

# METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 5

## WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

## TWIERDZENIE

Niech  $\mathcal{H}$  będzie przestrzenią Hilberta i niech  $\mathcal{M}$  będzie domkniętą podprzestrzenią  $\mathcal{H}$ . Wówczas dla dowolnego  $\varphi \in \mathcal{H}$  istnieją  $\xi \in \mathcal{M}$  i  $\eta \in \mathcal{M}^\perp$  takie, że  $\varphi = \xi + \eta$ . Ponadto rozkład ten jest jedyny.

## DOWÓD

Weźmy  $\varphi \in \mathcal{H}$  i niech  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  będzie bazą ortonormalną  $\mathcal{M}$ . Kładziemy

$$\xi = \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \varphi \rangle \phi_i \quad \text{and} \quad \eta = \varphi - \xi.$$

Powyższy szereg jest zbieżny. Ponadto  $\xi \in \mathcal{M}$ , a  $\eta \in \mathcal{M}^\perp$ .

Przypuśćmy, że  $\varphi$  ma inny rozkład  $\varphi = \xi' + \eta'$  na  $\xi' \in \mathcal{M}$  oraz  $\eta' \in \mathcal{M}^\perp$ . wtedy  $\xi - \xi' = \eta' - \eta$  jest elementem  $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp$ , a więc  $\xi = \xi'$  i  $\eta = \eta'$  na mocy lematu.  $\square$

- Powyżej wykazaliśmy, że jeśli  $\mathcal{M}$  jest domkniętą podprzestrzenią  $\mathcal{H}$ , to  $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ .

## WNIOSEK

Niech  $\mathcal{M}$  będzie domkniętą podprzestrzenią  $\mathcal{H}$ . Wówczas  $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$ .

## DOWÓD

Wiemy, że  $\mathcal{M}^{\perp\perp} \supset \mathcal{M}$ . Z drugiej strony, jeśli  $\varphi \in \mathcal{M}^{\perp\perp}$ , to zapisując  $\varphi = \xi + \eta$ , gdzie  $\xi \in \mathcal{M}$  i  $\eta \in \mathcal{M}^\perp$  otrzymujemy

$$\mathcal{M}^\perp \ni \eta = \varphi - \xi \in \mathcal{M}^{\perp\perp} + \mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{\perp\perp},$$

a więc  $\eta \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{M}^{\perp\perp} = \{0\}$ .



## WNIOSEK

Niech  $S \subset \mathcal{H}$ . Wówczas

$$\textcircled{1} \quad S^\perp = \overline{\text{span}\{S\}}^\perp,$$

$$\textcircled{2} \quad S^{\perp\perp} = \overline{\text{span}\{S\}}.$$

## DOWÓD

Mamy  $S \subset \overline{\text{span}\{S\}}$ , a więc  $S^\perp \supset \overline{\text{span}\{S\}}^\perp$ . Biorąc dopełnienie ortogonalne obu stron otrzymujemy  $S^{\perp\perp} \subset \overline{\text{span}\{S\}}^{\perp\perp}$ , a zatem  $S^{\perp\perp} \subset \overline{\text{span}\{S\}}$  na mocy poprzedniego wniosku (dla  $\mathcal{M} = \overline{\text{span}\{S\}}$ ).

Ale  $S^{\perp\perp}$  jest domkniętą podprzestrzenią  $\mathcal{H}$  zawierającą  $S$ , skąd wynika, że  $S^{\perp\perp} \supset \overline{\text{span}\{S\}}$ , co dowodzi punktu  $\textcircled{2}$ .

## WNIOSEK

Niech  $S \subset \mathcal{H}$ . Wówczas

$$\textcircled{1} \quad S^\perp = \overline{\text{span}\{S\}}^\perp,$$

$$\textcircled{2} \quad S^{\perp\perp} = \overline{\text{span}\{S\}}.$$

## DOWÓD

Biorąc dopełnienie ortogonalne obu stron równości  $S^{\perp\perp} = \overline{\text{span}\{S\}}$  dostajemy  $(S^{\perp\perp})^\perp = \overline{\text{span}\{S\}}^\perp$ . Ale

$$(S^{\perp\perp})^\perp = ((S^\perp)^\perp)^\perp = (S^\perp)^{\perp\perp} = S^\perp$$

ponownie na mocy poprzedniego wniosku (dla  $\mathcal{M} = S^\perp$ ). Tym samym wykazaliśmy punkt  $\textcircled{1}$ . □

## DEFINICJA

Niech  $\mathcal{H}$  będzie przestrzenią Hilberta, a  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$  domkniętą podprzestrzenią. Rzut na  $\mathcal{M}$  wzdłuż  $\mathcal{M}^\perp$  nazywamy **rzutem ortogonalnym** na  $\mathcal{M}$  i oznaczamy symbolem  $P_{\mathcal{M}}$ .

