

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 3

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

DEFINICJA

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Układ wektorów $(\xi_i)_{i \in I}$ nazywamy **ortonormalnym**, jeśli $\langle \xi_i | \xi_j \rangle = \delta_{i,j}$ dla wszystkich $i, j \in I$.

- Każdy układ ortonormalny jest liniowo niezależny.
- W szczególności jeśli $(x_i)_{i \in I}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni $\mathcal{H}$, to możemy uważać $\{x_i\}_{i \in I}$ za podzbiór $\mathcal{H}$.

PRZYKŁADY

- ❶ Niech J będzie dowolnym zbiorem. Dla $j \in J$ niech δ_j oznacza funkcję charakterystyczną singletonu $\{j\}$. Wówczas $(\delta_j)_{j \in J}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni $\ell_2(J)$.
- ❷ Rozważmy przestrzeń Hilberta $L_2([-\pi, \pi])$ (domyślnie z miarą Lebesgue'a) i dla $n \in \mathbb{Z}$ niech

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Wówczas układ $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest ortonormalny. Układ ten nazywamy **układem trygonometrycznym**.

- Ciąg skalarów $(\alpha_i)_{i \in I}$ nazywamy **sumowalnym**, jeśli

$$\sup_{\substack{I_0 \subset I \\ |I_0| < +\infty}} \sum_{i \in I_0} |\alpha_i| < +\infty.$$

- Analogicznie ciąg $(\alpha_i)_{i \in I}$ jest **sumowalny z kwadratem**, jeśli

$$\sup_{\substack{I_0 \subset I \\ |I_0| < +\infty}} \sum_{i \in I_0} |\alpha_i|^2 < +\infty.$$

- Zauważmy, że jeśli $(\alpha_i)_{i \in I}$ jest sumowalny (lub sumowalny z kwadratem), to zbiór tych indeksów i , dla których $\alpha_i \neq 0$ jest co najwyżej przeliczalny.

- Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech $(x_i)_{i \in I}$ będzie układem wektorów z X .
- Powiemy, że szereg $\sum_{i \in I} x_i$ jest zbieżny, jeśli ciąg uogólniony

$$\left(\sum_{i \in I_0} x_i \right)_{\substack{I_0 \subset I \\ |I_0| < +\infty}}$$

ma granicę w X .

- Zbieżność ciągu uogólnionego w przestrzeni Banacha jest równoważna spełnieniu warunku Cauchy'ego. W przypadku powyższego ciągu sum częściowych wygląda on tak:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_\varepsilon \subset I \quad |I_\varepsilon| < +\infty \quad \forall I_1, I_2 \supset I_\varepsilon \quad |I_1|, |I_2| < +\infty \implies \left\| \sum_{i \in I_1} x_i - \sum_{i \in I_2} x_i \right\| < \varepsilon.$$

LEMAT

W przestrzeni Banacha każdy uogólniony ciąg wektorów spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

DOWÓD

Niech $(x_i)_{i \in I}$ spełnia warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists i_\varepsilon \in I \quad \forall i_1, i_2 \geq i_\varepsilon \quad \|x_{i_1} - x_{i_2}\| < \varepsilon.$$

Możemy indukcyjnie zdefiniować $j_n \in I$ w taki sposób, że

- dla dowolnych $i, j \in I$ takich, że $i, j \geq j_n$ mamy $\|x_i - x_j\| < \frac{1}{n}$,
- $j_n \geq j_k$ dla wszystkich $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Teraz niech $y_n = x_{j_n}$. Na początek pokażemy, że $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

LEMAT

W przestrzeni Banacha każdy uogólniony ciąg wektorów spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

DOWÓD

Weźmy $\varepsilon > 0$ i N_ε takie, że $\frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$. Wówczas jeśli $m, n \geq N_\varepsilon$, to $j_n \geq j_{N_\varepsilon}$ i $j_m \geq j_{N_\varepsilon}$, a więc $\|y_n - y_m\| = \|x_{j_n} - x_{j_m}\| < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$.

