

METODY PRZESTRZENI HILBERTA – WYKŁAD 8

WYDZIAŁ FIZYKI UW

Piotr M. Sołtan

Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Semestr letni 2024/2025

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ będą domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$.
Wówczas

- ❶ $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} = 0$,
- ❷ $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}$.

W przypadku ❶ podprzestrzeń $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ jest domknięta i $P_{\mathcal{M}+\mathcal{N}} = P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$.

DOWÓD

Ad ❶. Jeśli $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$, to dla dowolnego $\psi \in \mathcal{H}$ mamy $P_{\mathcal{N}}\psi \in \mathcal{N} \subset \mathcal{M}^\perp = \ker P_{\mathcal{M}}$ i tak samo $P_{\mathcal{M}}\psi \in \ker P_{\mathcal{N}}$, skąd wynika $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} = 0$.

Odwrotnie, jeśli $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$, to każdy $\eta \in \mathcal{N}$ spełnia $P_{\mathcal{M}}\eta = P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}\eta = 0$, co oznacza, że $\mathcal{N} \subset \ker P_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}^\perp$, t.j. $\mathcal{N} \perp \mathcal{M}$.

Ad ❷. Ze wzoru $P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}$ wynika, że $P_{\mathcal{N}}\xi = \xi$ dla dowolnego $\xi \in \mathcal{M}$, czyli $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Odwrotnie, jeśli $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, to dla każdego $\psi \in \mathcal{H}$ wektor $P_{\mathcal{M}}\psi$ należy do $\mathcal{N}$, a więc $P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}\psi = P_{\mathcal{M}}\psi$.

Założmy teraz, że $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$. Podprzestrzeń $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ jest domknięta, gdyż jeśli $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem elementów $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ zbieżnym do $\psi \in \mathcal{H}$, to rozkładając

$$\psi_n = \xi_n + \eta_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

na składowe w $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ otrzymujemy ciągi $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, które oba spełniają warunek Cauchy'ego, ponieważ $\|\psi_n - \psi_m\|^2 = \|\xi_n - \xi_m\|^2 + \|\eta_n - \eta_m\|^2$.

DOWÓD

Skoro $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ są domknięte, ciągi $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mają granice $\xi \in \mathcal{M}$ oraz $\eta \in \mathcal{N}$ i $\psi = \xi + \eta \in \mathcal{N} + \mathcal{M}$.

Zauważmy dalej, że operator $P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$ jest samosprężony i idempotentny, a ponadto jest on identycznością na $\mathcal{M} + \mathcal{N}$. Co więcej, dla każdego $\zeta \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp = (\mathcal{M} + \mathcal{N})^\perp$ mamy $(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})\zeta = 0$, a zatem $P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$ jest rzutem ortogonalnym na $\mathcal{M} + \mathcal{N}$. $\square$

LEMAT

Dla dowolnych domkniętych podprzestrzeni $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ mamy $\mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp = (\mathcal{M} + \mathcal{N})^\perp$.

DOWÓD

Skoro $\mathcal{M} \subset \mathcal{M} + \mathcal{N}$ i $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} + \mathcal{N}$, mamy $(\mathcal{M} + \mathcal{N})^\perp \subset \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp$. Z drugiej strony, jeśli $\psi \in \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp$, to ψ jest ortogonalny do każdego wektora postaci $\xi + \eta$ dla $\xi \in \mathcal{M}$, $\eta \in \mathcal{N}$. $\square$

- Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi.
- **Algebraicznym iloczynem tensorowym** V i W nazywamy przestrzeń $V \otimes_{\text{alg}} W$ wraz z dwuliniowym odwzorowaniem $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes_{\text{alg}} W$ taką, że dla każdej przestrzeni wektorowej Z i każdego dwuliniowego odwzorowania $F: V \times W \rightarrow Z$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $f: V \otimes_{\text{alg}} W \rightarrow Z$ takie, że diagram

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{F} & Z \\
 \downarrow \otimes & \nearrow f & \\
 V \otimes_{\text{alg}} W & &
 \end{array}$$

jest przemienny.

- Iloczyn tensorowy istnieje i jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.
- Wartość odwzorowania $\otimes: V \times W \rightarrow V \otimes_{\text{alg}} W$ na elemencie $(v, w) \in V \times W$ oznaczamy symbolem $v \otimes w$ i nazywamy **tensorem prostym**.

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta. Wówczas istnieje dokładnie jeden iloczyn skalarny na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ taki, że

$$\langle \varphi_1 \otimes \psi_1 | \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}.$$

DOWÓD

Jedyność iloczynu skalarnego spełniający warunek z twierdzenia jest oczywista, gdyż tensory proste rozpinają przestrzeń $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$.

