

# METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 1

## WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

- Niech  $X$  będzie przestrzenią zwartą.
- Wówczas zbiór  $C(X)$  wszystkich ciągłych funkcji  $X \rightarrow \mathbb{C}$  jest przestrzenią Banacha z normą

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad f \in C(X).$$

- Teraz niech  $X$  będzie przestrzenią **lokalnie zwartą**, tj. taką, że każdy punkt  $x \in X$  ma otoczenie  $U$  o zwartym domknięciu.
- Wówczas dla  $f \in C(X)$  może być  $\|f\|_{\infty} = +\infty$ , ale norma ma skończone wartości na zbiorze  $C_b(X)$  funkcji ciągłych i ograniczonych na  $X$ .
- $C_b(X)$  jest przestrzenią Banacha z normą  $\|\cdot\|_{\infty}$ .
- Niech  $C_0(X)$  oznacza zbiór  $f \in C(X)$  takich, że dla dowolnej liczby  $\nu > 0$  zbiór

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geq \nu\}$$

jest zwarty. Jest jasne, że  $C_0(X)$  jest podzbiorem  $C_b(X)$  i nietrudno się przekonać, że jest to podprzestrzeń wektorowa.

## STWIERDZENIE

$C_0(X)$  jest domkniętą podprzestrzenią  $C_b(X)$ .

## DOWÓD

Niech  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem elementów  $C_0(X)$  zbieżnym jednostajnie do  $f$ . Wówczas oczywiście  $f$  jest ciągła a ponadto warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

pociąga za sobą fakt, że dla dowolnej liczby  $\nu > 0$  oraz  $x$  takiego, że  $|f(x)| \geq \nu$  mamy

$$|f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)| \geq |f(x)| - |f(x) - f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)| \geq \nu - |f(x) - f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)| \geq \nu - \frac{\nu}{2} = \frac{\nu}{2},$$

a więc  $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \nu\} \subset \{x \in X \mid |f_{N_{\frac{\nu}{2}}}(x)| \geq \frac{\nu}{2}\}$ . Wynika stąd, że dla dowolnej liczby  $\nu > 0$  zbiór  $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \nu\}$  jest zwarty. □

- Przestrzeń  $C_0(X)$  nazywany **przestrzenią funkcji ciągłych znikających w nieskończoności** na  $X$ .
- Czasami na oznaczenie  $C_0(X)$  stosowana jest również notacja  $C_\infty(X)$ .
- W przypadku gdy przestrzeń  $X$  jest dyskretna, piszemy  $c_b(X)$  i  $c_0(X)$  zamiast  $C_b(X)$  i  $C_0(X)$ , a w przypadku  $X = \mathbb{N}$  po prostu  $c_b$  (lub  $c$ ) i  $c_0$ .
- Jeśli  $X$  ma skończenie wiele punktów, to  $C(X) = C_b(X) = C_0(X)$  jest izomorficzna z przestrzenią  $\mathbb{C}^{|X|}$  z normą

$$\left\| \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{|X|} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max_i |\lambda_i|.$$

- Niech  $(\Omega, \mu)$  będzie przestrzenią z miarą i ustalmy  $p \in [1, +\infty[$ .
- Dla mierzalnej funkcji  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definiujemy

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

i kładziemy  $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu) = \{f \mid \|f\|_p < +\infty\}$  oraz  $\mathcal{N} = \{f \mid \|f\|_p = 0\}$ .

- Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnej mierzalnej funkcji  $f$  i  $\lambda \in \mathbb{C}$  mamy  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ .

## LEMAT

Mamy  $\mathcal{N} = \{f \mid f \doteq 0\}$ .

