

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 7

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

PRZYKŁAD

Na przestrzeni $L_2(\mathbb{R}^d)$ rozważmy operator τ_y ($y \in \mathbb{R}^d$) zdefiniowany wzorem

$$(\tau_y \psi)(x) = \psi(x - y), \quad \psi \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Jest oczywiste, że $\|\tau_y \psi\|_2 = \|\psi\|_2$ dla wszystkich ψ i wszystkich y , a także, że operator τ_y jest surjekcją. Tak więc τ_y jest unitarny dla każdego y . Co więcej, dla dowolnych $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$ mamy

$$\tau_{y_1} \circ \tau_{y_2} = \tau_{y_1 + y_2},$$

czyli $y \mapsto \tau_y$ jest homomorfizmem z grupy $\mathbb{R}^d$ w grupę wszystkich operatorów unitarnych na $L_2(\mathbb{R}^d)$. Sprawdźmy teraz, że homomorfizm ten jest ciągły w tym sensie, że dla dowolnego $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ odwzorowanie

$$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto \tau_y \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$$

jest ciągłe.

PRZYKŁAD

Weźmy $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ i $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $g_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^d)$ taka, że $\|\psi - g_\varepsilon\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$ i zdefiniujemy

$$S = \{x + z \mid x \in \text{supp } g_\varepsilon, \|z\| \leq 1\}.$$

Funkcja g jest jednostajnie ciągła, a więc istnieje $\delta_\varepsilon \in]0, 1]$ taka, że $\|x - y\| < \delta$ implikuje $|g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(y)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{|S|}}$. Wówczas jeśli $\|y\| < \delta_\varepsilon$, to

$$\begin{aligned} \|\tau_y g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |g_\varepsilon(x - y) - g_\varepsilon(x)|^2 dx = \int_S |g_\varepsilon(x - y) - g_\varepsilon(x)|^2 dx \\ &\leq |S| \sup_{x \in S} |g_\varepsilon(x - y) - g_\varepsilon(x)|^2 < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\begin{aligned} \|\tau_y \psi - \psi\|_2 &\leq \|\tau_y \psi - \tau_y g_\varepsilon\|_2 + \|\tau_y g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_2 + \|g_\varepsilon - \psi\|_2 \\ &= \|\psi - g_\varepsilon\|_2 + \|\tau_y g_\varepsilon - g_\varepsilon\|_2 + \|g_\varepsilon - \psi\|_2 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

jeśli tylko $\|y\| < \delta_\varepsilon$.

PRZYKŁAD

Przypomnijmy, że spłot $f * g$ funkcji $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ i $g \in L_p(\mathbb{R}^d)$ zdefiniowaliśmy wzorem

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y - x)g(x) \, dx, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Używając operatorów $\{\tau_y\}_{y \in \mathbb{R}^d}$ możemy rozszerzyć tę definicję na pary funkcji z $L_2(\mathbb{R}^d)$. Istotnie, jeśli $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ to kładąc $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$) mamy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(y - x)| |\psi(x)| \, dx &= \langle \tau_y |\tilde{\phi}| \mid |\psi| \rangle = |\langle \tau_y |\tilde{\phi}| \mid |\psi| \rangle| \\ &\leq \| \tau_y |\tilde{\phi}| \|_2 \| |\psi| \|_2 = \| |\tilde{\phi}| \|_2 \| |\psi| \|_2 = \| \tilde{\phi} \|_2 \| \psi \|_2 = \| \phi \|_2 \| \psi \|_2 \end{aligned}$$

na mocy unitarności operatorów τ_y oraz $\phi \mapsto \tilde{\phi}$.

PRZYKŁAD

Wynika stąd, że więc całka

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(y-x)\psi(x) \, dx$$

jest dobrze określona dla dowolnego $y \in \mathbb{R}^d$.

Ponadto funkcja

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y-x)\psi(x) \, dx = \langle \tau_y \tilde{\phi} \mid \psi \rangle$$

jest ciągła, a więc spłot dwóch elementów $L_2(\mathbb{R}^d)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną (na mocy nierówności Schwarz'a).