Ciąg Cauchy'ego $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do jakiegoś wektora x . Pokażemy, że $(x_i)_{i \in I}$ również zbiega do x . W tym celu ponownie weźmy dowolny $\varepsilon > 0$ i niech n_ε będzie takie, że $\frac{1}{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dalej istnieje m_ε takie, że $\|y_k - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dla wszystkich $k \geq m_\varepsilon$. Niech $K_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$. Wówczas dla $i \geq j_{K_\varepsilon}$

$$\|x_i - x\| \leq \|x_i - x_{j_{K_\varepsilon}}\| + \|x_{j_{K_\varepsilon}} - x\| = \|x_i - x_{j_{K_\varepsilon}}\| + \|y_{K_\varepsilon} - x\| < \frac{1}{K_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{n_\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$



TWIERDZENIE

Niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i niech $(\alpha_i)_{i \in I}$ będzie sumowalnym z kwadratem układem skalarów. Wówczas szereg $\sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i$ jest zbieżny w $\mathcal{H}$.

DOWÓD

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ niech $I_\varepsilon \subset I$ będzie takim skończonym podzbiorem, że

$$\sum_{i \in I_\varepsilon} |\alpha_i|^2 > \sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 - \varepsilon.$$

Zauważmy, że wówczas dla dowolnego $J \subset I \setminus I_\varepsilon$ mamy $\sum_{i \in J} |\alpha_i|^2 < \varepsilon$.

Teraz niech I_1 i I_2 będą skończonymi podzbiorami I takimi, że $I_\varepsilon \subset I_1$ oraz $I_\varepsilon \subset I_2$ oraz dla $i \in I_1 \div I_2$ połóżmy

$$\tilde{\alpha}_i = \begin{cases} \alpha_i & i \in I_1 \\ -\alpha_i & i \in I_2 \end{cases}.$$

TWIERDZENIE

Niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i niech $(\alpha_i)_{i \in I}$ będzie sumowalnym z kwadratem układem skalarów. Wówczas szereg $\sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i$ jest zbieżny w $\mathcal{H}$.

DOWÓD

Wtedy

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I_1} \alpha_i \phi_i - \sum_{i \in I_2} \alpha_i \phi_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i \in I_1 \div I_2} \tilde{\alpha}_i \phi_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i \in I_1 \div I_2} \tilde{\alpha}_i \phi_i \left| \sum_{j \in I_1 \div I_2} \tilde{\alpha}_j \phi_j \right. \right\rangle \\ &= \sum_{i, j \in I_1 \div I_2} \overline{\tilde{\alpha}_i} \tilde{\alpha}_j \langle \phi_i | \phi_j \rangle = \sum_{i \in I_1 \div I_2} |\tilde{\alpha}_i|^2 = \sum_{i \in I_1 \div I_2} |\alpha_i|^2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

ponieważ I_ε zawiera się w przecięciu I_1 i I_2 , a więc $I_1 \div I_2 \subset I \setminus I_\varepsilon$.

TWIERDZENIE

Niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i niech $(\alpha_i)_{i \in I}$ będzie sumowalnym z kwadratem układem skalarów. Wówczas szereg $\sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i$ jest zbieżny w $\mathcal{H}$.

DOWÓD

Tym sposobem wykazaliśmy, że ciąg uogólniony

$$\left(\sum_{i \in F} \alpha_i \phi_i \right)_{\substack{F \subset I \\ |F| < +\infty}}$$

spełnia warunek Cauchy'ego, a co za tym idzie jest zbieżny w zupełnej przestrzeni $\mathcal{H}$. Innymi słowy szereg $\sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i$ jest zbieżny. $\square$

TWIERDZENIE

Niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i niech $\xi \in \mathcal{H}$. Dla $i \in I$ połóżmy $\alpha_i = \langle \phi_i | \xi \rangle$. Wówczas

- ❶ $\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < +\infty$,
- ❷ wektor $\xi' = \xi - \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i$ jest ortogonalny do ϕ_j dla wszystkich $j \in I$.

