

# METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 6

## WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

## DEFINICJA

Niech  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{K}$  będą przestrzeniami Hilberta. **Formą półtoraliniową** na  $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$  nazywamy funkcję  $F: \mathcal{H} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$  taką, że

- ❶ dla każdego  $\xi \in \mathcal{H}$  odwzorowanie  $\mathcal{K} \ni \eta \mapsto F(\xi, \eta) \in \mathbb{C}$  jest liniowe,
- ❷ dla każdego  $\eta \in \mathcal{K}$  odwzorowanie  $\mathcal{H} \ni \xi \mapsto F(\xi, \eta) \in \mathbb{C}$  jest antyliniowe.

Formę  $F$  nazywamy **ograniczoną** jeśli istnieje stała  $C > 0$  taka, że  $|F(\xi, \eta)| \leq C\|\xi\|\|\eta\|$  dla wszystkich  $(\xi, \eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$ .

- Najmniejsza stała  $C$  taką, że  $|F(\xi, \eta)| \leq C\|\xi\|\|\eta\|$  dla wszystkich  $(\xi, \eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{K}$  jest równa  $\sup_{\|\xi\|=1=\|\eta\|} |F(\xi, \eta)|$ . Nazywamy ją czasem **normą**  $F$  i oznaczamy symbolem  $\|F\|$ .
- Niech  $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  i niech  $F(\xi, \eta) = \langle \xi | T\eta \rangle$ . Wówczas  $F$  jest ograniczoną formą półtoraliniową na  $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$  (i mamy  $\|F\| = \|T\|$ ).

## TWIERDZENIE

Niech  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{K}$  będą przestrzeniami Hilberta i niech  $F$  będzie ograniczoną formą półtoraliniową na  $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ . Wówczas istnieje jedyny operator  $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  taki, że  $F(\xi, \eta) = \langle \xi | T\eta \rangle$  dla wszystkich  $\xi \in \mathcal{H}$ ,  $\eta \in \mathcal{K}$ .

## DOWÓD

Dla dowolnego  $\eta \in \mathcal{K}$  odwzorowanie  $\Theta_\eta: \mathcal{H} \ni \xi \mapsto \overline{F(\xi, \eta)} \in \mathbb{C}$  jest liniowe i ograniczone, a więc na mocy twierdzenia Riesz o reprezentacji istnieje jedyny wektor  $\theta_\eta \in \mathcal{H}$  taki, że  $\Theta_\eta = \langle \theta_\eta | \cdot \rangle$ . Innymi słowy

$$F(\xi, \eta) = \langle \xi | \theta_\eta \rangle, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Ponadto dla  $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{K}$  oraz  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  mamy

$$F(\xi, \alpha\eta_1 + \beta\eta_2) = \alpha F(\xi, \eta_1) + \beta F(\xi, \eta_2) = \alpha \langle \xi | \theta_{\eta_1} \rangle + \beta \langle \xi | \theta_{\eta_2} \rangle = \langle \xi | \alpha\theta_{\eta_1} + \beta\theta_{\eta_2} \rangle$$

dla wszystkich  $\xi$ . Tak więc z jednoznaczności wektora  $\theta_{\alpha\eta_1 + \beta\eta_2}$  wynika, że  $\eta \mapsto \theta_\eta$  jest odwzorowaniem liniowym.

## TWIERDZENIE

Niech  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{K}$  będą przestrzeniami Hilberta i niech  $F$  będzie ograniczoną formą półtoraliniową na  $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ . Wówczas istnieje jedyny operator  $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  taki, że  $F(\xi, \eta) = \langle \xi | T\eta \rangle$  dla wszystkich  $\xi \in \mathcal{H}$ ,  $\eta \in \mathcal{K}$ .

## DOWÓD

Definiujemy więc odwzorowanie liniowe  $T: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$  kładąc  $T\eta = \theta_\eta$ . Sprawdźmy, że  $T$  jest odwzorowaniem ograniczonym:

$$\|T\| = \sup_{\|\eta\|=1} \|T\eta\| = \sup_{\|\eta\|=1} \sup_{\|\xi\|=1} |\langle \xi | T\eta \rangle| \leq C,$$

gdzie  $C$  jest taką stałą, że  $|F(\xi, \eta)| \leq C\|\xi\|\|\eta\|$  dla wszystkich  $\xi$  i  $\eta$ .