PRZYKŁAD

Niech $A \subset \mathbb{R}^d$ będzie zbiorem o niezerowej i skończonej mierze Lebesgue'a i połóżmy $\psi = \mathbf{1}_A$. Wówczas nośnik funkcji

$$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto \langle \tau_y \psi | \psi \rangle \in \mathbb{R}$$

zawiera się w zbiorze $A - A = \{a - b \mid a, b \in A\}$, gdyż

$$\langle \tau_y \psi | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x - y) \mathbf{1}_A(x) \, dx = \int_A \mathbf{1}_A(x - y) \, dx.$$

Ponadto funkcja ta jest ciągła i niezerowa (jej wartość w zerze wynosi $\|\psi\|_2^2 \neq 0$), a więc jej nośnik musi zawierać zbiór otwarty. Tym samym wykazaliśmy, że dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^d$ o niezerowej mierze Lebesgue'a zbiór $A - A$ zawiera kulę. W szczególności jeśli $A \subset \mathbb{R}$ jest mierzalny i niezerowej miary Lebesgue'a, to $A - A$ zawiera przedział. Fakt ten jest znany jako twierdzenie Steinhausa.

- Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta.
- Twierdzenie Riesz o reprezentacji pozwala utożsamić przestrzeń $\mathcal{H}^*$ z $\mathcal{H}$ poprzez bijekcję

$$\mathcal{H} \ni \theta \longmapsto \langle \theta | \in \mathcal{H}^*.$$

- Odwzorowanie to jest izometryczne, ale anty-liniowe.
- Przestrzeń $\mathcal{H}^*$ jest przestrzenią Hilberta (choćby dlatego, że norma na $\mathcal{H}^*$ spełnia tożsamość równoległoboku). Łatwo sprawdzić, że iloczyn skalarny na $\mathcal{H}^*$ wygląda tak:

$$\langle \langle \psi | | \langle \phi | \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$$

dla wszystkich $\phi, \psi \in \mathcal{H}$.

- Niech X będzie przestrzenią Banacha, a Y jej domkniętą podprzestrzenią.
- Na przestrzeni X/Y definiujemy **normę ilorazową**:

$$\|x + Y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\|.$$

- Przestrzeń X/Y z normą ilorazową jest przestrzenią Banacha.
- Jeśli $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta, a $\mathcal{M}$ jej domkniętą podprzestrzenią, to przestrzeń Banacha $\mathcal{H}/\mathcal{M}$ jest naturalnie izomorficzna z $\mathcal{M}^\perp$:

$$\mathcal{H}/\mathcal{M} \ni \psi + \mathcal{M} \longmapsto P_{\mathcal{M}^\perp} \psi \in \mathcal{M}^\perp.$$

- Powyższy izomorfizm jest izometrią dla normy ilorazowej na $\mathcal{H}/\mathcal{M}$ i normy na $\mathcal{M}$ odziedziczonej z $\mathcal{H}$. W szczególności $\mathcal{H}/\mathcal{M}$ jest przestrzenią Hilberta.

- Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta.
- Na przestrzeni $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ istnieje dokładnie jeden iloczyn skalarny taki, że odwzorowania

$$\mathcal{H} \ni \xi \mapsto \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \quad \text{ i } \quad \mathcal{K} \ni \eta \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ \eta \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$$

są izometriami o ortogonalnych obrazach.

- Jest to $\left\langle \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \end{bmatrix} \right\rangle = \langle \xi | \xi' \rangle + \langle \eta | \eta' \rangle$.
- Przestrzeń $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ ze zdefiniowanym powyżej iloczynem skalarnym jest przestrzenią Hilberta.
- Naturalny izomorfizm

$$(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}) \oplus \mathcal{L} \ni \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \\ \theta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \varphi \\ \begin{bmatrix} \psi \\ \theta \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathcal{H} \oplus (\mathcal{K} \oplus \mathcal{L})$$

jest odwzorowaniem unitarnym.

PRZYKŁAD

Niech (Ω, μ) i (Λ, ν) będą przestrzeniami z miarą i niech $\mathcal{H} = L_2(\Omega, \mu)$ oraz $\mathcal{K} = L_2(\Lambda, \nu)$. Przestrzeń $\Omega \sqcup \Lambda$ możemy wyposażyć w miarę $\mu \sqcup \nu$ zdefiniowaną na σ -algebrze podzbiorów $\Omega \sqcup \Lambda$, których przecięcia z Ω i Λ są mieralne wzorem

$$(\mu \sqcup \nu)(A) = \mu(A \cap \Omega) + \nu(A \cap \Lambda).$$

Wówczas każda para mierzalnych funkcji (f, g) odpowiednio na Ω i na Λ definiuje mierzalną funkcję $f \sqcup g$ na $\Omega \sqcup \Lambda$:

$$(f \sqcup g)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ g(x) & x \in \Lambda \end{cases}.$$

Nietrudno wykazać, że dla $\varphi \in L_2(\Omega, \mu)$ i $\psi \in L_2(\Lambda, \nu)$ mamy $\varphi \sqcup \psi \in L_2(\Omega \sqcup \Lambda, \mu \sqcup \nu)$, ale też dowolna $\theta \in L_2(\Omega \sqcup \Lambda, \mu \sqcup \nu)$ jest postaci $\theta = \varphi \sqcup \psi$ dla jednoznacznie wyznaczonych $\varphi \in L_2(\Omega, \mu)$ i $\psi \in L_2(\Lambda, \nu)$.