DOWÓD

Ad ❶. Weźmy skończony $I_0 \subset I$ i niech $\eta = \xi - \sum_{i \in I_0} \alpha_i \phi_i$. Wtedy

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\eta\|^2 &= \left\langle \xi - \sum_{i \in I_0} \alpha_i \phi_i \middle| \xi - \sum_{j \in I_0} \alpha_j \phi_j \right\rangle = \|\xi\|^2 - \sum_{i \in I_0} \overline{\alpha_i} \langle \phi_i | \xi \rangle - \sum_{j \in I_0} \alpha_j \langle \xi | \phi_j \rangle + \sum_{i, j \in I_0} \overline{\alpha_i} \alpha_j \langle \phi_i | \phi_j \rangle \\ &= \|\xi\|^2 - \sum_{i \in I_0} \overline{\alpha_i} \alpha_i - \sum_{j \in I_0} \alpha_j \overline{\alpha_j} + \sum_{i \in I_0} \overline{\alpha_i} \alpha_i = \|\xi\|^2 - \sum_{i \in I_0} |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 \leq \|\xi\|^2 < +\infty$.

TWIERDZENIE

Niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i niech $\xi \in \mathcal{H}$. Dla $i \in I$ połóżmy $\alpha_i = \langle \phi_i | \xi \rangle$. Wówczas

- ❶ $\sum_{i \in I} |\alpha_i|^2 < +\infty$,
- ❷ wektor $\xi' = \xi - \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i$ jest ortogonalny do ϕ_j dla wszystkich $j \in I$.

DOWÓD

Ad ❷. Ponieważ iloczyn skalarny jest ciągły, dla dowolnego $j \in I$ mamy

$$\langle \phi_j | \xi' \rangle = \left\langle \phi_j \left| \xi - \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i \right. \right\rangle = \langle \phi_j | \xi \rangle - \sum_{i \in I} \alpha_i \langle \phi_j | \phi_i \rangle = \alpha_j - \alpha_j = 0,$$

tj. ξ' jest ortogonalny do ϕ_j . □

UWAGA

W dowodzie ostatniego twierdzenia wykazaliśmy, że jeśli $(\phi_i)_{i \in I}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i $\xi \in \mathcal{H}$, to

$$\sum_{i \in I} |\langle \phi_i | \xi \rangle|^2 \leq \|\xi\|^2.$$

Nierówność ta znana jest pod nazwą **nierówności Bessela**.

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie układem ortonormalnym w $\mathcal{H}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ❶ układ $(\phi_i)_{i \in I}$ jest maksymalny,
- ❷ podprzestrzeń $\text{span}\{\phi_i \mid i \in I\}$ jest gęsta w $\mathcal{H}$,
- ❸ dla dowolnego $\xi \in \mathcal{H}$ warunek $\langle \phi_i | \xi \rangle = 0$ dla wszystkich $i \in I$ pociąga $\xi = 0$,
- ❹ dla dowolnego $\xi \in \mathcal{H}$ mamy $\xi = \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i$,
- ❺ dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ mamy $\langle \xi | \eta \rangle = \sum_{i \in I} \langle \xi | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \eta \rangle$,
- ❻ dla dowolnego $\xi \in \mathcal{H}$ mamy $\|\xi\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle \phi_i | \xi \rangle|^2$.

DOWÓD TWIERDZENIA

① $\Rightarrow$ ② Niech $\mathcal{M}$ oznacza domknięcie $\text{span}\{\phi_i \mid i \in I\}$ (jest jasne, że $\mathcal{M}$ jest podprzestrzenią $\mathcal{H}$) i przypuśćmy, że $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$. Weźmy wektor $\xi \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{M}$. Wtedy $\xi \neq 0$ i na mocy poprzedniego twierdzenia wektor

$$\xi' = \xi - \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i$$

jest ortogonalny do wszystkich ϕ_j . Co więcej $\xi' \neq 0$, bo warunek $\xi' = 0$ oznacza $\xi \in \mathcal{M}$. Niech $\eta = \frac{\xi'}{\|\xi'\|}$. Wówczas η ma długość 1 i jest ortogonalny do wszystkich ϕ_j , a więc układ $\{\phi_i\}_{i \in I} \cup \{\eta\}$ jest ortonormalny i ściśle większy niż $\{\phi_i\}_{i \in I} \cup \{\eta\}$.