Jedyność  $T$  wynika natychmiast z jedyności wektora  $\theta_\eta$  dla każdego  $\eta \in \mathcal{K}$ . □

## UWAGA

Powyższe twierdzenie mówi, że istnieje bijekcja pomiędzy ograniczonymi formami półtoraliniowymi na  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , a ograniczonymi operatorami  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Co więcej, z dowodu natychmiast wynika, że jeśli forma  $F$  odpowiada operatorowi  $T$ , to  $\|F\| = \|T\|$ .

## CIEKAWOSTKA

Niech  $A, B \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ . Wówczas istnieje liczba  $\mu \in \mathbb{T}$  taka, że  $B = \mu A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $|\langle \xi | A \eta \rangle| = |\langle \xi | B \eta \rangle|$  dla wszystkich  $\xi \in \mathcal{H}$  i  $\eta \in \mathcal{H}$ .

- Niech  $F$  będzie formą półtoraliniową na  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .
- Jest jasne, że funkcja

$$F^*: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (\eta, \xi) \longmapsto \overline{F(\xi, \eta)} \in \mathbb{C}$$

jest formą półtoraliniową i  $F^*$  jest ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy ograniczona jest  $F$  (i jeśli są ograniczone, to  $\|F^*\| = \|F\|$ ).

- Tak więc każdemu operatorowi  $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  odpowiada dokładnie jeden operator  $T^* \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  taki, że

$$\langle \xi | T\eta \rangle = \overline{\langle \eta | T^*\xi \rangle} = \langle T^*\xi | \eta \rangle$$

dla wszystkich  $\xi$  i  $\eta$ .

## DEFINICJA

Niech  $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ . Jedyny operator  $T^* \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  spełniający

$$\langle \xi | T\eta \rangle = \langle T^*\xi | \eta \rangle, \quad \xi \in \mathcal{H}, \eta \in \mathcal{H}$$

nazywamy operatorem **hermitowsko sprzężonym** do  $T$ .

## STWIERDZENIE

- ❶ Dla każdego  $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  mamy  $(T^*)^* = T$ ,
- ❷ jeśli  $T_1, T_2 \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , to  $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \bar{\alpha} T_1^* + \bar{\beta} T_2^*$ ,
- ❸ jeśli  $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  i  $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ , to  $(ST)^* = T^* S^*$ ,
- ❹ mamy  $\|T^*\| = \|T\|$  dla każdego  $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ .

## DOWÓD

Ad ❶. To wynika np. z faktu, że  $(F^*)^* = F$  dla dowolnej formy półtoraliniowej na  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .

Ad ❷. Łatwo sprawdzamy, że dla dowolnych  $\xi \in \mathcal{H}$  i  $\eta \in \mathcal{K}$  mamy

$$\langle \xi | (\alpha T_1 + \beta T_2) \eta \rangle = \alpha \langle \xi | T_1 \eta \rangle + \beta \langle \xi | T_2 \eta \rangle = \alpha \langle T_1^* \xi | \eta \rangle + \beta \langle T_2^* \xi | \eta \rangle = \langle (\bar{\alpha} T_1^* + \bar{\beta} T_2^*) \xi | \eta \rangle,$$

a więc operator  $\bar{\alpha} T_1^* + \bar{\beta} T_2^*$  spełnia warunek jednoznacznie definiujący operator  $(\alpha T_1 + \beta T_2)^*$ .

## STWIERDZENIE

- ❶ Dla każdego  $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  mamy  $(T^*)^* = T$ ,
- ❷ jeśli  $T_1, T_2 \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , to  $(\alpha T_1 + \beta T_2)^* = \bar{\alpha} T_1^* + \bar{\beta} T_2^*$ ,
- ❸ jeśli  $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  i  $S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ , to  $(ST)^* = T^* S^*$ ,
- ❹ mamy  $\|T^*\| = \|T\|$  dla każdego  $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ .

## DOWÓD

Ad ❸. Podobnie jak w poprzednim punkcie, dla dowolnego  $\zeta \in \mathcal{L}$ ,  $\eta \in \mathcal{K}$  mamy

$$\langle \zeta | ST\eta \rangle = \langle S^* \zeta | T\eta \rangle = \langle T^* S^* \zeta | \eta \rangle$$

a zatem  $T^* S^*$  spełnia warunek definiujący  $(ST)^*$ .

Punkt ❹ wynika natychmiast z omówionej wcześniej równości  $\|F^*\| = \|F\|$  dla wszystkich form półtoraliniowych.  $\square$



## DEFINICJA

Operator  $T \in B(\mathcal{H})$  nazywamy **samosprzężonym**, jeśli  $T = T^*$ .

## PRZYKŁAD

Niech  $\mathcal{M}$  będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta  $\mathcal{H}$ . Sprawdzimy, że  $P_{\mathcal{M}}$  jest operatorem samosprzężonym. Weźmy  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  i rozłóżmy każdy z nich na komponenty z  $\mathcal{M}$  i  $\mathcal{M}^\perp$ :  $\varphi = \xi + \eta$  i  $\psi = \xi' + \eta'$ . Wtedy

$$\langle \varphi | P_{\mathcal{M}} \psi \rangle = \langle \xi + \eta | \xi' \rangle = \langle \xi | \xi' \rangle = \langle \xi | \xi' + \eta' \rangle = \langle P_{\mathcal{M}} \varphi | \psi \rangle.$$

Wektory  $\varphi$  i  $\psi$  wybraliśmy dowolnie, a więc  $P_{\mathcal{M}}^* = P_{\mathcal{M}}$ .

## UWAGA

Jeśli  $\mathcal{M}_1$  i  $\mathcal{M}_2$  są takimi domkniętymi podprzestrzeniami, że  $\mathcal{H} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$  (w sensie algebraicznym), to rzut na  $\mathcal{M}_1$  wzdłuż  $\mathcal{M}_2$  jest ograniczony i jest on samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1^\perp$ .

- Niech  $\mathcal{H}$  będzie przestrzenią Hilberta i niech  $\psi \in \mathcal{H}$ . Symbolem  $|\psi\rangle$  oznacza się często odwzorowanie liniowe  $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}$  przeprowadzające 1 na  $\psi$ , a symbolem  $\langle\psi|$  odwzorowanie sprzężone do  $|\psi\rangle$ .
- Nietrudno sprawdzić, że  $\langle\psi|$  przeprowadza dowolny  $\xi \in \mathcal{H}$  na skalar  $\langle\psi|\xi\rangle$ .
- Dla dowolnych  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$  złożenie odwzorowań  $\mathbb{C} \xrightarrow{|\varphi\rangle} \mathcal{H} \xrightarrow{\langle\psi|} \mathbb{C}$  jest odwzorowaniem mnożenia przez skalar  $\langle\psi|\varphi\rangle$ . Innymi słowy  $\langle\psi| \circ |\varphi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle$ .
- Bardzo często korzystamy z operatorów postaci  $|\varphi\rangle\langle\psi|$  (przeprowadzający  $\xi$  na  $\langle\psi|\xi\rangle\varphi$ ). Przykładowo jeśli  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  jest bazą ortonormalną podprzestrzeni  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ , to

$$P_{\mathcal{M}} = \sum_{i \in I} |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

w tym sensie, że

$$P_{\mathcal{M}}\xi = \sum_{i \in I} \langle\phi_i|\xi\rangle\phi_i$$

dla każdego  $\xi \in \mathcal{H}$ .

## TWIERDZENIE

Niech  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{K}$  będą przestrzeniami Hilberta i niech  $V$  będzie odwzorowaniem liniowym  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ . Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ❶  $V$  jest odwzorowaniem izometrycznym,
- ❷  $V$  jest ograniczone i  $V^*V = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ ,
- ❸ dla dowolnych  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  mamy  $\langle V\xi | V\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$ .