Dla dowodu istnienia ustalmy $\varphi_1 \in \mathcal{H}$ i $\psi_1 \in \mathcal{K}$. Odwzorowanie

$$\mathcal{H} \times \mathcal{K} \ni (\varphi_2, \psi_2) \longmapsto \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \in \mathbb{C}$$

jest dwuliniowe, a więc istnieje jedyny funkcjonał liniowy Φ_{φ_1, ψ_1} na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ taki, że

$$\Phi_{\varphi_1, \psi_1}(\varphi_2 \otimes \psi_2) = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad \varphi_2 \in \mathcal{H}, \psi_2 \in \mathcal{K}.$$

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta. Wówczas istnieje dokładnie jeden iloczyn skalarny na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ taki, że

$$\langle \varphi_1 \otimes \psi_1 | \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}.$$

DOWÓD

Teraz niech $\mathcal{E}$ będzie przestrzenią wektorową wszystkich antyliniowych funkcjonałów na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$. Wtedy funkcja $\overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}}$ zdefiniowana wzorem

$$\overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}}(\xi) = \overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}(\xi)}, \quad \xi \in \mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$$

jest elementem $\mathcal{E}$ dla każdej pary (φ_1, ψ_1) . Co więcej odwzorowanie

$$\mathcal{H} \times \mathcal{K} \ni (\varphi_1, \psi_1) \longmapsto \overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}} \in \mathcal{E}$$

jest dwuliniowe. Wynika stąd, że istnieje jedyne liniowe $\Xi: \mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}$ takie, że

$$\Xi(\varphi_1, \psi_1) = \overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}}, \quad \varphi_1 \in \mathcal{H}, \psi_1 \in \mathcal{K}.$$

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta. Wówczas istnieje dokładnie jeden iloczyn skalarny na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ taki, że

$$\langle \varphi_1 \otimes \psi_1 | \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}.$$

DOWÓD

Wykazaliśmy, że dla dowolnych $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$ i $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}$ mamy

$$(\Xi(\varphi_1 \otimes \psi_1))(\varphi_2 \otimes \psi_2) = \overline{\Phi_{\varphi_1, \psi_1}(\varphi_2 \otimes \psi_2)} = \overline{\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle} = \langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle.$$

Możemy więc zdefiniować iloczyn skalarny na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$:

$$\langle \xi | \eta \rangle = \overline{(\Xi(\xi))(\eta)}, \quad \xi, \eta \in \mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}.$$

Na mocy tej definicji wyrażenie $\langle \xi | \eta \rangle$ jest liniowe względem η .

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta. Wówczas istnieje dokładnie jeden iloczyn skalarny na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ taki, że

$$\langle \varphi_1 \otimes \psi_1 | \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}.$$

DOWÓD

Niech $\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \otimes \xi_i^2$ oraz $\eta = \sum_{j=1}^M \eta_j^1 \otimes \eta_j^2$. Wtedy

$$\begin{aligned} \langle \xi | \eta \rangle &= \overline{(\Xi(\xi))(\eta)} = \overline{\left(\Xi \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^1 \otimes \xi_i^2 \right) \right) \left(\sum_{j=1}^M \eta_j^1 \otimes \eta_j^2 \right)} = \overline{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\Xi(\xi_i^1 \otimes \xi_i^2))(\eta_j^1 \otimes \eta_j^2)} \\ &= \overline{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \langle \eta_j^1 | \xi_i^1 \rangle \langle \eta_j^2 | \xi_i^2 \rangle} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \langle \xi_i^1 | \eta_j^1 \rangle \langle \xi_i^2 | \eta_j^2 \rangle, \end{aligned}$$

co w szczególności pokazuje, że $\langle \xi_1 \otimes \eta_1 | \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle = \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle \langle \eta_1 | \eta_2 \rangle$.

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta. Wówczas istnieje dokładnie jeden iloczyn skalarny na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ taki, że

$$\langle \varphi_1 \otimes \psi_1 | \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}.$$

DOWÓD

Z powyższego rachunku wynika także, że

$$\langle \eta | \xi \rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \langle \eta_j^1 | \xi_i^1 \rangle \langle \eta_j^2 | \xi_i^2 \rangle = \overline{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \langle \xi_i^1 | \eta_j^1 \rangle \langle \xi_i^2 | \eta_j^2 \rangle} = \overline{\langle \xi | \eta \rangle}$$

dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$.

