

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 2

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

DEFINICJA

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$. **Formą półtoraliniową na V** nazywamy odwzorowanie $F: V \times V$ takie, że

- ❶ dla każdego $v \in V$ odwzorowanie $V \ni w \mapsto F(v, w) \in \mathbb{C}$ jest liniowe,
- ❷ dla każdego $w \in V$ odwzorowanie $V \ni v \mapsto F(v, w) \in \mathbb{C}$ jest antyliniowe.

Forma półtoraliniowa F na V jest

- ❶ **hermitowska**, jeśli $F(w, v) = \overline{F(v, w)}$ dla wszystkich $v, w \in V$,
- ❷ **dodatnia**, jeśli $F(v, v) \geq 0$ dla wszystkich $v \in V$,
- ❸ **ściśle dodatnia**, jeśli $F(v, v) > 0$ dla wszystkich $v \in V \setminus \{0\}$.

Iloczynem skalarnym na V nazywamy ściśle dodatnią formę półtoraliniową na V . Zazwyczaj oznaczamy ją symbolem $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

STWIERDZENIE (TOŻSAMOŚĆ POLARYZACYJNA)

Niech F będzie formą półtoraliniową na V . Wówczas

$$F(v, w) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k F(w + i^k v, w + i^k v), \quad v, w \in V.$$

DOWÓD

Mamy

$$\begin{aligned} F(w + v, w + v) &= F(w, w) + F(w, v) + F(v, w) + F(v, v), \\ iF(w + iv, w + iv) &= iF(w, w) - F(w, v) + F(v, w) + iF(v, v), \\ -F(w - v, w - v) &= -F(w, w) + F(w, v) + F(v, w) - F(v, v), \\ -iF(w - iv, w - iv) &= -iF(w, w) - F(w, v) + F(v, w) - iF(v, v). \end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe równości otrzymujemy $\sum_{k=0}^3 i^k F(w + i^k v, w + i^k v) = 4F(v, w)$. $\square$

PRZYKŁADY INNYCH FORM TOŻSAMOŚCI POLARYZACYJNEJ

$$\textcircled{1} \quad F(v, w) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} F(v + i^k w, v + i^k w),$$

$$\textcircled{2} \quad F(v, w) = \int_{\mathbb{T}} z F(w + zv, w + zv) d\mu(z), \text{ gdzie } \mu \text{ jest borelowsk}{\acute{a}} \text{ miar}{\acute{a}} \\ \text{probabilistyczn}{\acute{a}} \text{ na } \mathbb{T} \text{ tak}{\acute{a}}, \text{ że } \int_{\mathbb{T}} z d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} z^2 d\mu(z) = 0.$$

UWAGA

Funkcja $z \mapsto F(w + zv, w + zv)$ jest ci{a}gła, a wi{e}c całka w punkcie $\textcircled{2}$ ma sens.

STWIERDZENIE

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ i niech F będzie formą półtoraliniową na V . Wtedy

- 1 jeśli F jest ściśle dodatnia, to F jest dodatnia,
- 2 jeśli F jest dodatnia, to F jest hermitowska.

DOWÓD PUNKTU 2

Na mocy tożsamości polaryzacyjnej dla dowolnych $v, w \in V$ mamy

$$\begin{aligned}\overline{F(v, w)} &= \overline{\frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k F(w + i^k v, w + i^k v)} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} \overline{F(w + i^k v, w + i^k v)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^{-k} F(w + i^k v, w + i^k v) = F(w, v).\end{aligned}$$



STWIERDZENIE (NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA)

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ i niech F będzie dodatnią formą półtoraliniową na V . Wtedy

$$|F(v, w)| \leq F(v, v)^{\frac{1}{2}} F(w, w)^{\frac{1}{2}}.$$

DOWÓD

Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R} \ni t \mapsto F(v + tw, v + tw)$. Funkcja ta przyjmuje wyłącznie nieujemne wartości, a ponadto

$$f(t) = F(w, w)t^2 + 2 \operatorname{Re} F(v, w)t + F(v, v),$$

a więc $\Delta = 4(\operatorname{Re} F(v, w))^2 - 4F(w, w)F(v, v) \leq 0$, czyli

$$(\operatorname{Re} F(v, w))^2 \leq F(w, w)F(v, v).$$

STWIERDZENIE (NIERÓWNOŚĆ SCHWARZA)