## DOWÓD

Jeśli  $\int_{\Omega} |f|^p d\mu = 0$ , to dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zbiór

$$A_n = \left\{x \in \Omega \mid |f(x)|^p > \frac{1}{n}\right\}$$

jest miary zero (w przeciwnym razie  $\int_{\Omega} |f|^p d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n) > 0$  dla pewnego  $n$ ). Stąd

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

i w konsekwencji  $|f|^p = 0$  poza zbiorem miary zero. To oczywiście oznacza, że  $f \doteq 0$ . □

**TWIERDZENIE (NIERÓWNOŚĆ MINKOWSKIEGO)**

Niech  $(\Omega, \mu)$  będzie przestrzenią z miarą i niech  $f$  i  $g$  będą funkcjami mierzalnymi  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Wówczas

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (\star)$$

**DOWÓD**

Jeśli  $\|f\|_p = +\infty$  lub  $\|g\|_p = +\infty$ , to nierówność  $(\star)$  jest spełniona. Z drugiej strony, jeśli  $\|f\|_p = 0$  to  $f \doteq 0$ , a więc  $f + g \doteq g$  i mamy

$$\|f + g\|_p = \|g\|_p = \|0\| + \|g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p,$$

czyli  $(\star)$  zachodzi również w tym przypadku. Podobnie jest gdy  $\|g\|_p = 0$ .

Udowodnimy teraz  $(\star)$  w przypadku  $0 < \|f\|_p, \|g\|_p < +\infty$ . Wykorzystamy w tym celu wypukłość funkcji  $t \mapsto t^p$  na  $[0, +\infty[$ .

## TWIERDZENIE (NIERÓWNOŚĆ MINKOWSKIEGO)

Niech  $(\Omega, \mu)$  będzie przestrzenią z miarą i niech  $f$  i  $g$  będą funkcjami mierzalnymi  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Wówczas

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (\star)$$

## DOWÓD

Obliczamy

$$\begin{aligned} \frac{\|f + g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} &= \left\| \frac{f}{\|f\|_p + \|g\|_p} + \frac{g}{\|f\|_p + \|g\|_p} \right\| \\ &= \left\| \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{f}{\|f\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{g}{\|g\|_p} \right\| = \left\| \alpha \frac{f}{\|f\|_p} + \beta \frac{g}{\|g\|_p} \right\|, \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha = \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}$ , a  $\beta = \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p}$ . Mamy  $\alpha, \beta \geq 0$  oraz  $\alpha + \beta = 1$ .

## TWIERDZENIE (NIERÓWNOŚĆ MINKOWSKIEGO)

Niech  $(\Omega, \mu)$  będzie przestrzenią z miarą i niech  $f$  i  $g$  będą funkcjami mierzalnymi  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Wówczas

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (\star)$$

## DOWÓD

$$\begin{aligned} \frac{\|f + g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} &= \left\| \alpha \frac{f}{\|f\|_p} + \beta \frac{g}{\|g\|_p} \right\| = \left( \int_{\Omega} \left| \alpha \frac{f}{\|f\|_p} + \beta \frac{g}{\|g\|_p} \right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{\Omega} \left( \alpha \frac{|f|}{\|f\|_p} + \beta \frac{|g|}{\|g\|_p} \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} \left( \alpha \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \beta \frac{|g|^p}{\|g\|_p^p} \right) d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \frac{\alpha}{\|f\|_p^p} \int_{\Omega} |f|^p d\mu + \frac{\beta}{\|g\|_p^p} \int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \frac{\alpha}{\|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{\beta}{\|g\|_p^p} \|g\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = (\alpha + \beta)^{\frac{1}{p}} = 1, \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

## WNIOSKI

- 1  $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$  jest przestrzenią wektorową,
- 2  $\mathcal{N}$  jest podprzestrzenią przestrzeni  $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ .

## DEFINICJA

Przestrzeń  $L_p(\Omega, \mu)$  jest to przestrzeń ilorazowa  $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)/\mathcal{N}$ .

- Elementami  $L_p(\Omega, \mu)$  są **klasy funkcji** względem relacji równości prawie wszędzie.
- Mimo to, dla  $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$  zamiast  $f + \mathcal{N} \in L_p(\Omega, \mu)$  piszemy zwykle  $f \in L_p(\Omega, \mu)$ . Może to prowadzić do nieścisłości, ale zazwyczaj dbamy, aby uznając funkcję  $f$  za element przestrzeni  $L_p(\Omega)$  nie wykonywać na niej żadnych operacji, które zależałyby od  $f$  a nie od klasy  $f$  względem relacji równości prawie wszędzie.
- Funkcja  $L_p(\Omega, \mu) \ni f \mapsto \|f\|_p \in [0, +\infty[$  jest normą.