## DOWÓD

①  $\Rightarrow$  ②: Jest jasne, że operator izometryczny jest ograniczony. Dalej stosując formułę polaryzacyjną do formy półtoraliniowej  $F(\xi, \eta) = \langle V\xi | V\eta \rangle$  ( $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ ) oraz fakt, że  $\|V\psi\| = \|\psi\|$  dla wszystkich  $\psi$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle V\xi | V\eta \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \mathbf{i}^k \left\langle V(\eta + \mathbf{i}^k \xi) \middle| V(\eta + \mathbf{i}^k \xi) \right\rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \mathbf{i}^k \|V(\eta + \mathbf{i}^k \xi)\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \mathbf{i}^k \|\eta + \mathbf{i}^k \xi\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 \mathbf{i}^k \left\langle \eta + \mathbf{i}^k \xi \middle| \eta + \mathbf{i}^k \xi \right\rangle = \langle \xi | \eta \rangle. \end{aligned}$$

Stąd dla dowolnych  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  mamy

$$\langle V^* V\xi | \eta \rangle = \langle V\xi | V\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle,$$

czyli  $V^* V\xi = \xi$ .

## DOWÓD

②  $\Rightarrow$  ③: Jeśli  $V^*V = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$  to dla  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  mamy

$$\langle V\xi | V\eta \rangle = \langle V^*V\xi | \eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle.$$

③  $\Rightarrow$  ①:

Podstawiając  $\eta = \xi$  w równości  $\langle V\xi | V\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$  otrzymujemy  $\|V\xi\|^2 = \|\xi\|^2$  dla każdego  $\xi \in \mathcal{H}$ , co oznacza, że  $V$  jest izometrią.  $\square$

## UWAGA

Ograniczoność  $V$  w punkcie ② jest potrzebna, ponieważ operator sprzężony zdefiniowaliśmy tylko dla operatorów ograniczonych. Okazuje się, że można tę definicję rozszerzyć na dowolny operator liniowy zdefiniowany na gęstej podprzestrzeni  $\mathcal{H}$  i wtedy ograniczoność  $V$  wynika z warunku  $V^*V = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ .

## DEFINICJA

Operator  $V \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  spełniający warunki z powyższego twierdzenia nazywamy **izometrią**.

Operator  $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  jest **unitarny**, jeśli  $U$  jest izometrycznym izomorfizmem.

- Niech  $X$  i  $Y$  będą przestrzeniami Banacha.
- Przypomnijmy, że operator  $T \in B(X, Y)$  jest odwracalny, jeśli istnieje  $S \in B(Y, X)$  taki, że  $TS = \mathbb{1}_Y$ ,  $ST = \mathbb{1}_X$ .

## TWIERDZENIE

Niech  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{K}$  będą przestrzeniami Hilberta i niech  $U$  będzie odwzorowaniem liniowym  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ . Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ①  $U$  jest unitarny,
- ②  $U$  jest ograniczony i odwracalny oraz  $U^{-1} = U^*$ ,
- ③  $U$  jest ograniczony i mamy  $U^*U = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$  oraz  $UU^* = \mathbb{1}_{\mathcal{K}}$ ,
- ④  $U$  jest surjekcją i dla dowolnych  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  mamy  $\langle U\xi | U\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$ .

## DOWÓD

①  $\Rightarrow$  ②: Jeśli  $U$  jest unitarny, to jest odwracalny (i  $U^{-1}$  jest odwzorowaniem izometrycznym). Skoro  $U$  jest izometryczny, mamy  $U^*U = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ , a mnożąc obie strony tej równości z prawej przez  $U^{-1}$  otrzymujemy  $U^* = U^{-1}$ .

Implikacja ②  $\Rightarrow$  ③ jest oczywista.

③  $\Rightarrow$  ④: Skoro  $UU^* = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ , operator  $U$  jest surjektywny. Fakt, że  $U$  zachowuje iloczyn skalarny wynika natychmiast z równości  $U^*U = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$ .

④  $\Rightarrow$  ①: Zakładamy, że  $U$  jest surjekcją, a więc musimy jedynie wykazać, że jest też izometrią. W tym celu wystarczy położyć  $\eta = \xi$  we wzorze  $\langle U\xi | U\eta \rangle = \langle \xi | \eta \rangle$ .  $\square$