TWIERDZENIE

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta. Wówczas istnieje dokładnie jeden iloczyn skalarny na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ taki, że

$$\langle \varphi_1 \otimes \psi_1 | \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}.$$

DOWÓD

Wreszcie jeśli $\xi = \sum_{i=1}^N \xi_i^1 \otimes \xi_i^2$ jest niezerowym elementem $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$, to stosując ortogonalizację Grama-Schmidta możemy spowodować, że $\xi_1^2, \dots, \xi_N^2$ są ortonormalne i wtedy

$$\langle \xi | \xi \rangle = \sum_{i=1}^N \|\xi_i^1\|^2 > 0.$$

Tym samym pokazaliśmy, że $(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi | \eta \rangle$ jest iloczynem skalarnym na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$. □

DEFINICJA

Niech $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta. **Iloczynem tensorowym** $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ nazywamy uzupełnienie przestrzeni $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ w normie pochodzącej od iloczynu skalarne go opisanego w powyższym twierdzeniu. Przestrzeń tę oznaczamy symbolem $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

UWAGA

Niech $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{K}$. Wówczas

$$\|\xi \otimes \eta\|^2 = \langle \xi \otimes \eta | \xi \otimes \eta \rangle = \|\xi\|^2 \|\eta\|^2,$$

czyli $\|\xi \otimes \eta\| = \|\xi\| \|\eta\|$. Norma na (algebraicznym) iloczynie tensorowym przestrzeni z normą, która ma tę własność nazywa się **normą krzyżową**. Innymi słowy naturalna norma na iloczynie tensorowym przestrzeni Hilberta jest normą krzyżową.

UWAGA

Niech $\mathcal{H}$ będzie skończenie wymiarowa i wybierzmy bazę ortonormalną $\{e_1, \dots, e_d\}$ przestrzeni $\mathcal{H}$. Rozważmy algebraiczny iloczyn tensorowy $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$. stosując ortogonalizację Grama-Schmidta względem pierwszej nogi iloczynu tensorowego możemy dowolny element $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ zapisać w formie $\sum_{i=1}^d e_i \otimes \xi_i$ dla pewnych $\xi_1, \dots, \xi_d \in \mathcal{K}$. Wynika stąd natychmiast, że przestrzeń $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ jest izomorficzna z sumą prostą $\mathcal{K} \oplus \dots \oplus \mathcal{K}$ (d kopii) poprzez odwzorowanie

$$\sum_{i=1}^d e_i \otimes \xi_i \mapsto \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_d \end{bmatrix}.$$

Ponadto odwzorowanie to jest izometryczne dla norm pochodzących od iloczynów skalarnych na $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ i $\mathcal{K} \oplus \dots \oplus \mathcal{K}$. Zauważmy, że ta ostatnia przestrzeń jest zupełna, a więc $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K}$ jest automatycznie przestrzenią Hilberta:

$$\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}.$$

STWIERDZENIE

Niech $\{\phi_i\}_{i \in I}$ i $\{\psi_j\}_{j \in J}$ będą bazami ortonormalnymi przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$. Wówczas układ $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ jest bazą ortonormalną $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

DOWÓD

Układ $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{(i,j) \in I \times J}$, a do $\text{span}\{\varphi_i \otimes \psi_j \mid i \in I, j \in J\}$ należą wszystkie tensory proste postaci $\xi \otimes \eta$, gdzie $\xi \in \text{span}\{\varphi_i \mid i \in I\}$, a $\eta \in \text{span}\{\psi_j \mid j \in J\}$. Jeśli $\xi \in \mathcal{H}$ i $\eta \in \mathcal{K}$, to istnieją ciągi $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w $\text{span}\{\varphi_i \mid i \in I\}$ oraz $\text{span}\{\psi_j \mid j \in J\}$ takie, że $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$ i $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta$. Dalej, na mocy ciągłości normy mamy

$$\begin{aligned} \|\xi_n \otimes \eta_n - \xi \otimes \eta\|^2 &= \langle \xi_n \otimes \eta_n - \xi \otimes \eta \mid \xi_n \otimes \eta_n - \xi \otimes \eta \rangle \\ &= \|\xi_n \otimes \eta_n\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \xi_n \otimes \eta_n \mid \xi \otimes \eta \rangle + \|\xi \otimes \eta\|^2 \\ &= \|\xi_n\|^2 \|\eta_n\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle \xi_n \mid \xi \rangle \langle \eta_n \mid \eta \rangle + \|\xi\|^2 \|\eta\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Stąd $\mathcal{H} \otimes_{\text{alg}} \mathcal{K} \subset \overline{\text{span}\{\varphi_i \otimes \psi_j \mid i \in I, j \in J\}}$. □