

Wówczas

$$\bar{S}(\pi_k, f) = \int_a^b U_k d\lambda, \quad \underline{S}(\pi_k, f) = \int_a^b L_k d\lambda, \quad (18.13)$$

a ponadto

- $L_k \leq L_{k+1} \leq f$ dla wszystkich k ,
- $U_k \geq U_{k+1} \geq f$ dla wszystkich k

(ponieważ π_{k+1} jest drobniejszy niż π_k , tzn. $\pi_k \subset \pi_{k+1}$). Dla $x \in [a, b]$ niech

$$U(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(x), \quad L(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k(x).$$

wówczas U i L są funkcjami mierzalnymi na $[a, b]$ i $L \leq f \leq U$. Dodatkowo, z (18.12), (18.13) i twierdzenia o zbieżności monotonicznejⁱ wynika, że

$$\int_a^{\bar{b}} f dx = \int_a^b U d\lambda, \quad \int_{\underline{a}}^b f dx = \int_a^b L d\lambda.$$

Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_a^{\bar{b}} f dx = \int_{\underline{a}}^b f dx$, czyli

$$\int_a^b U d\lambda = \int_a^b L d\lambda,$$

a ponieważ $L \leq U$, równość tę mamy wtedy i tylko wtedy, gdy $L = U$ prawie wszędzie. Oznacza to w szczególności, że $L = f = U$ prawie wszędzie, a więc f jest mierzalna i całka Riemanna z f jest równa całce Lebesgue'a z f .

Niech $x \in [a, b]$ i niech $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$. Wtedy $U(x) = L(x)$ oznacza, że f jest ciągła w punkcie

x . Ponieważ zbiór $\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ jest miary zero (bo jest przeliczalny), widzimy, że $U = L$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest ciągła prawie wszędzie. \square

ⁱTrzeba zastosować twierdzenie o zbieżności monotonicznej do ciągów $(L_k - L_1)_{k \in \mathbb{N}}$ i $(U_1 - U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.