## TWIERDZENIE

Przestrzeń  $L_p(\Omega, \mu)$  z normą  $\|\cdot\|_p$  jest przestrzenią Banacha.

## DOWÓD

Niech  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  będzie ciągiem Cauchy'ego w  $L_p(\Omega, \mu)$  i wybierzmy z niego podciąg. Choose  $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  taki, że

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p < \frac{1}{2^j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Dalej niech  $g_k = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$  oraz  $g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$ .

Z nierówności Minkowskiego wynika, że  $\|g_k\|_p \leq 1$  dla wszystkich  $k$ , a ponadto

$$\|g\|_p^p = \int_{\Omega} |g|^p d\mu = \int_{\Omega} \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |g_k|^p d\mu \leq 1$$

na mocy lematu Fatou.

## TWIERDZENIE

Przestrzeń  $L_p(\Omega, \mu)$  z normą  $\| \cdot \|_p$  jest przestrzenią Banacha.

## DOWÓD

W szczególności  $|g(x)| < +\infty$  dla prawie wszystkich  $x \in \Omega$ , a w konsekwencji dla prawie wszystkich  $x$  szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)|$$

Jest zbieżny. Zbieżny jest zatem także szereg

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)),$$

co oznacza, że ciąg  $(f_{n_j}(x))_{j \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny dla prawie wszystkich  $x$ . Innymi słowy ciąg  $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  jest zbieżny punktowo prawie wszędzie na  $\Omega$ .

## TWIERDZENIE

Przestrzeń  $L_p(\Omega, \mu)$  z normą  $\|\cdot\|_p$  jest przestrzenią Banacha.

## DOWÓD

Oznaczmy (prawie wszędzie zdefiniowaną) granicę ciągu  $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  symbolem  $f$  i rozszerzmy  $f$  do funkcji mierzalnej na całym zbiorze  $\Omega$ . Pokażemy, że  $f$  definiuje element  $L_p(\Omega, \mu)$  oraz że  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  w  $L_p(\Omega, \mu)$ .

Skoro

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq N_\varepsilon \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon,$$

korzystając ponownie z lematu Fatou, możemy oszacować  $\|f_n - f\|_p$ :

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_{\Omega} \lim_{j \rightarrow \infty} |f_n - f_{n_j}|^p d\mu \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f_{n_j}|^p d\mu = \liminf_{j \rightarrow \infty} \|f_n - f_{n_j}\|_p^p \leq \varepsilon^p$$

jeśli tylko  $n \geq N_\varepsilon$ . W szczególności  $f - f_n \in L_p(\Omega, \mu)$ , a więc  $f = f_n + (f - f_n) \in L_p(\Omega, \mu)$ .

## TWIERDZENIE

Przestrzeń  $L_p(\Omega, \mu)$  z normą  $\|\cdot\|_p$  jest przestrzenią Banacha.

## DOWÓD

Skoro  $f \in L_p(\Omega, \mu)$ , oszacowanie

$$\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon, \quad n \geq N_\varepsilon$$

pokazuje, że  $f_n - f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  w  $L_p(\Omega, \mu)$ . □

## UWAGA

Warto zapamiętać wykazany przez nas w powyższym dowodzie fakt, że dla  $p \in [1, +\infty[$  każdy ciąg zbieżny w  $L_p(\Omega, \mu)$  ma podciąg zbieżny punktowo prawie wszędzie.

- Dla mierzalnej  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definiujemy

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| = \inf_{\substack{\Delta \subset \Omega \\ \mu(\Omega \setminus \Delta) = 0}} \sup_{x \in \Delta} |f(x)|.$$

- Zauważmy, że  $\{f \mid \|f\|_\infty = 0\} = \{f \mid f \doteq 0\} = \mathcal{N}$ .
- Ponadto  $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$  dla dowolnych  $f$  i  $g$  i  $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$  dla wszystkich  $f$  oraz  $\lambda \in \mathbb{C}$
- Kładziemy  $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mu) = \{f \mid \|f\|_\infty < +\infty\}$  i definiujemy

$$L_\infty(\Omega, \mu) = \mathcal{L}_\infty(\Omega, \mu) / \mathcal{N}.$$

## FAKT

$L_\infty(\Omega, \mu)$  z normą  $\|\cdot\|_\infty$  jest przestrzenią Banacha.