## UWAGA

Z w dowodzie ostatniego twierdzenia użyliśmy bardzo wygodnego wzoru na  $P_{\mathcal{M}}$ : dla dowolnej bazy  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  mamy

$$P_{\mathcal{M}}\xi = \sum_{i \in I} \langle \phi_i | \xi \rangle \phi_i$$

dla wszystkich  $\xi \in \mathcal{H}$ .

## STWIERDZENIE

Niech  $\mathcal{M}$  będzie niezerową podprzestrzenią  $\mathcal{H}$ . Wówczas  $P_{\mathcal{M}}$  jest ograniczony i  $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$ . Ponadto  $P_{\mathcal{M}^\perp} = \mathbb{1} - P_{\mathcal{M}}$ .

## DOWÓD

Weźmy  $\varphi \in \mathcal{H}$  i niech  $\varphi = \xi + \eta$  będzie rozkładem  $\varphi$  na komponenty w  $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ . Mamy  $P_{\mathcal{M}}\varphi = \xi$  oraz  $P_{\mathcal{M}^\perp}\varphi = \eta$ , co pokazuje, że  $P_{\mathcal{M}^\perp} = \mathbb{1} - P_{\mathcal{M}}$ . Dalej

$$\|\varphi\|^2 = \langle \varphi | \varphi \rangle = \langle \xi + \eta | \xi + \eta \rangle = \langle \xi | \xi \rangle + \langle \xi | \eta \rangle + \langle \eta | \xi \rangle + \langle \eta | \eta \rangle = \langle \xi | \xi \rangle + \langle \eta | \eta \rangle = \|\xi\|^2 + \|\eta\|^2,$$

a więc  $\|P_{\mathcal{M}}\varphi\| = \|\xi\| \leq \|\varphi\|$ , czyli  $\|P_{\mathcal{M}}\| \leq 1$ . Z drugiej strony, skoro  $\mathcal{M} \neq \{0\}$ , istnieje niezerowy wektor  $\psi \in \mathcal{M}$  o normie 1 i mamy  $\|P_{\mathcal{M}}\| \geq \|P_{\mathcal{M}}\psi\| = \|\psi\| = 1$ .  $\square$

## PRZYKŁAD

Rozważmy bazę  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  przestrzeni  $L_2([-\pi, \pi])$  i niech  $\mathcal{M} = \text{span}\{\phi_n \mid |n| < N\}$ . Rzut ortogonalny  $P_{\mathcal{M}}$  możemy opisać następującym wzorem:

$$P_{\mathcal{M}}\psi = \sum_{n=-N}^N \langle \phi_n | \psi \rangle \phi_n = \sum_{n=-N}^N \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\tau} \psi(\tau) d\tau \right) \phi_n.$$

Stąd

$$(P_{\mathcal{M}}\psi)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in(t-\tau)} \psi(\tau) d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t-\tau) \psi(\tau) d\tau,$$

gdzie

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Funkcję  $D_N$  nazywamy **jądrem Dirichleta**.

## PRZYKŁAD

Mamy

$$\begin{aligned} D_N(\theta) &= \frac{e^{-iN\theta}}{2\pi} \sum_{n=0}^{2N} e^{in\theta} = \frac{e^{-iN\theta}}{2\pi} \frac{1 - e^{i(2N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-iN\theta} - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i(N+\frac{1}{2})\theta} - e^{i(N+\frac{1}{2})\theta}}{e^{-i\frac{1}{2}\theta} - e^{i\frac{1}{2}\theta}} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\theta)}{2\pi \sin(\frac{1}{2}\theta)} \end{aligned}$$

dla  $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ , natomiast  $D_N(\theta) = \frac{2N+1}{2\pi}$  dla  $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ .

## TWIERDZENIE

Niech  $C$  będzie niepustym domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$  i niech  $\varphi \in \mathcal{H} \setminus C$ . Wówczas istnieje jedyny wektor  $\xi \in C$  minimalizujący funkcję  $C \ni \zeta \mapsto \|\varphi - \zeta\|$ . Ponadto  $\xi$  jest jedynym elementem  $C$  takim, że

$$\operatorname{Re} \langle \zeta - \xi | \varphi - \xi \rangle \leq 0, \quad \zeta \in C.$$

## DOWÓD

Położmy  $\delta = \inf_{\zeta \in C} \|\varphi - \zeta\|$ . Istnieje ciąg  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  elementów  $C$  taki, że  $\|\varphi - \xi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta$ .

Dalej, z reguły równoległoboku wynika, że dla wszystkich  $m, n \in \mathbb{N}$  mamy

$$\begin{aligned} 2(\|\varphi - \xi_n\|^2 + \|\varphi - \xi_m\|^2) &= \|(\varphi - \xi_n) + (\varphi - \xi_m)\|^2 + \|(\varphi - \xi_n) - (\varphi - \xi_m)\|^2 \\ &= \|2\varphi - \xi_n - \xi_m\|^2 + \|\xi_n - \xi_m\|^2, \end{aligned}$$

a więc

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = 2(\|\varphi - \xi_n\|^2 + \|\varphi - \xi_m\|^2) - 4\left\|\varphi - \frac{\xi_n + \xi_m}{2}\right\|^2.$$

Skoro  $C$  jest wypukły, mamy  $\frac{\xi_n + \xi_m}{2} \in C$ , a stąd  $\left\|\varphi - \frac{\xi_n + \xi_m}{2}\right\| \geq \delta$ . W konsekwencji

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 \leq 2(\|\varphi - \xi_n\|^2 + \|\varphi - \xi_m\|^2) - 4\delta^2,$$

co pokazuje, że  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jest ciągiem Cauchy'ego.

## DOWÓD

Zbiór  $C$  jest domknięty, a zatem  $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$  należy do  $C$  i jest jasne, że  $\xi$  minimalizuje funkcję  $C \ni \zeta \mapsto \|\varphi - \zeta\|$ .

Zauważmy, że wykazaliśmy powyżej, iż każdy ciąg  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  elementów  $C$  taki, że  $\|\varphi - \xi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta$  jest zbieżny do wektora z  $C$  minimalizującego odległość od  $\varphi$ . Przypuśćmy teraz, że są dwa takie wektory  $\xi$  i  $\xi'$ . Wówczas ciąg  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zdefiniowany wzorem

$$\xi_n = \begin{cases} \xi & n \text{ jest nieparzyste} \\ \xi' & n \text{ jest parzyste} \end{cases}$$

spełnia  $\|\varphi - \xi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta$ , a więc jest zbieżny. Wynika stąd, że  $\xi = \xi'$ .

Weźmy teraz dowolny wektor  $\zeta \in C$ . Dla  $t \in [0, 1]$  wektor  $t\zeta + (1 - t)\xi$  należy do  $C$ , a więc

$$\begin{aligned} \|\varphi - \xi\|^2 &\leq \|\varphi - (t\zeta + (1 - t)\xi)\|^2 = \|(\varphi - \xi) - t(\zeta - \xi)\|^2 \\ &= \langle (\varphi - \xi) - t(\zeta - \xi) | (\varphi - \xi) - t(\zeta - \xi) \rangle = \|\varphi - \xi\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle \zeta - \xi | \varphi - \xi \rangle + t^2 \|\zeta - \xi\|^2. \end{aligned}$$

## DOWÓD

Pokazaliśmy więc, że dla dowolnego  $t \in ]0, 1]$  mamy  $\operatorname{Re} \langle \zeta - \xi | \varphi - \xi \rangle \leq \frac{t}{2} \|\zeta - \xi\|^2$ . W szczególności  $\operatorname{Re} \langle \zeta - \xi | \varphi - \xi \rangle \leq 0$ .