② $\Rightarrow$ ③ Jeśli $\xi \in \mathcal{H}$ jest ortogonalny do ϕ_i dla wszystkich $i \in I$, to ξ jest ortogonalny do $\text{span}\{\phi_i \mid i \in I\}$, tj.

$$\langle \eta | \xi \rangle = 0, \quad \eta \in \text{span}\{\phi_i \mid i \in I\}.$$

Na mocy ciągłości iloczynu skalarnego otrzymujemy więc $\langle \eta | \xi \rangle = 0$ dla każdego $\eta \in \mathcal{H}$, np. $\eta = \xi$, co daje $\|\xi\|^2 = \langle \xi | \xi \rangle = 0$.

DOWÓD TWIERDZENIA

③ $\Rightarrow$ ④ Połóżmy

$$\xi' = \xi - \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i.$$

Skoro ξ' jest ortogonalny do wszystkich ϕ_j , otrzymujemy $\xi' = 0$.

④ $\Rightarrow$ ⑤ Z ciągłości iloczynu skalarnego i jego antyliniowości względem pierwszego argumentu dostajemy

$$\langle \xi | \eta \rangle = \left\langle \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i \middle| \eta \right\rangle = \sum_{i \in I} \overline{\langle \phi_i | \xi \rangle} \langle \phi_i | \eta \rangle = \sum_{i \in I} \langle \xi | \phi_i \rangle \langle \phi_i | \eta \rangle.$$

⑤ $\Rightarrow$ ⑥ Kładziemy $\eta = \xi$.

⑥ $\Rightarrow$ ① Przypuśćmy, że S jest układem ortonormalnym w $\mathcal{H}$ takim, że $\{\phi_i\}_{i \in I} \subsetneq S$ i weźmy $\xi \in S \setminus \{\phi_i\}_{i \in I}$. Wtedy $1 = \|\xi\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle \phi_i | \xi \rangle|^2 = 0$. Sprzeczność ta pokazuje, że układ $\{\phi_i\}_{i \in I}$ jest maksymalny. □

DEFINICJA

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta. Układ ortonormalny $(\phi_i)_{i \in I}$ w $\mathcal{H}$ spełniający równoważne warunki z poprzedniego twierdzenia nazywamy **bazą ortonormalną** przestrzeni $\mathcal{H}$.

- Niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.
- Zapisanie dowolnego $\xi \in \mathcal{H}$ w postaci $\sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i$ nazywamy **rozwinieciem Fouriera** ξ w bazie $(\phi_i)_{i \in I}$.

- Równość

$$\|\xi\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle \phi_i | \xi \rangle|^2$$

nosi nazwę **równości Parsevala**.

- Każda przestrzeń Hilberta ma bazę ortonormalną.

WNIOSEK

Każda przestrzeń Hilberta jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią $\ell_2(I)$ dla pewnego I .

DOWÓD

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i niech $(\phi_i)_{i \in I}$ będzie jej bazą ortonormalną. Zdefiniujmy odwzorowanie $U: \mathcal{H} \rightarrow \ell_2(I)$ definiując $U\xi$ jako ciąg skalarów $(\langle \phi_i | \xi \rangle)_{i \in I}$. Tak zdefiniowane odwzorowanie U jest liniowe, a równość

$$\|U\xi\|_2^2 = \sum_{i \in I} |\langle \phi_i | \xi \rangle|^2 = \|\xi\|^2$$

wynika z równości Parsevala. W końcu jeśli $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ jest dowolnym elementem $\ell_2(I)$, to $\alpha = U\xi$ dla $\xi = \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i$, czyli U jest izomorfizmem. $\square$

UWAGI

- ❶ Baza ortonormalna nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta nie jest jej bazą w sensie algebraicznym.
- ❷ Dowolne dwie bazy ortonormalne przestrzeni tej samej przestrzeni Hilberta są równoliczne.
- ❸ Moc dowolnej bazy ortonormalnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ nazywamy **wymiarem Hilberta** $\mathcal{H}$ i oznaczamy symbolem $\dim \mathcal{H}$.
- ❹ Przestrzeń Hilberta jest ośrodkowa (zawiera przeliczalny podzbiór gęsty) wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna jej baza ortonormalna jest przeliczalna lub skończona.