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ i niech F będzie dodatnią formą półtoraliniową na V . Wtedy

$$|F(v, w)| \leq F(v, v)^{\frac{1}{2}} F(w, w)^{\frac{1}{2}}.$$

DOWÓD

Nierówność ta zachodzi dla wszystkich v i w , a więc także dla par postaci $(e^{i\theta}v, w)$, gdzie θ jest tak dobrana, że $e^{-i\theta}F(v, w) \geq 0$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} |F(v, w)|^2 &= (e^{-i\theta}F(v, w))^2 = (\operatorname{Re} F(e^{i\theta}v, w))^2 \\ &\leq F(w, w)F(e^{i\theta}v, e^{i\theta}v) = F(w, w)F(v, v). \end{aligned}$$



WNIOSKI

Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Wówczas

- ❶ funkcja $V \ni v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v|v \rangle} \in [0, +\infty[$ jest normą,
- ❷ jeśli $v, w \in V$ spełniają $|\langle v|w \rangle| = \|v\|\|w\|$, to są proporcjonalne,
- ❸ iloczyn skalarny jest ciągły względem metryki wyznaczonej przez normę i jednostajnie ciągły na zbiorach ograniczonych,
- ❹ dla dowolnego $v \in V$ mamy $\|v\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle w|v \rangle|$,
- ❺ jeśli v_1 i v_2 spełniają $\langle w|v_1 \rangle = \langle w|v_2 \rangle$ dla wszystkich $w \in V$, to $v_1 = v_2$.

DOWÓD

Ad ❶. Jest jasne, że $\|\alpha v\|^2 = \langle \alpha v | \alpha v \rangle = |\alpha|^2 \langle v | v \rangle = |\alpha|^2 \|v\|^2$ dla wszystkich $v \in V$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Dalej, na mocy nierówności Schwarza

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w | v + w \rangle = \langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle v | w \rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2 |\langle v | w \rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2 \|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

Ad ❷. Niech $|\langle v | w \rangle| = \|v\| \|w\|$. Tak jak w dowodzie nierówności Schwarza, możemy wybrać θ tak, aby $\langle e^{i\theta} v | w \rangle = |\langle v | w \rangle|$. Wtedy wyróżnik wielomianu

$$\langle e^{i\theta} v + tw | e^{i\theta} v + tw \rangle = \langle w | w \rangle t^2 + 2 |\langle v | w \rangle| t + \langle v | v \rangle = \|w\|^2 t^2 + 2 |\langle v | w \rangle| t + \|v\|^2$$

jest równy zero.

DOWÓD

Ad ②. Tak więc istnieje $t_0 \in \mathbb{R}$ takie, że $\langle e^{i\theta}v + t_0w | e^{i\theta}v + t_0w \rangle = 0$, czyli $e^{i\theta}v + t_0w = 0$, a więc v i w są proporcjonalne.

Ad ③. Jeśli $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ i $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$, to

$$\begin{aligned} |\langle v_n | w_n \rangle - \langle v | w \rangle| &\leq |\langle v_n | w_n \rangle - \langle v_n | w \rangle| + |\langle v_n | w \rangle - \langle v | w \rangle| \\ &\leq |\langle v_n | w_n - w \rangle| + |\langle v_n - v | w \rangle| \\ &\leq \|v_n\| \|w_n - w\| + \|v_n - v\| \|w\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

ponieważ ciąg $(\|v_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony. Powyższy wzór pokazuje również, że iloczyn skalarny jest jednostajnie ciągły na ograniczonych podzbiorach $V \times V$.