PRZYKŁAD

Równie łatwo widzimy, że odwzorowanie

$$L_2(\Omega, \mu) \oplus L_2(\Lambda, \nu) \ni \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix} \longmapsto \varphi \sqcup \psi \in L_2(\Omega \sqcup \Lambda, \mu \sqcup \nu)$$

jest operatorem unitarnym. Innymi słowy $L_2(\Omega, \mu) \oplus L_2(\Lambda, \nu) \cong L_2(\Omega \sqcup \Lambda, \mu \sqcup \nu)$.

Możemy też postąpić odwrotnie – zacząć od przestrzeni z miarą i rozłożyć ją na części. Przykładowo

$$L_2(\mathbb{R}) \cong L_2(]-\infty, 0[) \oplus L_2(]0, +\infty[),$$

przy czym jednopunktowy podzbiór $\{0\}$ został pominięty, gdyż jest miary zero.

TWIERDZENIE

Niech $\{\mathcal{H}_j\}_{j \in J}$ będzie rodziną przestrzeni Hilberta i oznaczmy symbolem $\mathcal{D}$ zbiór ciągów $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$ takich, że dla każdego j mamy $\xi_j \in \mathcal{H}_j$ oraz $\sum_{j \in J} \|\xi_j\|^2 < +\infty$.

Wówczas

- ❶ $\mathcal{D}$ jest przestrzenią wektorową z naturalnymi operacjami dodawania i mnożenia przez skalary:
 - dla $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$ i $\eta = (\eta_j)_{j \in J}$ definiujemy $\xi + \eta$ jako ciąg $(\xi_j + \eta_j)_{j \in J}$,
 - dla $\alpha \in \mathbb{C}$ i $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$ kładziemy $\alpha\xi = (\alpha\xi_j)_{j \in J}$,
- ❷ dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathcal{D}$ szereg $\sum_{j \in J} \langle \xi_j | \eta_j \rangle$ jest zbieżny bezwzględnie i jego suma definiuje iloczyn skalarny na $\mathcal{D}$, z którym $\mathcal{D}$ jest przestrzenią Hilberta.

DOWÓD

Weźmy $\xi = (\xi_j)_{j \in J}, \eta = (\eta_j)_{j \in J} \in \mathcal{D}$. Dzięki nierówności Schwarza w $\ell_2(J)$ mamy

$$\sum_{j \in J} \|\xi_j\| \|\eta_j\| \leq \sqrt{\sum_{j \in J} \|\xi_j\|^2} \sqrt{\sum_{j \in J} \|\eta_j\|^2} < +\infty,$$

a więc szereg

$$\sum_{j \in J} \|\xi_j + \eta_j\|^2 = \sum_{j \in J} (\|\xi_j\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \xi_j | \eta_j \rangle + \|\eta_j\|^2) \leq \sum_{j \in J} (\|\xi_j\|^2 + 2 \|\xi_j\| \|\eta_j\| + \|\eta_j\|^2)$$

jest zbieżny i w konsekwencji $\xi + \eta \in \mathcal{D}$.

Fakt, że $\alpha \xi \in \mathcal{D}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$ jest jasny.

DOWÓD

Oszacowanie $\sum_{j \in J} |\langle \xi_j | \eta_j \rangle| \leq \sum_{j \in J} \|\xi_j\| \|\eta_j\| < +\infty$ gwarantuje zbieżność sumy $\sum_{j \in J} \langle \xi_j | \eta_j \rangle$.

Oznaczając ją symbolem $\langle \xi | \eta \rangle$ zauważamy, że

- wyrażenie $\langle \xi | \eta \rangle$ jest liniowe względem η ,
- $\langle \xi | \eta \rangle = \overline{\langle \eta | \xi \rangle}$,
- $\langle \xi | \xi \rangle > 0$, jeśli $\xi \neq 0$.