Przypuśćmy wreszcie, że  $\xi$  i  $\xi'$  są takimi elementami  $C$ , że

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \langle \zeta - \xi | \varphi - \xi \rangle &\leq 0, \\ \operatorname{Re} \langle \zeta - \xi' | \varphi - \xi' \rangle &\leq 0\end{aligned}$$

dla wszystkich  $\zeta \in C$ . Wstawiając  $\zeta = \xi'$  do pierwszej nierówności oraz  $\zeta = \xi$  do drugiej otrzymujemy

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \langle \xi' - \xi | \varphi - \xi \rangle &\leq 0, \\ \operatorname{Re} \langle \xi' - \xi | \xi' - \varphi \rangle &\leq 0\end{aligned}$$

i dodając te nierówności stronami dostajemy  $\operatorname{Re} \langle \xi' - \xi | \xi' - \xi \rangle \leq 0$ . Ale skoro  $\operatorname{Re} \langle \xi' - \xi | \xi' - \xi \rangle = \|\xi' - \xi\|^2$ , widzimy, że  $\xi' = \xi$ .  $\square$

- Niech  $\mathcal{H}$  będzie przestrzenią Hilberta i niech  $\Theta$  będzie niezerowym ciągłym funkcjonałem na  $\mathcal{H}$ .
- Funkcjonał  $\Theta$  obcięty do  $(\ker \Theta)^\perp$  jest różnowartościowym odwzorowaniem liniowym w  $\mathbb{C}$ , a więc  $\dim(\ker \Theta)^\perp \leq 1$ .
- Skoro  $\Theta \neq 0$ , musi być  $\dim(\ker \Theta)^\perp = 1$ .

#### UWAGA

Dla dowolnego niezerowego funkcjonału liniowego  $\Lambda$  na przestrzeni Banacha  $X$  mamy

$$\left( \Lambda \text{ jest ciągły} \right) \iff \left( \ker \Lambda \text{ nie jest gęstą podprzestrzenią w } X \right).$$

W szczególności jeśli  $\Theta$  jest nieciągłym funkcjonałem na  $\mathcal{H}$ , to  $\dim(\ker \Theta)^\perp = 0$ .

## TWIERDZENIE RIESZA O REPREZENTACJI

Niech  $\Theta$  będzie ciągłym funkcjonałem na przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ . Wówczas istnieje dokładnie jeden wektor  $\theta \in \mathcal{H}$  taki, że

$$\Theta(\xi) = \langle \theta | \xi \rangle, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Ponadto  $\|\theta\| = \|\Theta\|$ .

## DOWÓD

Jedyność wektora  $\theta$  jest oczywista tak samo jak fakt, że dla  $\Theta = 0$  mamy  $\theta = 0$ . Przyjmijmy więc, że  $\Theta \neq 0$ .

Z lematu wiemy, że  $\dim(\ker \Theta)^\perp = 1$ . Niech  $\tilde{\theta}$  będzie wektorem jednostkowym w  $(\ker \Theta)^\perp$ . W szczególności  $\{\tilde{\theta}\}$  jest bazą ortonormalną  $(\ker \Theta)^\perp$ . Wynika stąd, że rozkład dowolnego  $\xi \in \mathcal{H}$  na składowe w  $\ker \Theta$  i  $(\ker \Theta)^\perp$  wygląda tak:

$$\xi = (\xi - \langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \tilde{\theta}) + \langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \tilde{\theta}.$$

## TWIERDZENIE RIESZA O REPREZENTACJI

Niech  $\Theta$  będzie ciągłym funkcjonałem na przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ . Wówczas istnieje dokładnie jeden wektor  $\theta \in \mathcal{H}$  taki, że

$$\Theta(\xi) = \langle \theta | \xi \rangle, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Ponadto  $\|\theta\| = \|\Theta\|$ .

## DOWÓD

W konsekwencji

$$\Theta(\xi) = \Theta\left((\xi - \langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \tilde{\theta}) + \langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \tilde{\theta}\right) = \Theta\left(\langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \tilde{\theta}\right) = \langle \tilde{\theta} | \xi \rangle \Theta(\tilde{\theta}) = \langle \overline{\Theta(\tilde{\theta})} \tilde{\theta} | \xi \rangle,$$

co pokazuje, że  $\theta = \overline{\Theta(\tilde{\theta})} \tilde{\theta}$  jest poszukiwanym wektorem.

W szczególności  $\|\Theta\| = \sup_{\|\xi\|=1} |\langle \theta | \xi \rangle| = \|\theta\|$ .