- Niech  $I$  będzie dowolnym zbiorem.
- Rozważając na  $I$  miarę liczącą  $\mu$ , możemy utworzyć przestrzeń  $L_p(I, \mu)$  ( $p \in [1, +\infty]$ ). W tej sytuacji przestrzeń tę oznaczamy symbolem  $\ell_p(I)$ .
- Gdy  $I$  jest zbiorem  $d$  elementowym, przestrzeń  $\ell_p(I)$  jest izomorficzna z  $\mathbb{C}^d$  z normą

$$\left\| \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix} \right\| = \begin{cases} \left( \sum_{i=1}^d |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & p \in [1, +\infty[ \\ \max_i |\lambda_i| & p = +\infty \end{cases}.$$

**TWIERDZENIE (NIERÓWNOŚĆ HÖLDERA)**

Niech  $(\Omega, \mu)$  będzie przestrzenią z miarą i niech  $f$  i  $g$  będą mierzalnymi funkcjami  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Niech  $p, q \in [1, +\infty]$  będą takie, że  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Wówczas

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(Dowód – na ćwiczeniach.)

**WNIOSEK**

Niech  $(\Omega, \mu)$  będzie taką przestrzenią z miarą, że  $\mu(\Omega) < +\infty$ . Wówczas jeśli  $p, q \in [1, +\infty]$  spełniają  $p > q$ , to  $L_p(\Omega, \mu) \subset L_q(\Omega, \mu)$ .

## DOWÓD WNIOSKU

Musimy wykazać, że jeśli  $\|f\|_p < +\infty$ , to także  $\|f\|_q < +\infty$ . Niech  $\mathbf{1}_\Omega$  oznacza funkcję stałą równą 1 na  $\Omega$ . Zauważmy, że  $\mathbf{1}_\Omega \in L_r(\Omega, \mu)$  dla wszystkich  $r$ . Niech  $p' = \frac{p}{p-q}$  i  $q' = \frac{p}{q}$ . Liczby  $p'$  i  $q'$  spełniają  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ , a więc na mocy nierówności Höldera mamy

$$\|f\|_q^q = \| |f|^q \|_1 = \| \mathbf{1}_\Omega |f|^q \|_1 \leq \| \mathbf{1}_\Omega \|_{p'} \| |f|^q \|_{q'} = \| \mathbf{1}_\Omega \|_{\frac{p}{p-q}} \| |f|^q \|_{\frac{p}{q}} = \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_p^q < +\infty.$$



## N

niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami z normą i niech  $T: X \rightarrow Y$  będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- 1 odwzorowanie  $T$  jest ciągłe,
- 2 odwzorowanie  $T$  jest ciągłe w 0,
- 3 mamy  $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < +\infty$ .

## DEFINICJA

Odwzorowanie liniowe  $T: X \rightarrow Y$  spełniające powyższe warunki nazywamy **ograniczonym**. Zbiór wszystkich ograniczonych operatorów  $X \rightarrow Y$  oznaczamy symbolem  $B(X, Y)$ , a w przypadku  $Y = X$  piszemy  $B(X)$ .

- Funkcja

$$\|\cdot\|: B(X, Y) \ni T \longmapsto \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \in [0, +\infty[$$

jest normą.

- Ponadto jeśli  $Y$  jest zupełna, to przestrzeń  $B(X, Y)$  z normą  $\|\cdot\|$  jest przestrzenią Banacha.
- Gdy  $Y = \mathbb{C}$ , przestrzeń  $B(X, Y)$  oznaczamy symbolem  $X^*$  i nazywamy **przestrzenią sprzężoną** do  $X$ .
- Z twierdzenia Hahna-Banacha wynika, że odwzorowanie  $\kappa: X \rightarrow X^{**}$  zadane wzorem

$$\kappa(x)(\phi) = \phi(x), \quad x \in X, \phi \in X^*$$

jest izometrią. Obraz  $\kappa$  może być właściwą podprzestrzenią  $X^{**}$ .