DOWÓD

Ad ④. Wzór $\|v\| = \sup_{\|w\|=1} |\langle w|v \rangle|$ jest oczywisty dla $v = 0$. Jeśli $v \neq 0$, to z nierówności Schwarza wnioskujemy, że

$$\sup_{\|w\|=1} |\langle w|v \rangle| \leq \sup_{\|w\|=1} \|w\| \|v\| = \|v\|,$$

a z drugiej strony, biorąc $w = \frac{v}{\|v\|}$ otrzymujemy

$$|\langle w|v \rangle| = \frac{1}{\|v\|} \langle v|v \rangle = \frac{1}{\|v\|} \|v\|^2 = \|v\|.$$

Ad ⑤. Rozważmy $v = v_1 - v_2$. Wówczas dla dowolnego $w \in V$ mamy $\langle w|v \rangle = \langle w|v_1 \rangle - \langle w|v_2 \rangle = 0$, a więc $\|v\| = 0$ na mocy punktu ④. $\square$

STWIERDZENIE (REGUŁA RÓWNOLEGŁOKU)

Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Wówczas dla dowolnych $v, w \in V$ mamy $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.

DOWÓD

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= \langle v + w | v + w \rangle + \langle v - w | v - w \rangle \\ &= (\langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle) + (\langle v | v \rangle - \langle v | w \rangle - \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle) \\ &= 2\langle v | v \rangle + 2\langle w | w \rangle.\end{aligned}$$

**UWAGA**

Niech V będzie przestrzenią z normą, w której

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

zachodzi dla wszystkich v i w . Wówczas istnieje iloczyn skalarny na V taki, że $\|v\| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$ dla wszystkich $v \in V$.

- Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym.
- Dalej niech $(v_n)_{n \in I}$ będzie układem liniowo niezależnym (przy czym $I = \{1, \dots, N\}$ lub $I = \mathbb{N}$).
- Indukcyjnie definiujemy ciągi $(y_n)_{n \in I}$ i $(e_n)_{n \in I}$ w następujący sposób:
 - $y_1 = v_1$ i $e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$,
 - $y_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i | v_k \rangle e_i$ i $e_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$ dla $k \geq 1$.
- Otrzymane układy $(y_n)_{n \in I}$ i $(e_n)_{n \in I}$ spełniają
 - układ $(y_n)_{n \in I}$ jest liniowo niezależny,
 - układ $(e_n)_{n \in I}$ jest ortonormalny,
 - $\text{span}\{v_n \mid n \in I\} = \text{span}\{y_n \mid n \in I\} = \text{span}\{e_n \mid n \in I\}$.
- Operację przejścia od układu $(v_n)_{n \in I}$ do $(y_n)_{n \in I}$ nazywamy **ortogonalizacją**, a od $(v_n)_{n \in I}$ do $(e_n)_{n \in I}$ – **ortonormalizacją Grama-Schmidta**.

DEFINICJA

Przestrzenia Hilberta nazywamy przestrzeń z iloczynem skalarnym, która jest zupełna względem metryki wyznaczonej przez normę zdefiniowaną przez iloczyn skalarny.

PRZYKŁAD

Każda skończenie wymiarowa przestrzeń z iloczynem skalarnym jest przestrzenią Hilberta.

PRZYKŁAD

Niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym i niech $\mathcal{H}$ będzie uzupełnieniem przestrzeni metrycznej (V, d) , gdzie $d(v, w) = \|v - w\|$ (norma zdefiniowana przez iloczyn skalarny). Operacje algebraiczne, norma i iloczyn skalarny rozszerzają się jednoznacznie na całą przestrzeń $\mathcal{H}$, która wraz z tymi operacjami jest przestrzenią Hilberta.

PRZYKŁAD

Niech (Ω, μ) będzie przestrzenią z miarą. Dzięki nierówności Höldera wiemy, że dla dowolnych $\varphi, \psi \in L_2(\Omega, \mu)$ całka

$$\int_{\Omega} \overline{\varphi} \psi \, d\mu$$

jest dobrze zdefiniowana i nietrudno się przekonać, że $(\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi | \psi \rangle = \int_{\Omega} \overline{\varphi} \psi \, d\mu$

jest iloczynem skalarnym na $L_2(\Omega, \mu)$. Co więcej, mamy $\|\varphi\|_2 = \sqrt{\langle \varphi | \varphi \rangle}$ dla wszystkich $\varphi \in L_2(\Omega, \mu)$. W szczególności $L_2(\Omega, \mu)$ jest przestrzenią Hilberta.