Tak więc odwzorowanie $(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi | \eta \rangle$ jest iloczynem skalarnym na $\mathcal{D}$ i wyznaczona przez ten iloczyn skalarny norma elementu $\gamma = (\gamma_j)_{j \in J} \in \mathcal{D}$ jest równa

$$\|\gamma\| = \sqrt{\langle \gamma | \gamma \rangle} = \left(\sum_{j \in J} \langle \gamma_j | \gamma_j \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j \in J} \|\gamma_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

DOWÓD

Przechodzimy do dowodu zupełności $\mathcal{D}$. Niech $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{D}$, tj. dla każdego n mamy $\xi_n = (\xi_{n,j})_{j \in J}$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że $m, n \geq N_\varepsilon$

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \sum_{j \in J} \|\xi_{n,j} - \xi_{m,j}\|^2 < \varepsilon^2.$$

Wynika stąd po pierwsze, że dla każdego j ciąg $(\xi_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ spełnia warunek Cauchy'ego $\mathcal{H}_j$. Kładziemy $\xi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n,j}$ oraz $\xi = (\xi_j)_{j \in J}$.

weźmy teraz skończony podzbiór $J_0 \subset J$. Wtedy

$$\sum_{j \in J_0} \|\xi_{n,j} - \xi_j\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_0} \|\xi_{n,j} - \xi_{m,j}\|^2 \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \sum_{j \in J} \|\xi_{n,j} - \xi_{m,j}\|^2 \leq \varepsilon^2,$$

jeśli tylko $n \geq N_\varepsilon$.

DOWÓD

Wynika stąd, że dla $n \geq N_\varepsilon$ mamy

$$\sum_{j \in J} \|\xi_{n,j} - \xi_j\|^2 = \sup_{\substack{J_0 \subset J \\ |J_0| < +\infty}} \sum_{j \in J_0} \|\xi_{n,j} - \xi_j\|^2 \leq \varepsilon^2$$

i w konsekwencji

- $\sum_{j \in J} \|\xi_j\|^2 = \sum_{j \in J} \|\xi_j - \xi_{n,j} + \xi_{n,j}\|^2 \leq \sum_{j \in J} (\|\xi_j - \xi_{n,j}\|^2 + 2\|\xi_j - \xi_{n,j}\|\|\xi_{n,j}\| + \|\xi_{n,j}\|^2) < +\infty$,
czyli $\xi \in \mathcal{D}$,
- dla wszystkich $n \geq N_\varepsilon$ mamy $\|\xi_n - \xi\| \leq \varepsilon$, a więc $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$ w normie przestrzeni $\mathcal{D}$.



DEFINICJA

Przestrzeń $\mathcal{D}$ skonstruowaną w ostatnim twierdzeniu nazywamy **sumą prostą** przestrzeni Hilberta $\{\mathcal{H}_j\}_{j \in J}$. Oznaczamy ją symbolem $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j$.

PRZYKŁADY

- ❶ Dla dowolnego zbioru J przestrzeń Hilberta $\ell_2(J)$ jest izometrycznie izomorficzna z sumą prostą $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j$, gdzie $\mathcal{H}_j = \mathbb{C}$ dla każdego j . Innymi słowy $\ell_2(J) \cong \bigoplus_J \mathbb{C}$.
- ❷ $L_2(\mathbb{R}) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_2([n, n+1[) \cong \bigoplus_{\mathbb{Z}} L_2([0, 1[)$.

LEMAT

Niech $T \in B(\mathcal{H})$. Wówczas $(\operatorname{ran} T)^\perp = \ker T^*$.

DOWÓD

$\xi \in \ker T^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle T^*\xi | \eta \rangle = 0$ dla wszystkich $\eta \in \mathcal{H}$. Stąd $\xi \in \ker T^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle \xi | T\eta \rangle = 0$ dla wszystkich η , tj. wtedy i tylko wtedy, gdy $\xi \perp \operatorname{ran} T$. □

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta i $P \in B(\mathcal{H})$. Jeśli $P^2 = P$ i $P = P^*$, to istnieje domknięta podprzestrzeń $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ taka, że $P = P_{\mathcal{M}}$.

DOWÓD

Niech $\mathcal{M}$ będzie obrazem P . Skoro $P^2 = P$, mamy $\text{Ran } P = \ker(1 - P)$, a więc $\mathcal{M}$ jest domknięta.

Teraz na mocy lematu $\ker P = \ker P^* = (\text{ran } P)^{\perp} = \mathcal{M}^{\perp}$, czyli P jest rzutem na $\mathcal{M}$ wzdłuż $\mathcal{M}^{\perp}$. □

- Mamy więc bijekcję pomiędzy domkniętymi podprzestrzeniami w $\mathcal{H}$, a rzutami ortogonalnymi w $B(\mathcal{H})$ (operatorami $P \in B(\mathcal{H})$ takimi, że $P^*P = P$).